Prefazione

In questo Quaderno sono raccolte le lezioni tenute nell'anno accademico 2004-05 da Anna Fino e Sergio Console nel corso di Gruppi di Lie per il Dottorato di Ricerca in Matematica all'Università di Torino. Le dispense sono state rielaborate e integrate da Luca Degiovanni.

La prima parte del corso era dedicata ai gruppi e le algebre di Lie. È dunque un prerequisito alla lettura di queste note la conoscenza delle nozioni di base su gruppi e algebre di Lie. Per fissare la notazione, vengono richiamate alcune nozioni sulle varietà differenziabili (Appendice)

Le note costituiscono un'introduzione alle varietà simplettiche. Vengono introdotte preliminarmente le azioni du un gruppo di Lie su una varietà (Capitolo 1) e le prime nozioni di geometria simplettica (Capitolo 2). Nel capitolo 3 viene esaminato il caso di azioni simplettiche e hamiltoniane.

Sergio Console
Luca Degiovanni
Anna Fino

Torino, aprile 2006

Indice

Capitolo 1

Azioni di gruppi di Lie

1.1 Definizioni

Definizione 1 *Sia G un gruppo di Lie e M una varietà differenziabile. Un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$*

$$\sigma : G \times M \to M$$

*è un'*azione $\mathcal{C}^\infty$ *(a sinistra) se, posto $\sigma(g, x) = g \cdot x = \sigma_g(x)$ vale*

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x\,, \quad 1_G \cdot x = x\,,$$

dove 1_G è l'elemento neutro di G.

Cioè, in altre parole, se la funzione

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathit{Diff}(M) \\ g & \mapsto & \sigma_g \end{array}$$

è un morfismo di gruppi.

Osservazione 1 *È anche possibile definire l'azione a destra di un gruppo, cioè un'applicazione $M \times G \to M$ che soddisfi $(x \cdot g_2) \cdot g_1 = x \cdot (g_2 g_1)$. In altri termini per le azioni a destra vale $\sigma_g \sigma_h = \sigma_{hg}$ anziché $\sigma_g \sigma_h = \sigma_{gh}$, come per le azioni a sinistra. Le proprietà delle azioni a destra sono analoghe a quelle delle azioni a sinistra, con le debite modifiche. Ad ogni azione a destra ρ_g corrisponde un'azione a sinistra definita da $\sigma_g = \rho_{g^{-1}}$, e viceversa. Nel caso di gruppi abeliani $\sigma_{hg} = \sigma_{gh}$ e quindi non vi è distinzione tra azioni a destra e a sinistra. Nel seguito verranno utilizzate solo azioni a sinistra e si sottointenderà il fatto che siano $\mathcal{C}^\infty$.*

Esempio 1 *La* moltiplicazione a sinistra *(o traslazione sinistra)*

$$\begin{array}{rcl} L : G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & gh = L_g(h) \end{array}$$

è un'azione (a sinistra) del gruppo di Lie G su se stesso.

Infatti per definizione di gruppo di Lie essa è $\mathcal{C}^\infty$, e inoltre soddisfa

$$L_{g_1}(L_{g_2}(h)) = g_1 g_2 h = L_{g_1 g_2}(h) \quad L_{1_G} h = 1_G h = h\,.$$

Esempio 2 *La* moltiplicazione a destra *(o traslazione destra)*

$$\begin{array}{rcl} R : G \times G & \to & G \\ (h, g) & \mapsto & hg = R_g(h) \end{array}$$

non è, in generale, un'azione a sinistra del gruppo di Lie G su se stesso, ma un'azione a destra.

Infatti vale $R_{g_1}(R_{g_2}(h)) = hg_2 g_1 = R_{g_2 g_1}(h)$.

Esempio 3 *L'*automorfismo interno *o coniugio*

$$\begin{array}{rcl} I : G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & ghg^{-1} = I_g(h) \end{array}$$

è un'azione (a sinistra) del gruppo G su se stesso, infatti

$$I_{g_1}(I_{g_2}(h)) = g_1 g_2\, h\, g_2^{-1} g_1^{-1} = I_{g_1 g_2}(h)\,, \quad I_{1_G}(h) = h\,.$$

L'applicazione $\widetilde{I}_g(h) = I_{g^{-1}}(h) = g^{-1}hg$ definisce, invece, un'azione a destra.

Esempio 4 *Sia X un campo vettoriale completo su M, allora il suo flusso ϕ_t può essere interpretato come azione del gruppo additivo $\mathbb{R}$, infatti le proprietà del flusso sono*

$$\phi_0 = \mathrm{id}_M \qquad \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}\,.$$

La richiesta di completezza del campo garantisce che il flusso sia definito $\forall t \in \mathbb{R}$. Viceversa ad ogni azione $\sigma : \mathbb{R}\times M \to M$ è possibile associare il campo vettoriale definito da

$$X(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f \circ \sigma_t$$

il quale è completo in quanto, per costruzione, il suo flusso è σ_t.

Esempio 5 *Si consideri il gruppo abeliano dei numeri complessi di modulo uno. Esso è identificabile con la circonferenza $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$. La mappa*

$$\begin{array}{rcl} S^1 \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (e^{i\theta}, z) & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array}$$

definisce un'azione corrispondente alle rotazioni nel piano bidimensionale che si ottengono ponendo $z = x + iy$:

$$\begin{array}{rcl} S^1 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \left(e^{i\theta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

All'azione di un gruppo su di una varietà M è associata in maniera naturale una partizione di M in classi di equivalenza chiamate orbite dell'azione.

Definizione 2 *Data l'azione di un gruppo di Lie G su di una varietà M l'*orbita *di un punto $x \in M$ è l'insieme*

$$\mathcal{O}_x = G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\} .$$

Il sottogruppo di isotropia *associato al punto $x \in M$ è l'insieme*

$$G_x = \{h \in G : h \cdot x = x\} .$$

Proposizione 1 *Data un'azione σ di un gruppo di Lie G su di una varietà M, la relazione $x \sim y \iff \exists\, g \in G : y = g \cdot x$ è una relazione di equivalenza e inoltre il sottogruppo di isotropia G_x è un sottogruppo chiuso di G e quindi un sottogruppo di Lie.*

Dimostrazione: Il fatto che $\sim$ sia una relazione di equivalenza segue direttamente dalle proprietà di gruppo e dalla definizione di azione. Infatti: $x \sim x$ scegliendo $g = 1_G$, $x \sim y \implies y \sim x$ perché se $y = g \cdot x$ allora $x = g^{-1} \cdot y$ e infine la proprietà transitiva segue dal fatto che se $y = g_2 \cdot x$ e $z = g_1 \cdot y$ allora $z = (g_1 g_2) \cdot x$.

La proprietà per cui G_x è un sottogruppo segue dal fatto che se $h_1 \cdot x = x$ e $h_2 \cdot x = x$ allora $(h_1 h_2) \cdot x = x$.

Infine siccome σ è una funzione continua l'insieme

$$G_x \times \{x\} = \sigma^{-1}(x) \cap (G \times \{x\})$$

è chiuso in $G \times M$ e quindi G_x è chiuso. $\square$

Definizione 3 *Un'azione σ di un gruppo di Lie G su di una varietà M si dice:*

- transitiva *se esiste un'unica orbita, in questo caso la varietà M si dice* omogenea*;*
- effettiva *o* fedele *se $\sigma_g = \mathrm{id}_M \implies g = 1_G$;*
- libera *se σ_g ha un punto fisso solo se $g = 1_G$.*

Osservazione 2 *Un'azione è effettiva se non esistono elementi del gruppo che "non fanno nulla", cioè che lasciano invariati tutti i punti della varietà. In altri termini un'azione σ è effettiva se il nucleo dell'applicazione $g \mapsto \sigma_g$ coincide con 1_G cioè se essa è iniettiva, da questo fatto segue la denominazione di fedele. Le azioni libere sono tutte effettive ma esistono azioni effettive che non sono libere, ad esempio l'azione di S^1 su $\mathbb{R}^2$ per rotazioni trattata nell'Esempio 5; ogni rotazione ha infatti l'origine come punto fisso ma solo l'identità ammette altri punti fissi.*

Osservazione 3 *Se $g \mapsto \sigma_g$ è un azione non effettiva con nucleo K allora l'azione indotta del gruppo quoziente G/K è effettiva.*

Osservazione 4 *I concetti di azione effettiva e libera possono essere riformulati utilizzando i sottogruppi di isotropia: un'azione è effettiva se e solo se l'unico sottogruppo comune a tutti i gruppi di isotropia è dato dalla sola identità, è invece libera se e solo se tutti i sottogruppi di isotropia contengono solo l'identità. Anche da questa riformulazione emerge che le azioni libere sono un sottoinsieme proprio delle azioni effettive.*

Esempio 6 *L'azione di un gruppo di Lie G su se stesso per moltiplicazione a sinistra è libera e transitiva. È libera perché se h è un punto fisso per L_g allora $L_g(h) = gh = h$ e quindi $g = 1_G$. È invece transitiva perché per ogni elemento g di G si ha $1_G \sim g$ in quanto $g = L_g(1_G)$.*

Esempio 7 *L'azione di un gruppo di Lie G su se stesso data dal coniugio I_g non è né libera né transitiva, infatti l'elemento neutro è un punto fisso per ogni I_g e costituisce un'orbita dell'azione.*

Esempio 8 *Si consideri l'azione di $S^1 \subset \mathbb{C}$ su*

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

definita da

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^3 & \to & S^3 \\ \big(e^{i\theta}, (z_1, z_2)\big) & \mapsto & (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_1) \end{array}$$

Questa azione è libera perché siccome z_1 e z_2 non sono mai contemporaneamente nulli $(e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_1) = (z_1, z_2)$ solo se $\theta = 0$. Essa però non è transitiva perché i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ appartengono a orbite diverse.

La relazione di equivalenza definita dall'azione è tale che

$$(z_1, z_2) = (\rho e^{i\theta_1}, z e^{i\theta_2}) \sim (\rho e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, z) = (x, y, z)$$

e l'appartenenza ad S^3 implica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La funzione che associa ad un punto di S^3 l'orbita che lo contiene è dunque una funzione $S^3 \to S^2$ detta fibrazione di Hopf.

Esempio 9 *Sia H un sottogruppo di G e consideriamo l'azione di H su G mediante moltiplicazione a sinistra (rispettivamente, a destra). Queste azioni sono libere e le orbite sono gli insiemi dei laterali destri Hg, $g \in G$ (rispettivamente i laterali sinistri gH, $g \in G$). Le orbite sono denotate usualmente con $H \backslash G$ (rispettivamente G/H). Mostreremo nel prossimo paragrafo che se H è un* sottogruppo chiuso, *allora $H \backslash G$ e G/H sono delle varietà regolari dette* varietà omogenee.

1.2 Varietà quoziente

Siccome l'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M definisce una partizione in classi di equivalenza di M data dalle orbite, è possibile definire l'insieme quoziente M/G come l'insieme delle classi di equivalenza. Se inoltre G agisce su una seconda varietà N è possibile richiedere la compatibilità di una mappa da M in N con le due azioni in modo da poter costruire una mappa tra gli spazi quozienti M/G e N/G. La condizione di compatibilità è data dal concetto di equivarianza.

Definizione 4 *Date due azioni a sinistra $\sigma : G \times M \to M$ e $\tau : G \times N \to N$ di uno stesso gruppo su due varietà, un'applicazione $\phi : M \to N$ è detta* equivariante *se*

$$\phi \circ \sigma = \tau \circ \phi \quad \textit{cioè se} \quad \phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x)$$

per ogni $g \in G$ e $x \in M$.

Proposizione 2 *Se G agisce sulle due varietà M e N data una mappa equivariante $\phi : M \to N$ è ben definita la mappa*

$$\begin{aligned} \psi : M/G &\to N/G \\ \mathcal{O}_x &\mapsto \mathcal{O}_{\phi(x)} \end{aligned}$$

Dimostrazione: Dalla definizione di equivarianza segue che se $y = g \cdot x$ allora $\phi(y) = g \cdot \phi(x)$ e quindi la mappa ϕ è ben definita. □

Lo spazio quoziente M/G è uno spazio topologico con la topologia quoziente (cioè considerando aperti gli insiemi con controimmagine aperta rispetto alla proiezione naturale $x \mapsto \mathcal{O}_x$). È molto naturale chiedersi quando M/G sia anche una varietà differenziabile. La condizione cruciale è quella che garantisce che la topologia quoziente sia di Hausdorff. Il seguente risultato topologico garantisce questa proprietà:

Proposizione 3 *Sia $\sigma : G \times M \to M$ un'azione (almeno continua) di un gruppo di Lie su uno spazio topologico, si indichi con $\sim$ la relazione di equivalenza associata, con M/G lo spazio topologico quoziente e con $\pi : M \to M/G$ la proiezione naturale. Lo spazio M/G è di Hausdorff se e solo se il grafico della relazione di equivalenza*

$$\Gamma = \{(x, y) \in M \times M : x \sim y\}$$

è un sottoinsieme chiuso di $M \times M$.

Dimostrazione: L'insieme Γ è chiuso se e solo se per ogni coppia $(x, y) \notin \Gamma$ (che equivale a $\pi(x) \neq \pi(y)$) esistono due intorni aperti, U_x contenente x e U_y contenente y, tali che $U_x \times U_y \cap \Gamma = \emptyset$ (che equivale a $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$).

Se M/G è di Hausdorff per ogni coppia $(x,y) \notin \Gamma$ esistono in M/G due aperti V_x, V_y distinti e tali che $\pi(x) \in V_x$, $\pi(y) \in V_y$. Siccome π è continua $\pi^{-1}(V_x) \times \pi^{-1}(V_y)$ è un aperto che contiene (x,y) e non interseca Γ, che risulta quindi chiuso.

Se, invece, Γ è chiuso presi due punti distinti $\pi(x), \pi(y) \in M/G$ esistono U_x e U_y tali che $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. Siccome π è aperta $\pi(U_x)$ e $\pi(U_y)$ sono aperti e quindi M/G è di Hausdorff.

Rimane da dimostrare che π è continua e aperta. La continuità segue immediatamente dalla definizione di topologia quoziente, per far vedere che è anche aperta occorre provare che se $U \subset M$ è aperto allora $\pi(U)$ è aperto, cioè che $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_g \sigma_g(U)$ è aperto. Ma questo segue dall'ipotesi che σ_g sia (almeno) un omeomorfismo e dal fatto che l'unione di aperti è un aperto. □

Teorema 4 *Sia $\sigma : G \times M \to M$ un'azione di un gruppo di Lie su una varietà differenziabile, si indichi con $\sim$ la relazione di equivalenza associata, con M/G lo spazio topologico quoziente e con $\pi : M \to M/G$ la proiezione naturale. Lo spazio M/G ha una struttura di varietà differenziabile (di Hausdorff) tale che la proiezione naturale $\pi : M \to M/G$ sia una submersione di classe $\mathcal{C}^\infty$ se e solo se il grafico della relazione di equivalenza*

$$\Gamma = \{(x,y) \in M \times M : x \sim y\}$$

è una sottovarietà chiusa di $M \times M$.

Inoltre, l'applicazione $\phi : M/G \to N$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ se e solo se l'applicazione $\phi \circ \pi : M \to N$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dimostrazione: Si veda ad esempio [1], pagine 262–264. □

Corollario 5 *Se H è un sottogruppo chiuso del gruppo di Lie G allora il quoziente rispetto all'azione per moltiplicazione a sinistra, cioè l'insieme dei laterali destri $H\backslash G = \{Hg : g \in G\}$ ammette un'unica struttura di varietà tale che $\pi : G \to H\backslash G$ sia una submersione. Analoga proprietà vale per l'insieme dei laterali sinistri G/H. Tali varietà sono chiamate* varietà omogenee.

Dimostrazione: Il grafico Γ della relazione di equivalenza è l'insieme

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(g_1,g_2) \in G \times G : \exists h \in H : g_2 = hg_1\} \\ &= \{(g_1,g_2) \in G \times G : g_2 g_1^{-1} \in H\}. \end{aligned}$$

Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \rho : G \times G &\to G \\ (g_1,g_2) &\mapsto g_2 g_1^{-1} \end{aligned}$$

essa è di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché lo sono moltiplicazione e inversione in un gruppo di Lie, inoltre è una submersione infatti per ogni vettore $X_g \in T_g G$:

$$X_g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \rho(1_G, g(t))$$

con $g(0) = g$ e $\dot{g}(0) = X_g$.

Siccome $\Gamma = \rho^{-1}(H)$ per il teorema delle submersioni Γ è una sottovarietà chiusa di $G \times G$. $\square$

Osservazione 5 *Se H è un sottogruppo normale, i due spazi quoziente G/H e $H\backslash G$ sono uguali e hanno la struttura di gruppo di Lie.*

Esempio 10 *Si consideri l'azione di $\mathbb{R}$ su se stesso definita da $\sigma_t(x) = xe^t$. Le orbite di questa azione sono $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$. Siccome l'unico aperto della topologia quoziente che contiene $\{0\}$ è l'intero spazio questa non è di Hausdorff.*

Esempio 11 *Si consideri il gruppo moltiplicativo $G = \mathbb{C} - \{0\}$ e l'azione su $M = \mathbb{C}^n$ data da $\sigma_\lambda(\vec{z}) = \lambda\vec{z}$. Le orbite sono tutte le rette complesse private dell'origine e l'origine stessa. Lo spazio quoziente è dunque*

$$M/G = \mathbb{CP}^{n-1} \cup \{\vec{0}\}\,.$$

Anche in questo caso l'unico aperto nella topologia quoziente che contiene $\{\vec{0}\}$ è l'intero spazio e quindi essa non è di Hausdorff. Se però consideriamo la restrizione dell'azione di G su $\widetilde{M} = \mathbb{C}^n - \{\vec{0}\}$ si ottiene uno spazio quoziente di Hausdorff: $\mathbb{CP}^{n-1}$. Inoltre identificando $\mathbb{C}^k - \{\vec{0}\}$ con la sfera $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$ tramite la proiezione sui vettori di norma uno si ottiene

$$\mathbb{CP}^{n-1} = \widetilde{M}/G = S^{2n-1}/S^1\,.$$

La costruzione della fibrazione di Hopf presentata nell'Esempio 8 è un caso particolare di quanto esposto sopra in cui si ha

$$S^3/S^1 = \mathbb{CP}^1 = S^2\,.$$

Un modo più diretto per controllare che un quoziente sia un varietà è utilizzando il concetto di applicazione propria

Definizione 5 *Un'azione σ di un gruppo di Lie G su di una varietà M si dice* propria *se l'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\sigma} : G \times M & \to & M \times M \\ (g, x) & \mapsto & (x, \sigma(g, x)) \end{array}$$

è propria, cioè tale che la controimmagine di un compatto sia compatta.

Osservazione 6 *Una caratterizzazione alternativa di azione propria è la seguente: data una successione $\{x_n\}$ convergente in M e una successione $\{g_n\}$ in G tale che $\{g_n \cdot x_n\}$ converga in M allora esiste una sottosuccessione di $\{g_n\}$ convergente in G.*

Osservazione 7 *Se G è compatto allora ogni azione di G è propria.*

Osservazione 8 *Se l'azione σ di un gruppo di Lie G è propria allora tutti i sottogruppi di isotropia G_x sono compatti, infatti*

$$G_x \times \{x\} = \tilde{\sigma}^{-1}(x, x)\,.$$

Osservazione 9 *L'applicazione $g \mapsto g \cdot x$ induce un'applicazione*

$$G/G_x \to \mathcal{O}_x \subset M$$

questa applicazione è sempre un'immersione iniettiva e se l'azione è propria l'orbita è una sottovarietà chiusa di M. Quando l'azione è transitiva esiste un'unica orbita e questa applicazione è un diffeomorfismo tra G/G_x e M.

Teorema 6 *Se l'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M è libera e propria allora lo spazio quoziente M/G è una sottovarietà e $\pi : M \to M/G$ è una submersione.*

Dimostrazione: Si veda ad esempio [1], pagina 266. □

1.3 Rappresentazione aggiunta e coaggiunta

Definizione 6 *Dato uno spazio vettoriale V si indica con $\mathfrak{gl}(V)$ l'insieme delle applicazioni lineari $V \to V$ e con $\mathrm{GL}(V)$ il sottoinsieme degli endomorfismi invertibili. Una* rappresentazione di un gruppo di Lie *G su V è un'azione (a sinistra) lineare di G su V. In altri termini è un'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : G & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \sigma_g \end{array}$$

che è un morfismo di gruppi, cioè soddisfa $\sigma_g \sigma_h = \sigma_{gh}$ e $\sigma_{1_G} = \mathbb{I}$, dove $\mathbb{I}$ è l'identità di $\mathrm{GL}(V)$.

Analogamente una rappresentazione di un'algebra di Lie *$\mathfrak{g}$ su V è un'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ X & \mapsto & \rho_X \end{array}$$

che è un morfismo di algebre di Lie, cioè soddisfa $[\rho_X, \rho_Y] = \rho_{[X,Y]}$.

Una rappresentazione (di gruppi o di algebre) si dice fedele *se è iniettiva.*

Definizione 7 *Data una rappresentazione $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ di un gruppo di Lie G è possibile definire una rappresentazione $\sigma^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ sul duale dello spazio vettoriale V tramite la formula*

$$\langle \sigma^*_g \alpha, v \rangle = \langle \alpha, \sigma^*_{g^{-1}} v \rangle\,,$$

dove $\alpha \in V^*$ e $v \in V$.

Analogamente, data una rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è possibile definire una rappresentazione* $\rho^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*)$ *sul duale dello spazio vettoriale* V *tramite la formula*

$$\langle \rho^*_X \alpha, v\rangle = -\langle \alpha, \rho^*_X v\rangle\,,$$

dove $\alpha \in V^*$ *e* $v \in V$.

Queste due rappresentazioni vengono dette rappresentazioni duali *o anche* contragradiente *delle rappresentazioni di partenza.*

Osservazione 10 *La definizione di rappresentazione duale appena data non va confusa con l'usuale definizione del duale* A^* *di un operatore* A *su uno spazio vettoriale tramite la formula* $\langle A^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, Av\rangle$. *Infatti nel caso della rappresentazione di gruppi di Lie* σ^*_g *è il duale dell'operatore* $\sigma_{g^{-1}}$ *e non di* σ_g, *mentre nel caso delle rappresentazioni di algebre di Lie si ha* $\rho^*_X = -(\rho_X)^*$. *La ragione di questa ambiguità di notazione è la richiesta che le rappresentazioni di gruppi e algebre di Lie siano rispettivamente azioni a sinistra e morfismi di algebre di Lie: le definizioni più naturali* $\sigma^*_g = (\sigma_g)^*$ *e* $\rho^*_X = (\rho_X)^*$ *forniscono invece un'azione a destra e un antimorfismo di algebre di Lie.*

Data un'algebra di Lie esiste sempre una rappresentazione molto importante dell'algebra su se stessa:

Definizione 8 *Sia* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *un'algebra di Lie, la sua* rappresentazione aggiunta *è la rappresentazione sullo spazio vettoriale* $\mathfrak{g}$ *definita da* $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$.

Proposizione 7 *La rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *soddisfa le seguenti proprietà*

- $[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] = \mathrm{ad}_{[X,Y]}$, *cioè* ad *è una rappresentazione dell'algebra di Lie;*
- $\mathrm{ad}_X[Y, Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z]$, *cioè* ad_X *è una derivazione dell'algebra di Lie;*
- $\mathrm{ad}_{AX} = A\mathrm{ad}_X A^{-1}$ *se* A *è un automorfismo di* $\mathfrak{g}$*;*
- $\mathrm{ad}_{DX} = [D, \mathrm{ad}_X]$ *se* D *è una derivazione di* $\mathfrak{g}$*;*
- $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g})$ *e quindi* ad *è fedele se e solo se il centro dell'algebra di Lie è* $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Dimostrazione: Utilizzando l'identità di Jacobi si ricava

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) &= \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y Z - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X Z \\ &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= [[X,Y],Z] = \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z)\,.\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_X[Y,Z] &= [X,[Y,Z]] \\ &= [Y,[X,Z]] + [[X,Y],Z] \\ &= [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z] \,.\end{aligned}$$

Se A è un automorfismo di $\mathfrak{g}$, cioè se $A[X,Y] = [AX, AY]$ si ha

$$\mathrm{ad}_{AX} Y = [AX, Y] = A[X, A^{-1}Y] = (A\mathrm{ad}_X A^{-1})Y \,.$$

Se D è una derivazione di $\mathfrak{g}$, cioè se $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$ si ha

$$(D\mathrm{ad}_X - \mathrm{ad}_X D)Y = D[X,Y] - [X,DY] = [DX,Y] = \mathrm{ad}_{DX} Y \,.$$

Infine dalla definizione di nucleo di una funzione e di centro di un'algebra di Lie

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_X Y = 0, \ \ \forall Y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g}) \,.$$

□

Come è noto l'algebra di Lie di un gruppo di Lie è l'algebra dei campi vettoriali invarianti a sinistra, cioè tali che $(L_h)_* X = X$, dove ϕ_* indica il push-forward rispetto al diffeomorfismo ϕ. Posto $I_g(k) = gkg^{-1}$, un semplice calcolo mostra che se X è invariante a sinistra anche $(I_g)_* X$ è invariante a sinistra:

$$L_h(I_g(k)) = hgkg^{-1} = g(g^{-1}hg)kg^{-1} = I_g(L_{g^{-1}hg}(k))$$

e quindi, utilizzando le proprietà del push-forward (per le quali si rimanda all'appendice)

$$(L_h)_*(I_g)_* X = (L_h I_g)_* X = (I_g)_*(L_{g^{-1}hg})_* X = (I_g)_* X \,.$$

La seguente definizione è dunque ben data:

Definizione 9 *Dato un gruppo di Lie G con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, l'applicazione* Ad *definita come*

$$\mathrm{Ad}_g X = (I_g)_* X \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

associa ad ogni elemento del gruppo un'applicazione lineare $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e prende il nome di rappresentazione aggiunta *del gruppo di Lie G.*

Osservazione 11 *Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ può essere equivalentemente considerato un elemento dello spazio tangente nell'identità al gruppo G. Da questo punto di vista $\mathrm{Ad}_g X$ risulta l'applicazione su X del differenziale dell'applicazione $I_g : G \to G$ calcolato in 1_G.*

Il nome dato all'applicazione Ad è giustificato dal seguente risultato:

Proposizione 8 *Dato un gruppo di Lie G con algebra $\mathfrak{g}$, la mappa* Ad *manda G in* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *ed è un morfismo di gruppi, cioè*

$$\mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h = \mathrm{Ad}_{gh}\,.$$

Quindi definisce una rappresentazione di G sulla sua algebra di Lie.

Inoltre, per ogni $g \in G$, l'applicazione Ad_g *è un'automorfismo di $\mathfrak{g}$, cioè*

$$\mathrm{Ad}_g[X, Y] = [\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]\,.$$

Dimostrazione: Siccome $\mathrm{Ad}_g = (I_g)_*$ e $I_{gh} = I_g I_h$, per le proprietà del push-forward

$$\mathrm{Ad}_{gh} = (I_{gh})_* = (I_g)_*(I_h)_* = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h$$

ed inoltre $\mathrm{Ad}_{1_G} = (I_{1_G})_* = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}$. Il fatto che Ad_g sia invertibile è una conseguenza immediata. Infine, poiché per ogni diffeomorfismo ϕ si ha $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$, vale

$$\mathrm{Ad}_g[X, Y] = (I_g)_*[X, Y] = [(I_g)_* X, (I_g)_* Y] = [\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]\,.$$

□

Definizione 10 *Posto $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ e indicando con ϕ^* il pull-back attraverso la mappa ϕ, le rappresentazioni duali di* ad *e* Ad *definite da*

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}^*_X \alpha, Y\rangle &= -\langle \alpha, \mathrm{ad}_X Y\rangle = \langle \alpha, [Y, X]\rangle \\
\langle \mathrm{Ad}^*_g \alpha, Y\rangle &= \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y\rangle = \langle \alpha, (I_g)^* Y\rangle
\end{aligned}$$

sono chiamate rappresentazione coaggiunta*, rispettivamente dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e del gruppo di Lie G.*

Proposizione 9 *Dati $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ valgono le relazioni:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y = \mathrm{ad}_X Y\,; \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)} \alpha = \mathrm{ad}^*_X \alpha\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione: Si ricordi innanzitutto che per il commutatore di due campi vettoriali vale la proprietà

$$[X, Y] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \phi^*_t Y$$

dove ϕ_t è il flusso di X e ϕ^*_t indica il pull-back.

Nel caso particolare in cui X e Y sono campi invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G, per la definizione della mappa esponenziale il flusso ϕ_t di X soddisfa

$$\phi_t(h) = h\exp(tX) = R_{\exp(tX)}(h)\,,$$

e quindi, ponendo $g = \exp(tX)$ e usando il fatto che $Y = (L_g)_*Y$ per l'invarianza a sinistra, si ha

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (R_g)^*Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (R_{g^{-1}})_*Y \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (R_{g^{-1}}\circ L_g)_*Y \end{aligned}$$

Ma siccome $I_g = R_{g^{-1}}\circ L_g$ e $\mathrm{Ad}_gY = (I_g)_*Y$ si ottiene

$$\mathrm{ad}_XY = [X,Y] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (I_g)_*Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}Y\,.$$

Infine dalle definizioni delle rappresentazioni duali segue:

$$\langle \mathrm{ad}^*_X\alpha, Y\rangle = -\langle\alpha, \mathrm{ad}_XY\rangle = -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \langle\alpha, \mathrm{Ad}_gY\rangle = \langle \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}^*_g\alpha, Y\rangle\,.$$

□

Osservazione 12 *Per comprendere il significato e le conseguenze dell'importante relazione (1.1) occorre tenere presenti alcune cose:* $\gamma(t) = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$ *è una curva nel gruppo di Lie* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *passante per* $\mathbb{I}$*, mentre* ad_X *è un elemento della sua algebra di Lie* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*. Inoltre* $\gamma(t)$ *soddisfa*

$$\begin{aligned} \gamma(t)\gamma(s) &= \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\mathrm{Ad}_{\exp(sX)} = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)\exp(sX)} \\ &= \mathrm{Ad}_{\exp((s+t)X)} = \gamma(t+s) \end{aligned}$$

e quindi può essere interpretata come $\gamma(t) = \phi_t(1_G)$ *dove* ϕ_t *è un flusso.*

La (1.1) può dunque essere interpretata in due modi: da un lato stabilisce che il flusso ϕ_t *è il flusso di* ad_X *pensato come campo invariante a sinistra su* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$*, dall'altro che l'applicazione* $\mathrm{Ad}: G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *ha come differenziale l'applicazione* $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *tra gli spazi tangenti nell'identità ai due gruppi.*

Esempio 12 (Orbite coaggiunte) *Data la rappresentazione coaggiunta*

$$\begin{aligned} G &\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}^*(g) \end{aligned}$$

si possono considerare le sue orbite $\mathcal{O}_\eta$*,* $\eta\in\mathfrak{g}^*$*, dette* orbite coaggiunte*. Le orbite coaggiunte hanno importanti proprietà geometriche ed includono spazi come le varietà di bandiera complesse: nel caso classico si ottengono per* $G = \mathrm{SU}(n)$*,* *in senso generalizzato per G gruppo di Lie semisemplice compatto (si veda la Sezione 3.2). Si noti che la Proposizione 9 implica che lo spazio tangente all'orbita $\mathcal{O}_\eta$ nel punto η è dato da*

$$T_\eta \mathcal{O}_\eta = \{\mathrm{ad}^*_X \eta : X \in \mathfrak{g}\}\,.$$

La seguente proposizione lega tra loro rappresentazione aggiunta di gruppo G, quella della sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e la mappa esponenziale:

Proposizione 10 *Se G è un gruppo di Lie con algebra $\mathfrak{g}$ allora $\forall g \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g}$*

$$\exp(\mathrm{Ad}_g X) = I_g(\exp(X)) \tag{1.3}$$
$$\mathrm{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\mathrm{ad}_X) \tag{1.4}$$

Dimostrazione: L'identità (1.3) si ottiene ricordando che se ϕ_t è il flusso di un campo X allora il flusso del push-forward di X attraverso un diffeomorfismo ψ è $\hat{\phi}_t = \psi \circ \phi_t$. Per definizione $\exp tX$ ed $\exp(t\mathrm{Ad}_g X)$ si ottengono applicando rispettivamente il flusso ϕ_t del campo X e $\hat{\phi}_t$ del campo $\hat{X} = \mathrm{Ad}_g X = (I_g)_* X$ all'identià del gruppo. Si ha quindi

$$\exp(t\mathrm{Ad}_g X) = \hat{\phi}_t(1_G) = I_g(\phi_t(1_G)) = I_g(\exp tX)$$

e ponendo $t = 1$ si ottiene la tesi.

L'identità (1.4) è una riscrittura della relazione (1.1). Questa relazione, infatti, stabilisce che la curva sul gruppo di Lie $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ definita da $\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$ è il flusso calcolato nell'identità di ad_X, pensato come campo invariante a sinistra su $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Ma il flusso ϕ_t di un elemento $\hat{X}$ dell'algebra di un gruppo di Lie $\hat{G}$ è legato alla mappa esponenziale dalla relazione

$$\phi_t(1_{\hat{G}}) = \exp(t\hat{X})\,,$$

ponendo quindi $\hat{X} = \mathrm{ad}_X$ e $t = 1$ si ottiene la tesi. □

Attraverso la rappresentazione aggiunta è possibile definire su ogni algebra di Lie una forma bilineare simmetrica:

Definizione 11 *Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, di dimensione finita, la forma bilineare simmetrica*

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$$

prende il nome di forma di Killing.

Osservazione 13 *La forma di Killing è ben definita perché* ad_X *e* ad_Y *sono un operatori lineare e quindi è possibile calcolarne il prodotto e la traccia. Inoltre la forma di Killing è simmetrica perché* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Proposizione 11 *La forma di Killing $(\cdot, \cdot)$ su di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ soddisfa le seguenti proprietà:*

- $(AX, AY) = (X, Y)$ *se* A *è un automorfismo di* $\mathfrak{g}$*;*
- *in particolare* $(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) = (X, Y)$*;*
- $(DX, Y) = -(X, DY)$ *se* D *è una derivazione di* $\mathfrak{g}$*;*
- *in particolare* $(\mathrm{ad}_X Y, Z) = -(Y, \mathrm{ad}_X Z)$*;*

Dimostrazione: Se A è un automorfismo di $\mathfrak{g}$, per la Proposizione 7 si ha $\mathrm{ad}_{AX} = A\mathrm{ad}_X A^{-1}$ e quindi

$$(AX, AY) = \mathrm{Tr}(A\mathrm{ad}_X A^{-1} A\mathrm{ad}_Y A^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y A^{-1} A) = (X, Y)\,.$$

Se, invece, D è una derivazione di $\mathfrak{g}$, per la Proposizione 7 si ha $\mathrm{ad}_{DX} = D\mathrm{ad}_X - \mathrm{ad}_X D$ e quindi

$$\begin{aligned}(DX, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{DX}\mathrm{ad}_Y) &= \mathrm{Tr}(D\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_X D\mathrm{ad}_Y)\\ &= -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X D\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y D)\\ &= -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_{DY}) = -(X, DY)\,.\end{aligned}$$

I casi particolari si ricavano ricordando che ad_X è una derivazione e Ad_g un automorfismo di $\mathfrak{g}$. □

Corollario 12 *La forma di Killing* $(\cdot,\cdot)$ *su di un'algebra di Lie* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *soddisfa l'identità*

$$([X, Y], Z) = ([Z, X], Y) = ([Y, Z], X) \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}\,.$$

Dimostrazione: Utilizzando l'identità $(\mathrm{ad}_X Y, Z) = -(Y, \mathrm{ad}_X Z)$ si ottiene

$$([X, Y], Z) = (\mathrm{ad}_X Y, Z) = -(Y, \mathrm{ad}_X Z) = ([Z, X], Y)$$

e permutando ulteriormente si ricava la tesi. □

Osservazione 14 *Il fatto che la forma di Killing soddisfi* $(DX, Y) = -(X, DY)$ *se* D *è una derivazione di* $\mathfrak{g}$ *è una caratteristica di tutte le forme bilineari* $B(\cdot,\cdot)$ *invarianti per automorfismi dell'algebra di Lie, cioè tali che se* A *è un automorfismo di* $\mathfrak{g}$ *allora*

$$B(AX, AY) = B(X, Y)\,.$$

Infatti si può mostrare che se D *è una derivazione* $\exp(tD)$ *è un automorfismo (questo fatto è una generalizzazione di quanto provato nella Proposizione 10) e quindi dall'invarianza per automorfismi si ottiene:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 B(\exp(tD)X, \exp(tD)Y) = 0 \Longrightarrow B(DX, Y) + B(X, DY) = 0\,.$$

L'importanza della forma di Killing è anche data dai seguenti *Criteri di Cartan*:

Proposizione 13 *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se gli elementi di $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ sono ortogonali a tutti gli elementi di $\mathfrak{g}$ rispetto alla sua forma di Killing.*

Proposizione 14 *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenere.*

1.4 Derivata di un'azione

Definizione 12 *Se $\sigma : G \times M \to M$ è un'azione, la sua derivata è l'applicazione $\dot\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ che associa ad ogni elemento $X \in \mathfrak{g}$ il campo vettoriale $\dot\sigma_X = \dot\sigma(X)$ definito da:*

$$(\dot\sigma_X)_x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \exp(-tX)\cdot x\,,$$

o equivalentemente dalla relazione

$$\dot\sigma_X(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\sigma_{\exp(-tX)}\,.$$

Osservazione 15 *Dalla definizione segue che il flusso di $\dot\sigma_X$ è $\sigma_{\exp(-tX)}$.*

Proposizione 15 *Data un'azione $\sigma : G \times M \to M$ il push-forward del campo $\dot\sigma_X$ attraverso il diffeomorfismo σ_g soddisfa la relazione*

$$\dot\sigma(\mathrm{Ad}_g X) = (\sigma_g)_*\dot\sigma_X \tag{1.5}$$

Dimostrazione: Ricordando che il push-forward $\phi_* Y$ del campo vettoriale Y attraverso il diffeomorfismo ϕ è definito in modo che

$$Y(f)\circ\phi^{-1} = (\phi_* Y)(f\circ\phi^{-1})$$

si ottiene

$$[\dot\sigma_X(f\circ\sigma_g)]\circ\sigma_{g^{-1}} = (\sigma_g)_*[\dot\sigma_X(f\circ\sigma_g)] = [(\sigma_g)_*\dot\sigma_X](f)\,. \tag{1.6}$$

Ma dalla definizione di azione derivata e dalla proprietà (1.3) si ricava

$$\begin{aligned}
[\dot\sigma_X(f\circ\sigma_g)]\circ\sigma_{g^{-1}} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\sigma_g\circ\sigma_{\exp(-tX)}\circ\sigma_{g^{-1}}\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\sigma_{g\exp(-tX)g^{-1}}\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f\circ\sigma_{\exp(-t\mathrm{Ad}_g X)}\\
&= [\dot\sigma(\mathrm{Ad}_g X)](f)
\end{aligned}$$

confrontando con l'identità (1.6) si ha la tesi. □

Proposizione 16 *Data un'azione $\sigma : G \times M \to M$ la sua derivata è un morfismo di algebre di Lie, cioè vale*

$$[\dot\sigma_X, \dot\sigma_Y] = \dot\sigma_{[X,Y]}$$

Dimostrazione: Si ricordi che per il commutatore di due campi vettoriali vale la proprietà

$$[X,Y] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \phi_t^* Y \tag{1.7}$$

dove ϕ_t è il flusso di X e ϕ_t^* indica il pull-back.

Sostituendo $g = \exp(tX)$ nell'equazione (1.5) si ha

$$\dot\sigma(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y) = \left[\sigma_{\exp(tX)}\right]_* \dot\sigma_Y = \left[\sigma_{\exp(-tX)}\right]^* \dot\sigma_Y \,. \tag{1.8}$$

Siccome $\sigma_{\exp(-tX)}$ è il flusso di $\dot\sigma_X$ e quindi per la (1.7)

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left[\sigma_{\exp(-tX)}\right]^* \dot\sigma_Y = [\dot\sigma_X, \dot\sigma_Y]\,,$$

derivando l'uguaglianza (1.8) e applicando la relazione (1.1) si ottiene

$$\dot\sigma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left[\sigma_{\exp(-tX)}\right]^* \dot\sigma_Y \implies \dot\sigma\Big([X,Y]\Big) = [\dot\sigma_X, \dot\sigma_Y]\,.$$

□

Osservazione 16 *Il segno negativo nella definizione di $\dot\sigma$ è scelto in modo che che la derivata di un'azione sia un morfismo di algebre di Lie, anziché un antimorfismo.*

Proposizione 17 *Data un'azione $\sigma : G \times M \to M$ lo spazio tangente alle orbite e l'algebra del gruppo di isotropia sono date da:*

$$T_x\mathcal{O}_x = \{\dot\sigma(X)_x : X \in \mathfrak{g}\}$$
$$\mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} : \dot\sigma(X) = 0\}\,.$$

Dimostrazione: La prima identità segue direttamente dalla definizione di derivata dell'azione, infatti $\dot\sigma(X)_x$ è il vettore tangente alla curva su M prodotta dall'azione del sottogruppo a 1-parametro $\exp(-tX)$ di G. Analogamente, siccome ogni elemento del sottogruppo di isotropia G_x lascia fisso il punto x, i vettori tangenti alle curve generate dall'azione di ogni sottogruppo a 1-parametro di G_x sono nulli, e quindi anche la seconda uguaglianza è provata. □

Esempio 13 *Si consideri* $\mathbb{R}^n$ *con coordinate cartesiane* x_i *e si definisca l'azione delle traslazioni come*

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\vec{v}, \vec{x}) & \mapsto & \vec{x} + \vec{v} \end{array}$$

l'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n$ *è ancora* $\mathbb{R}^n$, *con* $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$, *e vale* $\exp(t\vec{X}) = t\vec{X}$. *Allora la derivata dell'azione è data da*

$$\dot{\tau}_{\vec{X}}(f)|_{\vec{x}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(\vec{x} - t\vec{X}) = -\textstyle\sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \,.$$

Quindi $\dot{\tau}_{\vec{X}} = -\sum_i X_i \partial_i$.

Esempio 14 *Si consideri l'azione delle rotazioni su* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{array}{rcl} \rho : O(3) \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (O, \vec{x}) & \mapsto & O\vec{x} \end{array}$$

L'algebra di Lie del gruppo ortogonale è generata dalle tre matrici antisimmetriche

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e i commutatori si ottengono permutando ciclicamente $[E_1, E_2] = E_3$.

L'esponenziale delle tre matrici è definito da

$$\begin{array}{rcl} \exp(tE_1) \cdot \vec{x} & = & (x\cos(t) + y\sin(t), y\cos(t) - x\sin(t), 0) \\ \exp(tE_2) \cdot \vec{x} & = & (x\cos(t) - z\sin(t), 0, z\cos(t) + x\sin(t)) \\ \exp(tE_3) \cdot \vec{x} & = & (0, y\cos(t) + z\sin(t), z\cos(t) - y\sin(t)) \end{array}$$

e quindi l'azione derivata si ricava da

$$\begin{array}{rcl} \dot{\rho}_{E_1}(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(x\cos(t) - y\sin(t), y\cos(t) + x\sin(t), 0) & = & x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \\ \dot{\rho}_{E_2}(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(x\cos(t) + z\sin(t), 0, z\cos(t) - x\sin(t)) & = & z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z} \\ \dot{\rho}_{E_3}(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(0, y\cos(t) - z\sin(t), z\cos(t) + y\sin(t)) & = & y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} \end{array}$$

e dunque

$$\dot{\rho}_{E_1} = x\partial_y - y\partial_x \quad \dot{\rho}_{E_2} = z\partial_x - x\partial_z \quad \dot{\rho}_{E_3} = y\partial_z - z\partial_y \,.$$

Si osservi che, come previsto, questi campi vettoriali soddisfano le stesse regole di commutazione di E_1, E_2 *e* E_3.

Esempio 15 *Si consideri l'azione aggiunta* Ad *di un gruppo di Lie G sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$. La derivata di questa azione è per definizione*

$$\dot{\mathrm{Ad}}_X Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_{\exp(-tX)} Y\,,$$

dalla relazione (1.1) segue dunque che $\dot{\mathrm{Ad}}_X = -\mathrm{ad}_X$.

A prima vista sembra esservi un'incongruenza tra il fatto che

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] = \mathrm{ad}_{[X,Y]} \tag{1.9}$$

e la Proposizione 16 che nel caso specifico può essere riscritta come

$$[-\mathrm{ad}_X, -\mathrm{ad}_Y] = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] = -\mathrm{ad}_{[X,Y]} \tag{1.10}$$

Non è però così: infatti nella formula (1.9) il commutatore considerato è quello tra operatori lineari su $\mathfrak{g}$, in (1.10) invece ad_X e ad_Y sono considerati come campi vettoriali su $\mathfrak{g}$ e il commutatore è quello delle corrispondenti derivazioni. Ora ad ogni operatore lineare A su uno spazio vettoriale V si può associare il campo vettoriale $v \mapsto (v, Av)$ che con un abuso di notazione si indica ancora con A. Il valore di questo campo vettoriale nel punto v è il vettore tangente alla curva $v + tAv$ e la derivazione corrispondente soddisfa

$$\Big(A(f)\Big)(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(v + tAv)\,.$$

Indicando ora con $[\cdot,\cdot]_O$ il commutatore di operatori lineari e con $[\cdot,\cdot]_D$ il commutatore di derivazioni si ha

$$[A, B]_D = -[A, B]_O$$

infatti

$$\begin{aligned}
\Big([A,B]_D(f)\Big)(v) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \Big(B(f)\Big)(v + tAv) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \Big(A(f)\Big)(v + sBv) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 f(v + tAv + sBv + stBAv) \\
&\quad - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 f(v + tAv + sBv + stABv)] \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_0 f(v + [B, A]v) = \Big([B, A]_O(f)\Big)(v)\,.
\end{aligned}$$

Le formule (1.9) e (1.10) si interpretano dunque come

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{ad}_X, ad_Y]_O = \mathrm{ad}_{[X,Y]} \\
&[\dot{\mathrm{Ad}}_X, \dot{\mathrm{Ad}}_Y]_D = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]_D = -\mathrm{ad}[X, Y] = \dot{\mathrm{Ad}}_{[X,Y]}
\end{aligned}$$

e non vi è contraddizione essendo $[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]_O = -[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]_D$.

Esempio 16 (Orbite coaggiunte) *Si consideri la rappresentazione coaggiunta su un gruppo di Lie e un'orbita* $\mathcal{O}_\eta$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$ *(cfr. Esempio 12). L'algebra di Lie del sottogruppo di isotropia* G_η *è data da*

$$\mathfrak{g}_\eta = \{X \in \mathfrak{g} : \dot{\mathrm{Ad}}^*_X \eta = 0\} = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}^*_X \eta = 0\}\,,$$

e quindi usando la definizione di azione coaggiunta

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\eta &= \{X \in \mathfrak{g} : \langle \mathrm{ad}^*_X \eta, Y\rangle = 0\,, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} : \langle \eta, [X, Y]\rangle = 0\,, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}\,. \end{aligned}$$

Capitolo 2

Geometria simplettica

2.1 Spazi vettoriali simplettici

Definizione 13 *Si consideri un spazio vettoriale reale V di dimensione finita. Un'applicazione bilineare antisimmetrica (2-forma) ω su V e un sottospazio vettoriale $W \subset V$. Il* complemento simplettico *di W è il sottospazio vettoriale*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega(v, w) = 0\,, \ \ \forall w \in W\}\,.$$

Definizione 14 *La 2-forma ω definita sullo spazio vettoriale V si dice* non degenere *se $V^{\perp} = \{0\}$ o, equivalentemente se la matrice che rappresenta ω rispetto ad una base in V è invertibile.*

Uno spazio vettoriale V su cui sia definita una 2-forma ω non degenere si dice spazio vettoriale simplettico *e la forma ω prende il nome di* forma simplettica.

In uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ una base simplettica *è una base $\{e_i\}$ con base duale $\{e^i\}$ in cui la forma simplettica assume la forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge e^{i+n}\,.$$

Osservazione 17 *Siccome una matrice antisimmetrica A con un numero dispari di righe ha sempre determinante nullo, poiché $\det(A) = \det(A^{\mathrm{t}}) = -\det(A)$, la dimensione di uno spazio vettoriale simplettico è necessariamente pari.*

Osservazione 18 *Così come avviene utilizzando un prodotto scalare anche utilizzando una forma simplettica è possibile definire un isomorfismo tra un spazio vettoriale e il suo duale che non dipenda dalla base scelta. Nel caso simplettico questo isomorfismo di spazi vettoriali è dato da*

$$\begin{array}{rcl} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & i_v\omega\,, \end{array}$$

dove $(i_v\omega)(u) = \omega(v, u)\,, \quad \forall u \in V$.

Esempio 17 *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^{2n}$ *e se ne indichino gli elementi con* $\vec{z} = (\vec{x}, \vec{y})$. *La forma bilineare antisimmetrica*

$$\omega(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 - \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1$$

è non degenere e definisce una forma simplettica detta forma simplettica standard di $\mathbb{R}^{2n}$.

Esempio 18 *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{C}^n$, *si indichino i suoi elementi con* $\vec{z} = \vec{x} + i\vec{y}$ *e i loro complessi coniugati con* $\vec{z}^*$. *La formula*

$$\omega(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \Im(\vec{z}_1 \vec{z}_2^*)\,,$$

dove $\Im$ *indica la parte immaginaria, definisce una forma simplettica (a valori reali). Questa forma coincide con la forma simplettica standard di* $\mathbb{R}^{2n}$ *(identificato con* $\mathbb{C}^n$ *nel modo ovvio) e viene detta* forma simplettica standard di $\mathbb{C}^n$.

Un risultato molto importante per gli spazi vettoriali simplettici, che ha un analogo nel caso delle varietà simplettiche, è l'esistenza di una forma canomica per la forma simplettica. Questo, in particolare, implica che tutti gli spazi vettoriali simplettici ammettono una base simplettica e che gli spazi vettoriali simplettici con la stessa dimensione siano tutti equivalenti tra loro.

Teorema 18 *Se* ω *è una 2-forma non nulla (ma non necessariamente non degenere) su uno spazio vettoriale* V *di dimensione* m *allora esiste una base* $\{e_i\}$ *di* V *con base duale* $\{e^i\}$ *tale che*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^{i+n} \wedge e^i$$

dove $2n$ *è il rango di* ω.

Dimostrazione: Siccome ω non è nulla esistono due vettori f_1 e f_2, linearmente indipendenti, tali che $\omega(f_2, f_1) = 1$. Si consideri il sottospazio generato da questi due vettori: $P_1 = \mathrm{span}\langle f_1, f_2\rangle$. Siccome P_1 è bidimensionale e ω è non nulla la sua restrizione su P_1 è non degenere e quindi posto $V_1 = P_1^{\perp}$ si ha $P_1 \cap V_1 = \{0\}$ da cui $V = P_1 \oplus V_1$ con la decomposizione $v = v_1 + v_2$ data da

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(v, f_1) f_2 - \omega(v, f_2) f_1 \\ v_2 &= v - v_1 \end{aligned}$$

Si hanno ora due casi: se $\omega|_{V_1} = 0$ la tesi è verificata in quanto $\omega = f^2 \wedge f^1$, se invece $\omega|_{V_1} \neq 0$ si può iterare il processo. Esisteranno infatti due vettori f_3 e f_4 in V_1, linearmente indipendenti e tali che $\omega(f_4, f_3) = 1$; definiti allora $P_2 = \mathrm{span}\langle f_3, f_4\rangle$ e $V_2 = (P_1 \oplus P_2)^{\perp}$ si ha $V = P_1 \oplus P_2 \oplus V_2$. Continuando in questo modo in un numero finito di passi si trova un n tale che ω si annulla su V_n, esistono $2n$ vettori $\{f_{2j-1}, f_{2j}\}$ linearmente indipendenti e tali che $\omega(f_{2i}, f_{2j-1}) = \delta_{ij}$ e vale

$$V = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n \oplus V_n\,.$$

Scegliendo allora $e_j = f_{2j-1}$, $e_{j+n} = f_{2j}$ e $e_{2n+1}, \dots, e_m$ una base di V_n si ottiene la tesi. □

Corollario 19 *Il rango di una 2-forma è sempre pari e in particolare 2-forme non degeneri esistono solo su spazi vettoriali di dimensione pari.*

Definizione 15 *Un* isomorfismo simplettico *tra due spazi vettoriali simplettici è un isomorfismo di spazi vettoriali $T : (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_2)$ tale che*

$$\omega_2(Tu, Tv) = \omega_1(u, v)\,, \quad \forall u, v \in V_1\,.$$

Gli automorfismi simplettici di uno spazio vettoriale simplettico (V, ω) formano un gruppo detto gruppo simplettico *e indicato con $Sp(V, \omega)$. In particolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica standard viene indicato con $Sp(2n, \mathbb{R})$.*

Osservazione 19 *Il Teorema 18 implica che tra spazi vettoriali simplettici della stessa dimensione esiste sempre un isomorfismo simplettico. Basta infatti fissare una base simplettica in ciascuno spazio e associare ad ogni vettore nel primo spazio il vettore con uguali componenti nel secondo spazio. In particolare uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ è simpletticamente isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica canonica.*

Proposizione 20 *Se (V, ω) è uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ e U, W sono suoi sottospazi allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;
2. $(W^\perp)^\perp = W$;
3. $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$;
4. $\omega|_W$ *non degenere* $\iff W \cap W^\perp = \{0\} \iff V = W \oplus W^\perp$.

Dimostrazione: La proprietà 1 si ottiene considerando l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \Omega : V & \to & W^* \\ v & \mapsto & \omega(v, \cdot)|_W \end{array}$$

il nucleo di Ω è

$$\operatorname{Ker} \Omega = \{v \in V : \omega(v, w) = 0\,,\ \forall w \in W\} = W^\perp$$

e inoltre Ω è suriettiva. Infatti se $k = \dim W$ scelta una base $\{e_1, \dots, e_k\}$ di W e completatala ad una base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ di V ad ogni applicazione $\alpha \in W^*$ corrisponde un'estensione $\hat{\alpha} \in W^*$ definita da

$$\hat{\alpha}(e_i) = \begin{cases} \alpha(e_i) & i \le k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

e siccome ω è non degenere ad $\hat{\alpha}$ corrisponde un unico elemento $v \in V$ tale che $\forall u \in V$ si abbia $\hat{\alpha}(u) = \omega(v, u)$ e quindi $\Omega(v) = \alpha$. Dalla relazione $\dim \operatorname{Ker} \Omega + \dim \operatorname{Im} \Omega = \dim V$ segue la proprietà 1.

Dalla definizione di $W^\perp$ si ricava che se $w \in W$ allora $\forall u \in W^\perp$ vale $\omega(u, w) = 0$ e quindi $w \in (W^\perp)^\perp$. Ma dalla proprietà 1 si ha che

$$\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim W$$

e quindi $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ implica la proprietà 2.

Per quanto riguarda la proprietà 3 si procede in due passi: sia $U \subseteq W$, $v \in W^\perp$ implica $\omega(v, w) = 0$ $\forall w \in W$ allora in particolare $\forall u \in U \subseteq W$ vale $\omega(v, u) = 0$ percui $v \in U^\perp$. D'altro canto sia $W^\perp \subseteq U^\perp$, $u \in U$ implica $\omega(u, v) = 0$ $\forall v \in U^\perp$ allora in particolare $\forall \hat{v} \in W^\perp \subseteq U^\perp$ vale $\omega(u, \hat{v}) = 0$ per cui $u \in (W^\perp)^\perp = W$.

Infine il fatto che ω sia non degenere quando ristretta ai soli vettori di W è equivalente a chiedere che $u \in W$ soddisfa $\omega(u, w) = 0$ $\forall w \in W$ solo se $u = 0$ e cioè che l'unico vettore di W che appartiene anche a $W^\perp$ è il vettore nullo. Per la proprieà 1 il fatto che $W \cap W^\perp = \{0\}$ è equivalente al fatto che $V = W \oplus W^\perp$ perché in questo caso $\dim(W \oplus W^\perp) = \dim V$. □

Definizione 16 *Un sottospazio W di uno spazio vettoriale simplettico (V, ω) si dice:*

- isotropo *se $W \subseteq W^\perp$, cioè se $\omega|_W = 0$;*
- coisotropo *se $W^\perp \subseteq W$;*
- lagrangiano *se è sia isotropo che coisotropo, cioè se $W = W^\perp$.*

Proposizione 21 *Se W è isotropo allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$, se è coisotropo $\dim W \geq \frac{1}{2} \dim V$ e quindi se W è lagrangiano $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$.*

Dimostrazione: Dalla proprietà 1 della Proposizione 20 si deduce che se W è isotropo e quindi $\dim W \leq \dim W^\perp$ allora

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp \geq 2 \dim W\,,$$

mentre se W è coisotropo e quindi $\dim W \geq \dim W^\perp$ vale

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp \leq 2 \dim W\,.$$

□

2.2 Varietà simplettiche

Definizione 17 *Una coppia* (M, ω)*, con* M *varietà di dimensione pari e* ω *2-forma, è detta* varietà simplettica *se*

- ω_x *è non degenere sullo spazio tangente* $T_x M$*, per ogni* $x \in M$*;*
- ω *è chiusa:* $\mathrm{d}\omega = 0$.

Esempio 19 *Ogni spazio vettoriale simplettico con la struttura di varietà naturale è una varietà simplettica, in particolare* $\mathbb{R}^{2n}$ *con le coordinate cartesiane* x_i, y_i *e la struttura simplettica canonica*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}x_i \, .$$

Esempio 20 *Si consideri la sfera* S^2 *immersa in* $\mathbb{R}^3$ *e il suo spazio tangente in ogni punto:*

$$S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\vec{x}|| = 1\} \quad T_{\vec{x}} S^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : v \cdot x = 0\}$$

Definisco la 2-forma ω *con il prodotto misto, ponendo*

$$\omega_{\vec{x}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{x}$$

questa forma è chiaramente di classe $\mathcal{C}^\infty$ *ed è non degenere su ogni* $T_{\vec{x}} S^2$ *poiché essendo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *ortogonali a* $\vec{x}$ *il prodotto misto si annulla solo quando* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sono paralleli. Infine su di una varietà bidimensionale tutte le 2-forme sono chiuse, per cui* ω *definisce una struttura simplettica su* S^2*.*

Se considero le coordinate cilindriche (r, θ, h) *in* $\mathbb{R}^3$ *allora per ogni punto sulla sfera (escluse le intersezioni con l'asse verticale) vale*

$$\begin{cases} x &= \sqrt{1-h^2}\cos\theta \\ y &= \sqrt{1-h^2}\sin\theta \\ z &= h \end{cases}$$

e di conseguenza, derivando, il vettore tangente $\dot{h}\frac{\partial}{\partial h} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$ *ha componenti*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{h\dot{h}}{\sqrt{1-h^2}}\cos\theta - \sqrt{1-h^2}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} &= -\frac{h\dot{h}}{\sqrt{1-h^2}}\sin\theta + \sqrt{1-h^2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} &= \dot{h} \end{cases}$$

quindi posto $\vec{u} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial h} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \theta}$ *e* $\vec{v} = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial h} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \theta}$ *la forma simplettica è data da*

$$\omega_{\vec{x}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 = (\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}\theta)(\vec{u}, \vec{v})$$

e quindi $\omega = \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}\theta$*.*

Esempio 21 *Ogni varietà bidimensionale orientata è una varietà simplettica considerando la forma volume, quest'ultima infatti è per definizione non degenere ed è chiusa perché la varietà è bidimensionale.*

Un esempio particolarmente importante di varietà simplettica è il fibrato cotangente di una qualsiasi varietà, si osservi che siccome un fibrato cotangente è necessariamente non compatto non tutte le varietà simplettiche sono fibrati cotangenti.

Esempio 22 *Sia Q una varietà differenziabile, sul suo fibrato cotangente T^*Q esiste una 1-forma detta* tautologica *definita nel seguente modo.*

$$\begin{tikzcd}
T(T^*Q) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"] & T^*Q \arrow[d, "\pi"] \\
TQ \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

Una 1-forma θ su T^*Q è un'applicazione che associa ad ogni elemento $(q, \alpha_q) \in T^*Q$ un'applicazione $\theta_{(q,\alpha_q)} : T_{(q,\alpha_q)}(T^*Q) \to \mathbb{R}$. Se $X \in T(T^*Q)$ e si indica la sua immagine attraverso π_* con $\pi_*(X) = (q, \pi_a st X_q)$ allora la 1-forma tautologica è definita ponendo

$$\theta_{(q,\alpha_q)}(X) = \alpha_q(\pi_* X_q)\,.$$

Il nome di tautologica per la 1-forma θ proviene dalla proprietà, diretta conseguenza della definizione, $\alpha^*\theta = \alpha$ dove α^* indica il pull-back attraverso una qualsiasi 1-forma α su Q.

$$\begin{tikzcd}
T^*Q & T^*(T^*Q) \\
Q \arrow[u, "\alpha^*\theta"] \arrow[r, "\alpha"] & T^*Q \arrow[u, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

La 2-forma $\omega = \mathrm{d}\theta$ risulta essere non degenere ed è non solo chiusa ma addirittura esatta. Definisce dunque una struttura simplettica su $M = T^*Q$, detta struttura simplettica canonica.

Se si considerano le usuali coordinate q^i, p_i su T^*Q, dove q^i sono le coordinate su Q, la 1-forma tautologica e la forma simplettica canonica assumono la forma

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i \qquad \omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

dove si è sottintesa una sommatoria sugli indici ripetuti.

Esempio 23 (Orbite coaggiunte) *Su un' orbita coaggiunta* $\mathcal{O}_\eta$*,* $\eta \in \mathfrak{g}^*$ *si può definire una forma simplettica* ω *nel seguente modo:*

$$\omega_\eta(\mathrm{ad}^*_X\eta, \mathrm{ad}^*_Y\eta) = \langle \eta, [X, Y] \rangle$$

(si ricordi che, per l'Esempio 12, lo spazio tangente all'orbita $\mathcal{O}_\eta$ *nel punto* η *è dato da* $T_\eta\mathcal{O}_\eta = \{\mathrm{ad}^*_X\eta : X \in \mathfrak{g}\}$*). La forma* ω *è ben definita e non degenere. In effetti, nell'Esempio 16 abbiamo visto che l'algebra di Lie del sottogruppo di isotropia* $\mathfrak{g}_\eta$ *è data da*

$$\mathfrak{g}_\eta = \{X \in \mathfrak{g} : \langle \eta, [X, Y] \rangle = 0\,, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

ed è quindi il nucleo della forma ω_η*. Vedremo nella Sezione 3.2 che la forma* ω *è chiusa. Dunque le orbite coaggiunte sono varietà simplettiche.*

Analogamente a quanto avviene per gli spazi simplettici anche le varietà simplettiche si assomigliano se hanno la stessa dimensione, in questo caso però esse sono equivalenti solo localmente. Questa idea è precisata dal seguente importante teorema:

Teorema 22 (Darboux-Weinstein) *Se* (M, ω) *è una varietà simplettica di dimensione* $2n$ *allora ogni suo punto ammette un intorno* U *in cui sono definite delle coordinate* $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ *tali che*

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i\,,$$

queste coordinate vengono dette canoniche*, oppure* simplettiche *o ancora* coordinate di Darboux.

Definizione 18 *Se* (M, ω) *e* $(N, \widetilde{\omega})$ *sono due varietà simplettiche un* simplettomorfismo *è un diffeomorfismo* $\phi : M \to N$ *tale che* $\phi^*\widetilde{\omega} = \omega$*. Un simplettomorfismo di una varietà simplettica in se stessa prende il nome di* trasformazione canonica *o anche* trasformazione simplettica.

Osservazione 20 *Il fatto che un flusso* ϕ_t*, su una varietà simplettica* (M, ω)*, sia composto da simplettomorfismi è equivalente alla richiesta* $L_X\omega = 0$ *per il campo vettoriale* X *che lo genera.*

Analogamente al caso degli spazi vettoriali simplettici dove la 2-forma non degenere permetteva di definire un isomorfismo tra lo spazio vettoriale e il suo duale, in una varietà simplettica (M, ω) la forma ω permette di associare 1-forme su M a campi vettoriali su M e viceversa. Particolare importanza hanno i campi vettoriali associati a 1-forme chiuse, infatti vale la seguente proposizione:

Proposizione 23 *Dato un campo vettoriale* X *su una varietà simplettica* (M, ω) *si ha* $L_X\omega = 0$ *(e quindi* X *genera un flusso di simplettomorfismi) se e solo se la forma* $i_X\omega$ *è chiusa.*

Dimostrazione: Dalla formula di Cartan e dal fatto che $\mathrm{d}\omega = 0$ segue

$$L_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega = \mathrm{d}(i_X\omega)\,.$$

□

Definizione 19 *Un campo vettoriale X su una varietà simplettica (M, ω) si dice* simplettico *se la forma $i_X\omega$ è chiusa. Se questa forma è esatta, cioè esiste una funzione $h : M \to \mathbb{R}$ tale che*

$$i_X\omega = -\mathrm{d}h \tag{2.1}$$

il campo X si dice hamiltoniano *e la funzione h è l'*hamiltoniana *corrispondente. Un campo hamiltoniano con hamiltoniana h si indica con il simbolo X_h.*

Si dice che un campo vettoriale X è una simmetria della struttura simplettica se $L_X\omega = 0$.

L'insieme delle simmetrie della varietà simplettica M verrà indicato con $Sym(M)$. Per la Proposizione 23 esso coincide con l'insieme dei campi simplettici. L'insieme dei dei campi hamiltoniani verrà indicato con $Ham(M)$.

Osservazione 21 *La scelta di segno nella precedente definizione serve ad ottenere le equazioni di Hamilton con il segno corretto, si veda l'Esempio 25. Questa convenzione è legata a quella sul prodotto interno di un campo vettoriale con una p-forma, mentre è indipendente dalla scelta del segno nella definizione di parentesi di Poisson.*

Osservazione 22 *Siccome ogni forma chiusa è localmente esatta tutti i campi simplettici ammettono un'hamiltoniana locale. Questo è il motivo per cui vengono anche chiamati* localmente hamiltoniani*.*

Esempio 24 *Si consideri la sfera S^2 con la forma simplettica $\omega = \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}\theta$ in coordinate cilindriche, allora il campo $\frac{\partial}{\partial\theta}$ è hamiltoniano ed ha come hamiltoniana h. Infatti, posto $X = \eta_1 \frac{\partial}{\partial h} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial\theta}$,*

$$i_X\omega = \eta_1 \mathrm{d}\theta - \eta_2 \mathrm{d}h\,.$$

Esempio 25 *Si consideri il fibrato cotangente ad una varietà Q con la struttura simplettica canonica $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$. Un campo vettoriale su T^*Q*

$$X = \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

è hamiltoniano con hamiltoniana h se e solo se

$$i_X\omega = \zeta_i \mathrm{d}q^i - \eta^i \mathrm{d}p_i = -\frac{\partial h}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i - \frac{\partial h}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i$$

e quindi il sistema di equazioni differenziali associato al campo X è

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \eta^i & = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = \zeta_i & = -\dfrac{\partial h}{\partial q^i} \end{cases}$$

che sono esattamente le equazioni di Hamilton per un sistema meccanico. La necessità di ottenere il segno corretto in queste equazioni giustifica la scelta di segno nella formula (2.1) che definisce i campi hamiltoniani su una varietà simplettica.

2.3 Varietà di Poisson e campi hamiltoniani

Il concetto di campo hamiltoniano è in realtà definibile il un contesto più generale, e un un certo senso più naturale, di quello dato dalle varietà simplettiche. Il contesto appropriato è quello delle varietà di Poisson:

Definizione 20 *Una* varietà di Poisson *è una varietà differenziabile M su cui sia definita un'applicazione $\mathbb{R}$-bilineare sulle funzioni*

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

che soddisfa la seguenti tre proprietà:

- *antisimmetria,* $\{f,g\} = -\{g,f\}$*;*
- *regola di Leibniz,* $\{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$*;*
- *identità di Jacobi,* $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$.

Questa applicazione viene detta parentesi Poisson.

Osservazione 23 *A causa della regola di Leibniz ogni parentesi di Poisson è determinata da un bivettore (cioè un tensore antisimmetrico due volte controvariante) P attraverso la formula*

$$\{f,g\} = P(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) = P^{ij}\partial_i f \partial_j g\,.$$

L'identità di Jacobi equivale alla condizione sulle componenti del tensore P

$$P^{lk}\partial_l P^{ij} + P^{li}\partial_l P^{jk} + P^{lj}\partial_l P^{ki} = 0\,. \tag{2.2}$$

Il tensore P, eventualmente degenere, associa in modo naturale alle 1-forme e in particolare ai differenziali delle funzioni dei campi vettoriali $P\mathrm{d}f$ tali che

$$(P\mathrm{d}f)(g) = P(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) = \{f,g\}\,. \tag{2.3}$$

Si osservi che la struttura di Poisson permette di associare direttamente i campi hamiltoniani ad un certa funzione, mentre nel caso simplettico si parte da un certo campo e X e si ricostruisce la sua hamiltoniana "a posteriori" a partire dalla forma $i_X\omega$. Questo permette di prescindere dalla richiesta che il tensore di Poisson sia non degenere.

Definizione 21 *Se due funzioni f,g soddisfano la condizione $\{f,g\} = 0$ si dicono* in involuzione.

Le funzioni non costanti (sulle componenti connesse della varietà) a cui sono associati campi hamiltoniani nulli (e che quindi sono in involuzione con qualsiasi altra funzione) vengono dette funzioni di Casimir.

La distribuzione $\mathcal{C} = \{X = P\theta\}$ è detta distribuzione caratteristica*, risulta integrabile e le sue superfici integrali (che sono sempre di dimensione pari perché P è antisimmetrico) sono chiamate* foglie simplettiche. *Questo nome deriva dal fatto che il tensore di Poisson definisce una struttura simplettica naturale su ognuna di esse. Le foglie simplettiche sono contenute (in generale strettamente) nelle superfici di livello delle funzioni di Casimir.*

Definizione 22 *Sia* $(M, \{\cdot, \cdot\})$ *una varietà di Poisson con tensore di Poisson* P *e distribuzione caratteristica* $\mathcal{C}$. *Il campo vettoriale* $P\mathrm{d}h$ *si dice* campo hamiltoniano *di* hamiltoniana h *e si indica con* X_h, *l'insieme dei campi hamiltoniani viene indicato con* $Ham(M)$. *L'insieme delle simmetrie del tensore* P, *cioè dei campi* Z *tali che* $L_Z P = 0$, *verrà invece indicato con* $Sym(M)$. *Una* k*-forma* α *si dice* $\mathcal{C}$-chiusa *se* $\forall X_0, \ldots, X_k \in \mathcal{C}$ *si ha* $\mathrm{d}\alpha(X_0, \ldots, X_k) = 0$. *Gli insiemi dei campi* $P\theta$ *con* θ $\mathcal{C}$*-chiusa e chiusa verranno indicati rispettivamente coi simboli* $Loc_{\mathcal{C}}(M)$ *e* $Loc(M)$*; entrambi questi tipi di campi vengono a volte chiamati* localmente hamiltoniani.

Osservazione 24 *Il fatto che la funzione* f *sia in involuzione con la funzione* h *implica che, posto* $X = P\mathrm{d}f$, *valga*

$$X(f) = \{h, f\} = 0\,.$$

Il campo vettoriale X_h *è dunque tangente alle superfici di livello di* f *e le sue curve integrali sono tutte contenute in queste superfici. In particolare, siccome la parentesi di Poisson è antisimmetrica, si ha* $\{h, h\} = 0$ *e quindi le curve integrali di* X *sono contenute nelle superfici di livello di* h.

Esempio 26 *Si consideri* $\mathbb{R}^3$ *con coordinate* q, p, c *e con la parentesi*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}$$

Si verifica con un calcolo diretto che questa è una parentesi di Poisson. Il campo vettoriale associato alla funzione f *è*

$$P\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$

e quindi il tensore di Poisson P *è rappresentato dalla matrice*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dall'espressione della parentesi di Poisson si ottiene che ogni funzione della sola coordinata c *è una funzione di Casimir. La distribuzione caratteristica* $\mathcal{C}$ *è generata dai due campi vettoriali* $\frac{\partial}{\partial q}$ *e* $\frac{\partial}{\partial q}$ *e quindi foglie simplettiche sono i piani* $c = cost$.

Esempio 27 *Si consideri* $\mathbb{R}^3$ *con coordinate* q, p, c *e con la parentesi di Poisson*

$$\{f, g\} = p\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

anche in questo caso c *(e ogni sua funzione) è una funzione di Casimir, la distribuzione caratteristica è però generata dai due campi* $p\frac{\partial}{\partial q}$ *e* $p\frac{\partial}{\partial q}$ *che si annullano contemporaneamente sul piano* $p = 0$. *La distribuzione non ha quindi* *rango costante e le sue superfici integrali sono date dai due insiemi di semipiani* $\{c = cost, p > 0\}$, $\{c = cost, p < 0\}$ *e da tutti i punti del piano* $p = 0$. *Come si vede in questo caso le superfici di livello delle funzioni di Casimir contengono propriamente le foglie simplettiche.*

La seguente proposizione stabilisce che le varietà simplettiche sono varietà di Poisson. Il concetto di varietà di Poisson risulta quindi una generalizzazione del concetto di varietà simplettica così come quest'ultimo generalizzava la struttura simplettica naturale presente sui fibrati cotangenti.

Proposizione 24 *Ad ogni forma simplettica* ω *è associato, tramite la relazione*

$$P\theta = X \iff i_X\omega = -\theta \tag{2.4}$$

un unico tensore P *che è di Poisson e non degenere.*

Viceversa su ogni varietà di Poisson, il cui tensore di Poisson P *sia non degenere, la precedente relazione definisce un'unica struttura simplettica e* P *è il tensore ad essa associato. Data una forma simplettica* ω *e il tensore di Poisson* P *ad essa associato si ha che* $X = P\mathrm{d}f$ *se e solo se* X *è hamiltoniano in senso simplettico con hamiltoniana* f *e inoltre la parentesi di Poisson definita da* P *soddisfa*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)\,. \tag{2.5}$$

Dimostrazione: Data una 2-forma non degenere ω la formula (2.4) definisce un bivettore P. Viceversa dato un bivettore non degenere P applicando una prima volta la formula (2.4) si definisce una 2-forma non degenere ω, e applicandola una seconda volta si vede che il bivettore associato ad ω è esattamente P. La relazione tra le componenti della forma e del bivettore si ricava dalle condizioni

$$X^j = P^{ij}\theta_i \iff \omega_{jk}X^j = -\theta_k \Longrightarrow \omega_{jk}P^{ij}\theta_i = -\theta_k$$

e risulta

$$P^{ij}\omega_{jk} = -\delta^i_k \tag{2.6}$$

da cui si deducono le volute proprietà di differenziabilità e non degeneratezza.

La condizione (2.4) implica, inoltre, che $X = P\mathrm{d}f$ se e solo se $i_X\omega = -\mathrm{d}f$ e cioè se e solo se X è il campo hamiltoniano in senso simplettico con hamiltoniana f. Inoltre dalla definizione (2.3) di parentesi associata al tensore P si ha

$$\{f, g\} = (P\mathrm{d}f)(g) = \langle X_f, \mathrm{d}g\rangle = -\langle X_f, i_{X_g}\omega\rangle = \omega(X_f, X_g)\,.$$

Occorre ora mostrare che P è di Poisson se e solo se ω è chiusa. Differenziando la condizione (2.6) si ottiene

$$P^{li}\partial_k\omega_{ij} = -\omega_{ij}\partial_k P^{li}\,.$$

Si considerino ora tre 1-forme θ, ϕ, ψ ed i corrispondenti campi vettoriali $X = P\theta$, $Y = P\phi$ e $Z = P\psi$. Allora

$$\begin{aligned} X^iY^jZ^k\partial_k\omega_{ij} &= \theta_l\phi_m\psi_n P^{li}P^{mj}P^{nk}\partial_k\omega_{ij} \\ &= -\theta_l\phi_m\psi_n\omega_{ij}P^{mj}P^{nk}\partial_k P^{li} \\ &= \theta_l\phi_m\psi_n P^{kn}\partial_k P^{lm}\,. \end{aligned}$$

Permutando ciclicamente gli indici si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y,Z) &= (\partial_k\omega_{ij}+\partial_i\omega_{jk}+\partial_j\omega_{ki})X^iY^jZ^k \\ &= (P^{kn}\partial_kP^{lm}+P^{kl}\partial_kP^{mn}+P^{km}\partial_kP^{nl})\theta_l\phi_m\psi_n \end{aligned}$$

da cui segue che $\mathrm{d}\omega = 0$ se e solo se vale la condizione (2.2) e quindi P è di Poisson. □

Osservazione 25 *Per la Proposizione 24 su una varietà simplettica il concetto di campo hamiltoniano in senso simplettico coincide con quello definito per le varietà di Poisson. Inoltre dalla relazione (2.6) tra le componenti della forma simplettica e del tensore di Poisson associato segue che nelle varietà simplettiche le simmetrie di ω sono tutte e sole le simmetrie del tensore P associato. Le notazioni della Definizione 22 sono dunque coerenti con quelle della Definizione 19.*

Esempio 28 *Nel caso in cui la varietà simplettica sia il fibrato cotengente T^*Q con la forma simplettica canotica $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ allora (in base a quanto visto nell'Esempio 25) il campo di hamiltoniana f è*

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

quindi la parentiesi di Poisson associata alla forma simplettica è

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\,.$$

In campi hamiltoniani definiti su varietà di Poisson (e quindi in particolare su varietà simplettiche) godono della seguente importante proprietà.

Proposizione 25 *Se X_f e X_g sono due campi hamiltoniani su di una varietà di Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ allora il loro commutatore $[X_f, X_g]$ è ancora hamiltoniano e vale*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}\,.$$

In altri termini $Ham(M)$ è un'algebra di Lie.

Dimostrazione: Applicando $[X_f, X_g]$ ad una generica funzione h e utilizzando la definizione di campo hamiltoniano e si ottiene

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} \\ &= \{\{f,g\},h\} = X_{\{f,g\}}(h) \end{aligned}$$

Nel penultimo passaggio si è utilizzata l'identità di Jacobi nella forma $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\} = -\{h,\{f,g\}\}$, e da questo segue la tesi. □

I due risultati seguenti riguardano, invece, le proprietà delle simmetrie di un tensore di Poisson. In particolare la Proposizione 27 si può interpretare come una generalizzazione al caso delle varietà di Poisson della Proposizione 23.

Proposizione 26 *Data una varietà di Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$, l'insieme delle simmetrie $Sym(M)$ è un'algebra di Lie ed inoltre $Z \in Sym(M)$ se e solo se è una derivazione della parentesi di Poisson, cioè*

$$Z(\{f,g\}) = \{Z(f), g\} + \{f, Z(g)\}\,. \tag{2.7}$$

Dimostrazione: Siccome vale la proprietà $L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$ se $L_X P = L_Y P = 0$ allora $L_{[X,Y]}P = 0$. Inoltre dalla definizione di derivata di Lie segue

$$(L_Z P)(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) = Z(\{f,g\}) - \{Z(f), g\} - \{f, Z(g)\}$$

e quindi $L_Z P = 0$ se e solo se vale la relazione (2.7). □

Proposizione 27 *Dato il campo vettoriale $X = P\theta$ vale*

$$(L_X P)(\phi, \psi) = \mathrm{d}\theta(P\phi, P\psi) \qquad \forall \phi, \psi$$

e quindi $L_X P = 0$ se e solo se θ è $\mathcal{C}$-chiusa. In altri termini

$$Loc_{\mathcal{C}}(M) = Sym(M) \cap \mathcal{C}\,.$$

Dimostrazione: La dimostrazione risulta più semplice utilizzando le componenti. Posto $Y^j = P^{ij}\phi_i$ e $Z^j = P^{ij}\psi_i$ si ha:

$$\begin{aligned}
(L_X P)^{ij} &= X^l \partial_l P^{ij} - P^{lj}\partial_l X^i - P^{il}\partial_l X^j \\
&= P^{kl}\theta_k \partial_l P^{ij} - P^{lj}\partial_l (P^{ki}\theta_k) - P^{il}\partial_l(P^{kj}\theta_k) \\
&= (P^{kl}\partial_l P^{ij} + P^{il}\partial_l P^{jk} + P^{jl}\partial_l P^{ki})\theta_k + (\partial_k\theta_i - \partial_l\theta_k)P^{ki}P^{lj} \\
&= (\partial_k\theta_i - \partial_l\theta_k)P^{ik}P^{jl}
\end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'identità (2.2) per le componenti del tensore di Poisson. Si ottiene quindi

$$(L_X P)^{ij}\phi_i\psi_j = (\partial_k\theta_i - \partial_l\theta_k)P^{ik}P^{jl}\phi_i\psi_j = (\mathrm{d}\theta)_{kl}Y^k Z^l\,.$$

□

Non tutte le simmetrie di una varietà di Poisson appartengono alla distribuzione caratteristica $\mathcal{C}$.

Esempio 29 *Si consideri* $\mathbb{R}^3$ *con la struttura di Poisson data nell'Esempio 26. Il campo* $Z = \frac{\partial}{\partial c}$ *non appartiene alla distribuzione caratteristica ma ugualmente soddisfa* $L_Z P = 0$ *e quindi è una simmetria del tensore di Poisson:*

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_{L_Z P} &= \frac{\partial}{\partial c}\{f, g\} - \{\frac{\partial f}{\partial c}, g\} - \{f, \frac{\partial g}{\partial c}\} \\
&= \frac{\partial}{\partial c}\{f, g\} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial c}\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial c}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 g}{\partial q \partial c} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial c} \\
&= \frac{\partial}{\partial c}\{f, g\} - \frac{\partial}{\partial c}(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}) + \frac{\partial}{\partial c}(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}) = 0
\end{aligned}$$

Osservazione 26 *La tipologia delle simmetrie nelle varietà di Poisson è dunque molto più varia che nelle varietà simplettiche dove coincidono con i campi simplettici per la la Proposizione 23. Nel caso in cui il tensore di Poisson sia degenere infatti non solo le simmetrie si ottengono da forme non necessariamente chiuse, ma possono anche non essere immagini di alcuna forma perché non appartenenti alla distribuzione caratteristica.*

Proposizione 28 *Se* $L_X P = 0$ *e* $Y = P\theta$ *allora*

$$[X, Y] = P(L_X \theta)$$

inoltre

- *se* θ *è* $\mathcal{C}$*-chiusa allora* $L_X \theta$ *è* $\mathcal{C}$*-chiusa;*
- *se* θ *è chiusa allora* $L_X \theta$ *è esatta e quindi* $[X, Y]$ *è hamiltoniano con hamiltoniana* $i_X \theta$*, in particolare se* $\theta = \mathrm{d}f$ *l'hamiltoniana è* $X(f)$*;*
- *se* θ *è* $\mathcal{C}$*-chiusa e* $X = P\phi$ *(e quindi per la Proposizione 27 anche* ϕ *è* $\mathcal{C}$*-chiusa) allora* $[X, Y]$ *è hamiltoniano con hamiltoniana* $i_X \theta = -i_Y \phi$*.*

Dimostrazione: La prima proprietà di ottiene semplicemente applicando il fatto che la derivata di Lie è una derivazione delle contrazioni:

$$[X, Y] = L_X(P\theta) = (L_X P)\theta + P(L_X \theta) = P(L_X \theta)\,.$$

Siccome sia $L_X P = L_Y P = 0$ per l'Osservazione 26 vale $L_{[X,Y]}P = 0$ e inoltre $[X, Y] \in \mathcal{C}$ quindi applicando la Proposizione 27 segue che $L_X \theta$ è $\mathcal{C}$-chiusa. Le restanti proprietà dipendono dall'analisi di $L_X \theta = i_X \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}i_X \theta$, in particolare se $\mathrm{d}\theta = 0$ segue subito che $L_X \theta = \mathrm{d}(i_X \theta)$, e se in particolare $\theta = \mathrm{d}f$ si ha $i_X \theta = X(f)$. Infine se $X = P\phi$ e θ è $\mathcal{C}$-chiusa per dimostrare che $[X, Y]$ è hamiltoniano è sufficiente provare che $P i_X \mathrm{d}\theta = 0$, ma applicandolo ad una qualsiasi funzione f si ha:

$$\begin{aligned}
(P i_X \mathrm{d}\theta)(f) &= P(i_X \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f) \\
&= -i_{X_f} i_X \mathrm{d}\theta \\
&= \mathrm{d}\theta(X, X_f) = 0
\end{aligned}$$

poiché $X, X_f \in \mathcal{C}$ e θ è $\mathcal{C}$-chiusa. □

Osservazione 27 *Il precedente risultato può essere compendiato nelle relazioni*

$$\begin{aligned}[Sym(M), Loc_{\mathcal{C}}(M)] &\subseteq Loc_{\mathcal{C}}(M)\\ [Sym(M), Loc(M)] &\subseteq Ham(M)\\ [Loc_{\mathcal{C}}(M), Loc_{\mathcal{C}}(M)] &\subseteq Ham(M)\end{aligned}$$

e quindi nell'algebra di Lie $Sym(M)$ si ha la seguente catena di ideali:

$$Ham(M) \lhd Loc(M) \lhd Loc_{\mathcal{C}}(M) \lhd Sym(M)\,.$$

Corollario 29 *Nel caso simplettico $Sym(M) = Loc(M) = Loc_{\mathcal{C}}(M)$ è l'insieme dei campi simplettici, per cui il commutatore di due campi simplettici è hamiltoniano:*

$$[Sym(M), Sym(M)] \subseteq Ham(M)\,. \tag{2.8}$$

Da ciò segue $Ham(M)$ è un'ideale (e quindi una sottoalgebra) di $Sym(M)$.

Osservazione 28 *Questo corollario si può ottenere direttamente dalla definizione di campo simplettico: presi sue campi simplettici X e Y (cioè tali che $\mathrm{d}i_X\omega = \mathrm{d}I_Y\omega = 0$) e utilizzando la formula $i_{[X,Y]}\alpha = L_X i_Y \alpha - i_Y L_X \alpha$ si ottiene*

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= L_X i_Y \omega - i_Y L_X \omega\\ &= i_X \mathrm{d}(i_Y\omega) + \mathrm{d}(i_X i_Y \omega) - i_Y(\mathrm{d}i_X\omega + i_X \mathrm{d}\omega)\\ &= \mathrm{d}(i_X i_Y \omega) = -\mathrm{d}[\omega(X,Y)]\end{aligned}$$

e quindi il campo $[X,Y]$ è hamiltoniano. Si può inoltre dimostrare con tecniche più complesse [4] che nelle varietà simplettiche $[Sym(M), Sym(M)]$ coincide esattamente con $Ham(M)$.

Capitolo 3

Azioni simplettiche

3.1 Mappa momento

Definizione 23 *Un'azione $\mathcal{C}^\infty$ σ di un gruppo di Lie G su di una varietà simplettica (M,ω) si dice* simplettica *se*

$$\sigma_g^*\omega = \omega$$

cioè se σ manda G non nei generici diffeomorfismi di M ma nel gruppo dei simplettomorfismi.

Osservazione 29 *Se l'azione σ di un gruppo di Lie G su di una varietà simplettica (M,ω) è simplettica allora la derivata dell'azione soddisfa*

$$L_{\dot\sigma(X)}\omega = \mathrm{d}i_{\dot\sigma(X)}\omega = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,,$$

cioè il campo $\dot\sigma_X$ è simplettico. Il viceversa vale se G è semplicemente connesso.

Esempio 30 *Si consideri la sfera $(S^2, \mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}\theta)$, l'azione $\sigma_t(\theta,h)\mapsto(\theta+t,h)$ del gruppo a 1-parametro delle rotazioni attorno all'asse verticale agisce in modo simplettico. Infatti, siccome $\hat\theta=\theta+t$ e $\hat h = h$, vale $\mathrm{d}\hat\theta=\mathrm{d}\theta$ e $\mathrm{d}\hat h=\mathrm{d}h$ e quindi la forma simplettica rimane invariata.*

Esempio 31 *Si consideri $\mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica standard $\sum_i \mathrm{d}y_i\wedge\mathrm{d}x_i$, l'azione delle traslazioni $\tau_{\vec v}:(\vec x,\vec y)\mapsto(\vec x+\vec v,\vec y)$ agisce in modo simplettico. Infatti anche in questo caso $\mathrm{d}\hat x_i=\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}\hat y_i=\mathrm{d}y_i$ e quindi la forma simplettica è invariata.*

Esempio 32 *Si consideri $\mathbb{R}^6$ come spazio cotangente di $\mathbb{R}^3$, con coordinate q^i, p_i e forma simplettica $\omega=\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$. L'azione $O(3)\times\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^6$ indotta dall'azione delle rotazioni ρ presentata nell'Esempio 14 e definita da*

$$\hat q^i = O^i_j q^j \quad \hat p_i = (O^{\mathrm{t}})^j_i p_j\,,$$

dove O^{t} *indica la matrice trasposta di* O*, è un'azione simplettica. Infatti*

$$\mathrm{d}\hat{p}_i \wedge \mathrm{d}\hat{q}^i = {O^{\mathrm{t}}}^k_i O^i_j \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q^j = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \,,$$

poiché le matrici ortogonali soddisfano $O^{\mathrm{t}} O = \mathbb{1}$.

Esempio 33 *Tutti gli esempi precedenti sono casi particolari di una costruzione generale che, a partire da un'azione su una varietà* Q*, permette di definire un'azione sul fibrato cotangente* T^*Q *che risulta automaticamente simplettica. Si consideri l'espressione in coordinate dell'azione* $g \mapsto \sigma_g$*:*

$$\hat{q}^i = \sigma^i_g(q^j)$$

e sia J_g *la matrice definita dalla relazione:*

$$(J_g)^i_k \frac{\partial \sigma^k_g}{\partial q^j} = \delta^i_j \,. \tag{3.1}$$

Il sollevamento al fibrato cotangente *dell'azione è espresso in coordinate come*

$$\hat{q}^i = \sigma^i_g(q^j) \quad \hat{p}_i = (J_g)^j_i p_j \,,$$

si verifica semplicemente che essa conserva la forma simplettica $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$.

Si che se si considera la 1*-forma* $\alpha : q \mapsto \alpha_q$*, dove* α_q *è pensato come un vettore riga, e un campo vettoriale* $Y : q \mapsto Y_q$ *allora*

$$\langle \alpha_q J_g, Y_{g\cdot q} \rangle = \langle \alpha_q, (\sigma^*_g Y)_q \rangle \tag{3.2}$$

dove $\sigma^*_g Y$ *è il pull-back di* Y *attraverso* σ_g.

La derivata dell'azione σ *si calcola ponendo* $g = \exp(-tY)$ *e associa a* $Y \in \mathfrak{g}$ *il campo vettoriale su* Q

$$\dot{\sigma}_Y = \dot{\sigma}^i_Y \frac{\partial}{\partial q^i} \quad \text{con} \quad \dot{\sigma}^i_Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \sigma^i_g \,.$$

Derivando l'equazione (3.1) e osservando che $(J_{1_G})^i_j = \delta^i_j$ *si ottiene*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (J_g)^i_j = -\frac{\partial}{\partial q^j} \dot{\sigma}^i_Y \,.$$

Calcolando

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(\hat{q}^i, \hat{p}_i) &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \sigma^i_g + \frac{\partial f}{\partial p_i} p_j \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (J_g)^j_i \\ &= \dot{\sigma}^i_Y \frac{\partial f}{\partial q^i} - p_j \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \dot{\sigma}^j_Y \right) \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{aligned}$$

si ottiene che la derivata dell'azione sollevata al tangente associa a $Y \in \mathfrak{g}$ *il campo vettoriale*

$$\dot{\sigma}^i_Y \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \dot{\sigma}^j_Y \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \,. \tag{3.3}$$

Definizione 24 *Sia σ un'azione simplettica di un gruppo di Lie su di una varietà simplettica (M, ω) tale che esiste una funzione lineare $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$ che soddiffa per ogni $Y \in \mathfrak{g}$*

$$\dot{\sigma}_Y = X_{\lambda(Y)}\,. \tag{3.4}$$

Allora è possibile definire la funzione $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ come

$$\langle \mu(x), Y \rangle = \lambda(Y)(x) \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\,.$$

La funzione μ viene detta mappa momento *mentre λ viene chiamata* mappa comomento*.*

Osservazione 30 *Data un'azione σ di un gruppo di dimensione finita per cui esiste una funzione $\tilde{\lambda} : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$ non necesariamente lineare tale $\dot{\sigma}_Y = X_{\tilde{\lambda}(Y)}$ è sempre possibile costruire una nuova funzione $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$ con la soddisfa la (3.4) e risulta lineare. Infatti scelta una base $\{e_i\}$ di $\mathfrak{g}$ è sufficiente definire*

$$\lambda(Y^i e_i) = Y^i \tilde{\lambda}(e_i)\,.$$

Per costruire la mappa momento per un'azione di un gruppo di dimensione finita è quindi sufficiente che tutti i generatori infinitesimi dell'azione siano campi hamiltoniani.

Alcune condizioni sulla topologia della varietà M oppure sull'algebra di Lie del gruppo assicurano che ogni azione simplettica ammetta una mappa momento

Proposizione 30 *Se $H^1_{dR}(M) = 0$ oppure $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ allora ogni azione simplettica ammette una mappa momento.*

Dimostrazione: La prima condizione assicura che ogni forma chiusa sia anche esatta, ma se un'azione è simplettica i suoi generatori infinitesimi sono associati a forme chiuse e quindi sono automaticamente hamiltoniani. La seconda condizione invece assicura che ogni elemento dell'algebra può essere scritto come il commutatore di altro due elementi dell'algebra, ma $\dot{\sigma}$ è un omomorfismo di algebre di Lie e il commutatore di due campi simplettici è sempre hamiltoniano e quindi $\dot{\sigma}$ associa ad ogni elemento dell'algebra $\mathfrak{g}$ un campo hamiltoniano. □

Proposizione 31 *Data un'azione simplettica σ che ammette una mappa momento con mappa comomento λ, allora per ogni $Y, Z \in \mathfrak{g}$ si ha*

$$X_{\lambda([Y,Z])} = X_{\{\lambda(Y), \lambda(Z)\}}\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione: Utilizzando la Proposizione 25 e la Proposizione 16 si ottiene:

$$X_{\{\lambda(Y), \lambda(Z)\}} = [X_{\lambda(Y)}, X_{\lambda(Z)}] = [\dot{\sigma}_Y, \dot{\sigma}_Z] = \dot{\sigma}_{[Y,Z]} = X_{\lambda([Y,Z])}\,.$$

□

Definizione 25 *Si consideri un'azione simplettica di un gruppo G su una varietà simplettica M che ammette una mappa momento, con mappa comomento $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$. La mappa momento è detta (globalmente)* equivariante *se per ogni $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e $x \in M$ vale*

$$\lambda(\mathrm{Ad}_g X)(g \cdot x) = \lambda(X)(x)$$

o equivalentemente

$$\mu(g \cdot x) = \mathrm{Ad}_g^* \, \mu(x) \, .$$

Osservazione 31 *L'equivalenza delle due di mappa momento equivariante si ricava ponendo nella prima $X = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y$ e utilizzando la definizione di mappa momento:*

$$\begin{aligned} \lambda(\mathrm{Ad}_g X)(g \cdot x) = \langle \mu(g \cdot x), \mathrm{Ad}_g X \rangle &= \langle \mu(g \cdot x), Y \rangle \\ \lambda(X)(x) = \langle \mu(x), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y \rangle &= \langle \mathrm{Ad}_g^* \, \mu(x), Y \rangle \, . \end{aligned}$$

Si osservi che la seconda formulazione corrisponde al concetto generale di equivarianza secondo la Definizione 4 se si considera l'azione coaggiunta Ad_g^* del gruppo G su $\mathfrak{g}^*$.

Proposizione 32 *Se un'azione simplettica σ di un gruppo G ammette una mappa momento equivariante allora per ogni $Y, Z \in \mathfrak{g}$ la mappa comomento soddisfa la relazione*

$$\lambda([Y, Z]) = \{\lambda(Y), \lambda(Z)\} \, . \tag{3.6}$$

Cioè è un morfismo tra l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e l'algebra di Lie $\mathcal{F}(M)$ con la parentesi di Poisson.

Dimostrazione: Siccome l'azione ammette una mappa momento equivariante la mappa comomento soddisfa

$$\lambda(\mathrm{Ad}_g Z) \circ \sigma_g = \lambda(Z) \, ,$$

ponendo $g = \exp(tY)$ e calcolando la derivata in $t = 0$ si ottiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \lambda(\mathrm{Ad}_g Z) \circ \sigma_g = \lambda(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_g Z) \circ \sigma_{1_G} + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \lambda(\mathrm{Ad}_{1_G} Z) \circ \sigma_g = 0 \, .$$

Ma $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{Ad}_g Z = \mathrm{ad}_Y Z$ e $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \lambda(Z) \circ \sigma_g$ è l'applicazione alla funzione $\lambda(Z)$ del campo vettoriale con flusso σ_g. Per la definizione di derivata di un'azione $\sigma_{\exp(tY)}$ è il flusso di $-\dot{\sigma}_Y$, quindi si ottiene

$$\lambda(\mathrm{ad}_Y Z) - \dot{\sigma}_Y \Big[\lambda(Z)\Big] = 0$$

e poiché $\dot{\sigma}_Y(f) = X_{\lambda(Y)}(f) = \{\lambda(Y), f\}$ si ha $\lambda([Y, Z]) = \{\lambda(Y), \lambda(Z)\}$. □

Definizione 26 *La proprietà (3.6) è chiamata* equivarianza infinitesimale*, le azioni con mappe momento che soddisfano la proprietà di equivarianza infinitesimale sono dette* azioni hamiltoniane.

In altre parole, un'azione simplettica è hamiltoniana se la mappa comomento $\lambda : (\mathfrak{g}, [\,,\,]) \to (\mathcal{F}(M), \{\,,\,\})$ *è un morfismo di algebre di Lie.*

Corollario 33 *Se l'azione* σ *è hamiltoniana e* $[Y, Z] = 0$ *allora le due funzioni* $\lambda(Y)$ *e* $\lambda(Z)$ *sono in involuzione.*

Osservazione 32 *L'equivarianza di una mappa momento implica quindi la sua equivarianza infinitesimale mentre il viceversa non è sempre valido. Se però si ha un'azione simplettica di un gruppo* G *connesso su una varietà simplettica* M *anch'essa connessa allora la proprietà di equivarianza infinitesimale implica l'equivarianza globale dell'azione. Si veda [8] pagine 351–357 per una dimostrazione di questo risultato e ulteriori informazioni.*

Non tutte le mappe momento sono equivarianti: la relazione (3.5) infatti implica che $\{\lambda(Y), \lambda(Z)\} - \lambda([Y, Z])$ sia una funzione costante sulle componenti commesse della varietà simplettica, ma questa non è necessariamente nulla. Il seguente esempio descrive un'azione con una mappa momento non equivariante.

Esempio 34 *Si consideri* $\mathbb{R}^2$ *con la forma simplettica canonica* $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ *e l'azione naturale del gruppo affine:*

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x \cos\theta - y \sin\theta + x_0 \\ \hat{y} &= x \sin\theta + y \cos\theta + y_0 \end{aligned}$$

Questa azione è simplettica, come si verifica immediatamente, e i generatori corrispondenti alle due traslazioni e alla rotazione, cioè alla base e_1, e_2, e_3 *dell'algebra di Lie sono rispettivamente*

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_2 = -\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

e sono hamiltoniani con hamiltoniane $h_1 = \lambda(e_1) = -y$*,* $h_2 = \lambda(e_2) = x$ *e* $h_3 = \lambda(e_3) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$*. Il duale dell'algebra di Lie è isomorfo a* $\mathbb{R}^3$ *prendendo* $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\kappa}$ *come base duale di* e_1, e_2, e_3*, quindi la mappa momento è data dal vettore* $-x\hat{\imath} - y\hat{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\hat{\kappa}$*. Questa mappa momento non soddisfa l'equivarianza infinitesimale, e quindi non è neppure equivariante: i due campi* X_1 *e* X_2*, infatti, commutano tra loro mentre* $\{\lambda(e_1), \lambda(e_2)\} = \{-y, x\} = -1$.

Un caso particolare di azioni simplettiche che generano mappe momento automaticamente equivarianti sono i sollevamenti al cotangente T^*Q delle azioni di un gruppo su una varietà Q, introdotti nell'Esempio 33.

Teorema 34 *Data l'azione* $\sigma : G \times Q \to Q$ *il suo sollevamento al fibrato cotangente ammette una mappa momento* $\mu : T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ *equivariante data dalla formula*

$$\langle \mu(q, \alpha_q), Y \rangle = \langle \alpha, \dot{\sigma}_Y \rangle$$

dove (q, α_q) *è un generico punto di* T^*Q*,* α *è la* 1*-forma* $q \mapsto \alpha_q$ *e* $Y \in \mathfrak{g}$.

Dimostrazione: Il campo (3.3) è un campo hamiltoniano con hamiltoniana $\lambda(Y) = p_k \dot\sigma^k_Y$. Quindi $\lambda(Y)(q, \alpha_q) = \langle \alpha_q, \dot\sigma_Y(q)\rangle = \langle \alpha, \dot\sigma_Y\rangle$. L'azione sollevata risulta equivariante per le proprietà (3.2) e (1.5):

$$\begin{aligned} \langle \mu(g \cdot q, \alpha_q J_g), Y\rangle &= \langle \alpha_q J_g, \dot\sigma(Y)_{g\cdot q}\rangle \\ &= \langle \alpha_q, (\sigma^*_g \dot\sigma_Y)_q\rangle \\ &= \langle \alpha, \dot\sigma(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y)\rangle \\ &= \langle \mu(q, \alpha_q), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} Y\rangle \end{aligned}$$

□

La presenza di una mappa momento permette di formulare in modo geometrico la presenza di leggi di conservazione legate alle simmetrie di un sistema hamiltoniano.

Teorema 35 *Sia* $\sigma : G \times M \to M$ *un'azione hamiltoniana di un gruppo di Lie su di una varietà simplettica* (M, ω) *e sia* $h \in \mathcal{F}(M)$*. Allora per ogni* $Y \in \mathfrak{g}$

$$\dot\sigma_Y(h) = \{\lambda(Y), h\}\,.$$

In particolare se $\dot\sigma_Y(h) = 0$ *la funzione* $\lambda(Y)$ *è una costante del moto. Se* $\dot\sigma_Y(h) = 0$ *per ogni* $Y \in \mathfrak{g}$ *allora la mappa momento* $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ *si conserva lungo il flusso* ϕ_t *del campo hamiltoniano* X_h*:*

$$\mu \circ \phi_t = \mu\,.$$

Dimostrazione: Siccome σ è hamiltoniana vale $\dot\sigma_Y = X_{\lambda(Y)}$ e per definizione del campo hamiltoniano X_h associato a h si ha $i_{X_h}\omega = -\mathrm{d}h$. Allora

$$\begin{aligned} \dot\sigma_Y(h) &= \langle \dot\sigma_Y, \mathrm{d}h\rangle = -\langle X_{\lambda(Y)}, i_{X_h}\omega\rangle \\ &= \omega(i_{X_h}, X_{\lambda(Y)}) = \{h, \lambda(Y)\}\,. \end{aligned}$$

Se ora $\dot\sigma_Y(h) = 0$ si ha $\{h, \lambda(Y)\} = 0$ e quindi $\lambda(Y)$ è una costante del moto, cioè

$$\lambda(Y) \circ \phi_t = \lambda(Y)\,.$$

Se $\dot\sigma_Y(h) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$ dalla definizione della mappa momento si ottiene

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad \langle \mu \circ \phi_t, Y\rangle = \langle \mu, Y\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mu \circ \phi_t = \mu\,.$$

□

3.2 Orbite coaggiunte e varietà di bandiera

Si consideri la rappresentazione coaggiunta su un gruppo di Lie e un'orbita $\mathcal{O}_\eta$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Nell'Esempio 23 si visto che su $\mathcal{O}_\eta$ è ben definita la forma non degenere:

$$\omega_\eta(\mathrm{ad}^*_X\eta, \mathrm{ad}^*_Y\eta) = \langle \eta, [X,Y] \rangle \,.$$

Si dimostrerà ora che ω è una forma simplettica e al tempo stesso che l'azione di G su $\mathcal{O}_\eta$ è hamiltoniana. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, sia $\lambda(X)$ la funzione data da

$$\lambda(X)(\eta) = \langle \eta, X \rangle \,.$$

Allora $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(\mathcal{O}_\eta)$ è una funzione lineare tale che

$$i_{\dot{\mathrm{Ad}}^*_X}\omega = d(\lambda(X)) \,.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{Ad}}^*_Y(\lambda(X))(\eta) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \lambda(X)(\exp -tY \cdot \eta) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \langle \eta, \mathrm{Ad}_X(\exp tY) \rangle \\
&= \langle \eta, [X,Y] \rangle \\
&= \omega_\eta(\mathrm{ad}^*_X\eta, \mathrm{ad}^*_Y\eta) \\
&= \omega_\eta(\dot{\mathrm{Ad}}^*_X\eta, \dot{\mathrm{Ad}}^*_Y\eta) \,.
\end{aligned}$$

Da questo segue che ω è $\mathcal{C}^\infty$, G-invariante e chiusa. Per la chiusura, basta osservare che

$$\begin{aligned}
i_{\dot{\mathrm{Ad}}^*_Y} d\omega &= L_{\dot{\mathrm{Ad}}^*_Y}\omega - d i_{\dot{\mathrm{Ad}}^*_X}\omega \\
&= -dd\lambda(X)(\eta) \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

Inoltre, l'azione di G su $\mathcal{O}_\eta$ è simplettica con mappa momento $\mu : \mathcal{O}_\eta \to \mathfrak{g}^*$ con

$$\langle \mu(\eta), X \rangle = \lambda(X)(\eta) = \langle \eta, X \rangle \,.$$

Dunque *la mappa momento è l'inclusione*. L'azione è hamiltoniana in quanto

$$\begin{aligned}
\{\lambda(X), \lambda(Y)\} &= \omega_\eta(\mathrm{ad}^*_X\eta, \mathrm{ad}^*_Y\eta) \\
&= \langle \eta, [X,Y] \rangle \\
&= \lambda([X,Y])(\eta) \,.
\end{aligned}$$

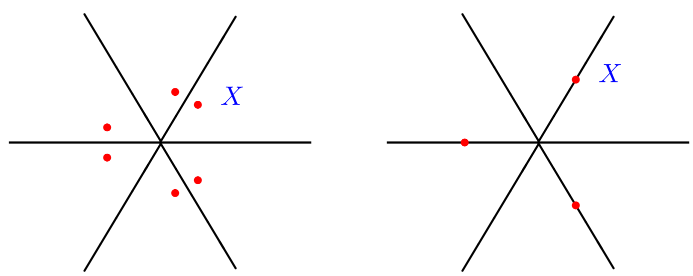
Si osservi che se G è un gruppo di Lie semisemplice, si può usare una qualunque forma bilineare invariante non degenere (come la forma di Killing, cfr. Proposizione 14) per identificare $\mathfrak{g}^*$ con $\mathfrak{g}$ e quindi le orbite coaggiunte con le orbite aggiunte. Le orbite della rappresentazione aggiunta di un gruppo di Lie semisemplice sono le *varietà di bandiera complesse*. Una varietà di bandiera complessa "classica" è un'orbita della rappresentazione aggiunta di $\mathrm{SU}(n)$. L'algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$ di $\mathrm{SU}(n)$ è data da $\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^t = -A, \mathrm{Tr}A = 0\}$. L'azione aggiunta consiste semplicemente nel coniugio. Notiamo che il sottospazio di $\mathfrak{su}(n)$ dato dalle matrici diagonali

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} i\lambda_1 & & 0 \\ & .. & \\ 0 & & i\lambda_n \end{array} \right) \middle| \sum \lambda_i = 0 \right\}$$

incontra ogni orbita; infatti ogni matrice di $\mathfrak{su}(n)$ può essere diagonalizzata per coniugio con una matrice unitaria speciale. Pertanto è possibile considerare solo le orbite di elementi di $\mathfrak{t}$. Il sottospazio $\mathfrak{t}$ è in effetti una sottoalgebra abeliana massimale, detta *sottoalgebra di Cartan*. Le orbite nel caso $n = 3$ sono descritte nel seguente modo:

- se $H = \mathrm{diag}(i\lambda_1, i\lambda_2, i\lambda_3)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, allora $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(3))H$ è la varietà $F_{1,2,3}$ delle bandiere complete $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ in $\mathbb{C}^3$;
- se $H = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, con $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(3))H$ è la varietà di bandiera parziale che si identifica con lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^2$.

Un ulteriore fatto importante è che $(\mathrm{Ad}(SU(n))X) \cap \mathfrak{t}$ è un'orbita del gruppo di Weyl, come illustrato nel caso di $n = 3$ dalla seguente figura



$F_{1,2,3}$ $\mathbb{C}P^2$

È possibile restringere l'azione aggiunta di $\mathrm{SU}(n)$ all'azione di un toro massimale (sottogruppo abeliano massimale). Un toro massimale T di $\mathrm{SU}(n)$ si ottiene come $\exp \mathfrak{t}$ ed è formato da matrici diagonali. Nell'identificazione dell'applicazione aggiunta con la coaggiunta la mappa momento μ coincide con l'insieme delle funzioni altezza $\{f_X\}_{X \in \mathfrak{t}}$ dove

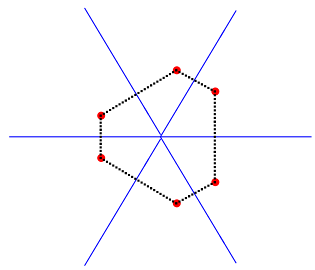
$$f_X : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : p \mapsto \langle p, X \rangle \,,$$

e $\mathcal{O}$ è un'orbita.

Per azioni hamiltoniane di tori vale un teorema di convessità di Atiyah, Guillemin e Sternberg [3, 5]: se (N, ω) è una varietà simplettica compatta, T un toro che agisce su N in modo hamiltoniano, $\mu : N \to \mathfrak{t}^*$ la mappa momento della T-azione hamiltoniana e F è l'insieme dei punti fissi della T-azione, allora

- $\mu(F)$ è finito;
- $\mu(N)$ è l'inviluppo convesso di $\mu(F)$;
- $\dim H^*(N,\mathbb{Z}) = \dim H^*(C_X,\mathbb{Z})$ per ogni $X \in \mathfrak{t}$, dove C_X è l'insieme dei punti critici di f_X e H^* è l'anello di coomologia.

Per una varietà di bandiera complessa (orbita coaggiunta) $\mathcal{O}_\eta$, considerato il toro massimale T, si ha che $\mu(F) = \mathcal{O}_\eta \cap \mathfrak{t}$ è un'orbita del gruppo di Weyl. Nel caso di SU(3) e $\mathcal{O} = F_{1,2,3}$, l'immagine della mappa momento è l'interno del poligono rappresentato in figura.



Appendice A

Richiami di geometria differenziale

Definizione 27 *Una* varietà differenziabile liscia *n-dimensionale M è uno spazio topologico di Hausdorff dotato di una base numerabile di aperti (secondo assioma di contabilità) tale che*

- *per ogni punto $x \in M$ esiste una coppia (U, Φ) detta* carta*, dove U è un intorno di x e $\Phi : U \to \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo;*
- *date due carte (U, Φ) e (V, Ψ) con $U \cap V \neq \emptyset$ la funzione $\Psi \circ \Phi^{-1}$: $\Phi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ come mappa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Definizione 28 *Un'applicazione $\phi : M \to N$ tra due varietà di dimensione rispettivamente m e n si dice* differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ *o* liscia *se per ogni coppia di carte (U, Φ) su M e (V, Ψ) su N con $\phi(U) \cap V \neq \emptyset$ la mappa $\Psi \circ \phi \circ \Phi^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ come mappa $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.*

Un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ il cui inverso sia anche di classe $\mathcal{C}^\infty$ prende il nome di diffeomorfismo*.*

Un'applicazione $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \to M$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ è una curva (parametrizzata) liscia *su M, passante per $x = \gamma(0)$.*

Un'applicazione $f : M \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ è una funzione (reale) liscia *su M; l'insieme delle funzioni lisce sulla varietà M viene indicato con $\mathcal{F}(M)$ ed è un'algebra associativa con l'usuale combinazione lineare e moltiplicazione di funzioni.*

Definizione 29 *Un* campo vettoriale (liscio) *X sulla varietà differenziabile M è una* derivazione *dell'algebra $\mathcal{F}(M)$, cioè un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $\mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ che soddisfa la regola di Leibniz:*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)\,.$$

L'insieme dei campi vettoriali su M si indica con $\mathfrak{X}(M)$ ed è un $\mathcal{F}(M)$-modulo.

Una curva γ passante per $x \in M$ è tangente in x al campo vettoriale X se, per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(\gamma(t)) = \Big[X(f)\Big](x)\,.$$

Proposizione 36 *Il commutatore di due derivazioni è ancora una derivazione, e quindi dati due campi vettoriali X e Y è possibile definire il campo vettoriale*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))\,.$$

La parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]$ *è $\mathbb{R}$-bilineare, antisimmetrica e soddisfa l'identità di Jacobi; $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. Quindi l'insieme $\mathfrak{X}(M)$ considerato come spazio vettoriale reale, anziché come modulo su $\mathcal{F}(M)$, è un'algebra di Lie (generalmente di dimensione infinita).*

Definizione 30 *Il duale $\mathfrak{X}^*(M)$ di $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{F}(M)$-modulo è l'insieme di tutti gli operatori $\mathcal{F}(M)$-lineari $\mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$. Un elemento di $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ è detto* 1-forma differenziale (liscia) *e la sua applicazione su di un campo vettoriale X si indica con $\langle\theta, X\rangle$. Il* differenziale *di una funzione $f \in \mathcal{F}(M)$ è la 1-forma $\mathrm{d}f$ tale che, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\langle \mathrm{d}f, X\rangle = X(f)\,.$$

Definizione 31 *Su di una varietà differenziabile M, un* campo tensoriale (liscio) *r volte* controvariante *e s volte* covariante*, detto anche* tensore di tipo (r, s)*, è un operatore $\mathcal{F}(M)$-multilineare*

$$\underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathcal{F}(M)\,.$$

In particolare i campi vettoriali sono campi tensoriali di tipo $(1, 0)$, le 1-forme sono campi tensoriali di tipo $(0, 1)$ e le funzioni sono campi tensoriali di tipo $(0, 0)$. L'insieme dei tensori di tipo (r, s) verrà indicato con $\mathfrak{X}^{r,s}(M)$.

Un tensore ω, k volte covariante e antisimmetrico*, cioè tale che $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ cambi segno per ogni scambio dei campi vettoriali X_i, prende il nome di k-forma differenziale. L'insieme di tutte le k-forme viene indicato con $\Omega^k(M)$.*

Definizione 32 *Il* differenziale esterno *della k-forma ω è la $(k + 1)$-forma*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_0, X_1, \ldots, X_k) \;&=\; \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) + \\ &\quad \sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k)\end{aligned}$$

dove $\hat{X}_i$ indica che si è omesso il campo vettoriale X_i.

Esempio 35 *Il differenziale esterno di una funzione coincide con il differenziale ordinario. Il differenziale esterno di una* 1*-forma* θ *è*

$$\mathrm{d}\theta(X,Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y])$$

in componenti: $(\mathrm{d}\theta)_{ij} = \partial_i\theta_j - \partial_j\theta_i$*. Il differenziale esterno della* 2*-forma* ω *è*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) + Y(\omega(Z,X)) + Z(\omega(X,Y)) \\ &\quad -\omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y) \end{aligned}$$

cioè, in componenti: $(\mathrm{d}\omega)_{ijk} = \partial_k\omega_{ij} + \partial_i\omega_{jk} + \partial_j\omega_{ki}$.

Definizione 33 *Dato un campo vettoriale* X *e una* $(k+1)$*-forma* ω *il loro* prodotto interno *è la* k*-forma*

$$i_X\omega(X_1,\dots,X_k) = \omega(X,X_1,\dots,X_k)\,.$$

Nel prodotto interno si satura quindi il primo argomento della forma.

Definizione 34 *Sia* X *un campo vettoriale. La* derivata di Lie *di una funzione* f *lungo* X *è*

$$L_X f = X(f)\,,$$

la derivata di Lie *di un campo vettoriale* Y *lungo* X *è*

$$L_X Y = [X,Y]$$

e la derivata di Lie *dei una* 1*-forma* α *lungo* X *è definita da*

$$L_X\alpha(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y])\,.$$

Dato ora un tensore $T \in \mathfrak{X}^{r,s}(M)$ *la sua* derivata di Lie *lungo* X *è definita dalla formula generale*

$$\begin{aligned} (L_XT)(\alpha_1,\dots,\alpha_r,X_1,\dots,X_s) &= X(T(\alpha_1,\dots,\alpha_r,X_1,\dots,X_s)) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{r} T(\alpha_1,\dots,L_X\alpha_i,\dots,\alpha_r,X_1,\dots,X_s) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{s} T(\alpha_1,\dots,\alpha_r,X_1,\dots,L_XX_i,\dots,X_s)\,. \end{aligned}$$

Teorema 37 *Dati il campi vettoriali* X *e* Y *e la forma differenziale* θ*, valgono le seguenti relazioni:*

1. $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$;
2. $i_X^2 = i_X \circ i_X = 0$;
3. $L_{[X,Y]} = L_XL_Y - L_YL_X$;

4. $i_{[X,Y]}\theta = L_X i_Y \theta - i_Y L_X \theta$;

5. *formula di Cartan:* $L_X\theta = \mathrm{d}i_X\theta + i_X\mathrm{d}\theta$.

Definizione 35 *Dato un diffeomorfismo tra varietà differenziabili* $\phi : M \to N$ *è possibile definire, per ogni tipo di tensore, il* pull-back $\phi^* : \mathfrak{X}^{r,s}(N) \to \mathfrak{X}^{r,s}(M)$ *e il* push-forward $\phi_* : \mathfrak{X}^{r,s}(M) \to \mathfrak{X}^{r,s}(N)$.

Il pull-back di una funzione $g \in \mathcal{F}(N)$ *è l'unica funzione su* M *definita da* $f = \phi^* g = g \circ \phi$, *viceversa* $g = \phi_* f = f \circ \phi^{-1}$ *è il push-forward di* f.

Il pull-back di un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *è l'unico campo vettoriale* $X = \phi^* Y \in \mathfrak{X}(M)$ *tale che, per ogni* $f \in \mathcal{F}(M)$

$$X(f) = Y(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi\,,$$

viceversa $Y = \phi_* X$ *è il push-forward di* X.

Il pull-back di una 1*-forma* $\beta \in \mathfrak{X}^*(N)$ *è l'unica* 1*-forma* $\alpha = \phi^*\beta \in \mathfrak{X}^*(M)$ *tale che, per ogni* $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle \alpha, X\rangle = \langle \beta, \phi_* X\rangle \circ \phi\,;$$

viceversa $\beta = \phi_*\alpha$ *è il push-forward di* α.

Infine, il pull-back di un tensore S *di tipo* (r,s) *su* N *è l'unico tensore* $T = \phi^* S$ *di tipo* (r,s) *su* M *definito da*

$$T(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,X_1,\ldots,X_s) = S(\phi_*\alpha_1,\ldots,\phi_*\alpha_r,\phi_*X_1,\ldots,\phi_*X_s)\circ\phi\,,$$

mentre $S = \phi_* T$ *è il push-forward di* T.

Teorema 38 *Siano* ϕ *e* ψ *diffeomorfismi,* X *e* Y *campi vettoriali,* ω *una* k*-forma e* T *un campo tensoriale. La notazione* $\phi\cdot T$ *indichi indistintamente il pull-back* ϕ^*T *o il push-forward* ϕ_*T. *Valgono allora le seguenti proprietà:*

1. $\phi_* = (\phi^{-1})^*$, $\phi^*\phi_* T = T$;

2. $(\phi\circ\psi)_* = \phi_*\circ\psi_*$, $(\phi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\phi^*$;

3. $\phi\cdot(T(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,X_1,\ldots,X_s)) = (\phi\cdot T)(\phi\cdot\alpha_1,\ldots,\phi\cdot\alpha_r,\phi\cdot X_1,\ldots,\phi\cdot X_s)$;

4. $\phi\cdot[X,Y] = [\phi\cdot X,\phi\cdot Y]$;

5. $\phi\cdot(i_X\omega) = i_{\phi\cdot X}(\phi\cdot\omega)$;

6. $\phi\cdot(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\phi\cdot\omega)$;

7. $\phi\cdot(L_X T) = L_{\phi\cdot X}\phi\cdot T$.

Teorema 39 *Dato un campo tensoriale* T, *un campo vettoriale* X *e il suo flusso* ϕ_t *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^* T = \phi_t^* L_X T\,.$$

In particolare dato il campo vettoriale Y

$$[X,Y] = L_X Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \phi_t^* Y\,.$$

Bibliografia

[1] Abraham R., Marsden J. E., *Foundations of Mechanics*, II ed., Benjamin/Cummings Publishing Co., 1978.

[2] Abraham R., Marsden J. E., Ratiu T., *Manifolds, Tensor Analisys , and Applications*, II ed., App. Math. Sc. **75**, Springer-Verlag, 1988.

[3] Atiyah M., Convexity and commuting hamiltonians, Bull. Lond. Math. Soc. **14** (1982), 1-15.

[4] Calabi E., *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, in *Problems in analysis*, Princeton University Press, 1970.

[5] Guillemin V., Sternberg S., Convexity properties of the moment mapping, Invent. Math. **67** (1982), 491-513.

[6] Lee J., *Introduction to smooth manifolds*, Grad. Texts Math. **218**, Springer-Verlag, 2003.

[7] Liberman P., Marle C.-M., *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Reidel, 1987 .

[8] Marsden J. E., Ratiu T., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Text App. Math. **17**, Springer-Verlag, 1994.

[9] Ortega, J.-P., Ratiu T., *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Prog. Math. **222**, Birkhäuser, 2004.

[10] Warner F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts Math. **94**, Springer-Verlag, 1983.