Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

D. Romagnoli

Algebra del calcolo combinatorio Laboratorio SIS a.a. 2000/2001

Quaderno # 2 - Maggio 2001

PREFAZIONE

In questo quaderno didattico è contenuta la traccia delle lezioni da me tenute nel laboratorio didattico svolto presso la SIS di Torino nell'anno accademico 2000-2001 .
Le lezioni hanno lo scopo di richiamare i prerequisiti necessari al docente per una presentazione elementare, ma rigorosa , di alcune tematiche del calcolo combinatorio .
Scopo del laboratorio è quello di rendere il materiale presentato nelle lezioni comprensibile e fruibile da parte dei ragazzi della scuola superiore , sviluppando in essi la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente conoscenze a livelli più elevati di astrazione e di formalizzazione .
Per una più vasta trattazione dei temi presentati si rimanda alla bibliografia , che riporta i testi da me consigliati e usati dai frequentanti il laboratorio per la stesura di tesine didattiche attinenti gli argomenti trattati .

INDICE

.

CAPITOLO 1

I numeri naturali e il principio di induzione matematica .

Il calcolo combinatorio è una tecnica per contare il numero degli elementi (che si dice ordine o cardinalità) di particolari insiemi finiti . Alla base del contare vi sono l'insieme N dei numeri naturali, a tutti ben noto fin dalle scuole elementari , e le sue proprietà .

L'insieme N dei numeri naturali viene formalmente determinato dai cinque assiomi seguenti , dovuti al matematico Giuseppe Peano (1858-1931) :

i) 0 è un numero naturale

ii) ad ogni numero naturale n corrisponde un altro numero naturale, unico, detto successore di n

iii) due numeri naturali distinti hanno due successori distinti

iv) 0 non è il successore di nessun numero naturale

v) qualunque sottoinsieme A di N avente le due proprietà

a) $0 \in A$
b) per tutti gli $n \in N$, $n \in A \Rightarrow$ il successore di $n \in A$

deve essere l'insieme N

L'assioma v) viene detto principio di induzione matematica .
Invece di $n \in A$ si può dire " n ha la proprietà P " . Con questa terminologia il principio di induzione matematica diventa l'assioma seguente :

v') qualsiasi proprietà dei numeri naturali valida per 0 e valida per il successore di n ogniqualvolta valga per n vale per tutti i numeri naturali .

Dagli assiomi di Peano si può dedurre formalmente tutta l'aritmetica ; il primo passo consiste nello introdurre l'operazione di somma di numeri naturali , in base alla quale , indicato con 1 il successore di 0 , si trova subito che il successore di n è n+1 , e l'operazione di moltiplicazione e nel dimostrarne le proprietà . Non ci inoltriamo in queste definizioni , accenniamo solo al fatto che, a partire dagli assiomi di Peano è possibile dotare N di un ordinamento totale , il consueto ordinamento secondo grandezza , definito come la relazione $\leq$ seguente :

$$\text{dati } m, n \in N , m \leq n \Leftrightarrow \exists\, x \in N \text{ tale che } m+x = n$$

Si può provare che tale relazione è una relazione di ordine totale verificante la seguente proprietà :

v") dato comunque un sottoinsieme non vuoto A di N , A possiede un primo elemento , cioè un elemento m tale che

$$m \leq a , \forall a \in A .$$

Diciamo allora che la relazione data è un buon ordinamento e che l'insieme N è bene ordinato .

La proprietà v") può venire assunta come quinto assioma al posto del principio di induzione matematica . In tal caso è semplice dimostrare la validità del principio di induzione : assumiamo quindi che N sia un insieme bene ordinato e dimostriamo il

Principio di induzione matematica (1ª forma) .

Sia (P(n)) una successione di proposizioni tali che

i) P(0) (P(n_0)) è vera (base dell'induzione)
ii) La verità di P(k) implica la verità di P(k + 1) , $k \geq 0$ (n_0) (ipotesi induttiva)

Allora P(n) è vera , $\forall n \geq 0$ (n_0) .

Dimostrazione . Sia $S = \{x > 0\ (n_0)\ |\ P(x)$ è falsa $\}$. Supponiamo , per assurdo , che S non sia vuoto. Per l'assioma del buon ordinamento di N , S ha un primo elemento , che indichiamo con m Consideriamo ora la proposizione P(m) : poiché $m \in S$, P(m) è falsa ; inoltre , poiché m è il primo elemento di S , $m - 1 \notin S$ (e $m - 1 \geq 0$ (n_0)) , quindi la proposizione P(m-1) è vera e la ii) ci dice allora che P(m) è vera . Abbiamo una contraddizione , dunque S è vuoto .

In modo del tutto analogo si dimostra il

Principio di induzione matematica (2ª forma) .

Sia (P(n)) una successione di proposizioni tali che

i) P(0) (P(n_0)) è vera (base dell'induzione)
ii) La verità di P(k), $\forall\ 0\ (n_0) \leq k < m$, implica la verità di P(m) (ipotesi induttiva)

Allora P(n) è vera , $\forall n \geq 0$ (n_0) .

Il principio di induzione matematica si rivela molto utile per dimostrare proposizioni il cui enunciato dipenda da $n \in N$. Vediamone negli esempi l'uso corretto .

Esempi 1.1

1) Si provi la validità della formula di Gauss : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Soluzione : in questo caso P(n) è l'affermazione : la somma dei primi n naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$

Base dell'induzione : $1 = 1 \cdot 2 / 2$, quindi P(1) è vera

Ipotesi induttiva : P(k) è vera , cioè $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Proviamo la verità di P(k + 1) :

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Il principio di induzione matematica (1° forma) ci permette di concludere che P(n) è vera ,$\forall n \geq 1$.

Dalla formula di Gauss segue subito la formula che ci dà la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di termine iniziale a e di ragione d

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} ,$$

che naturalmente può essere dimostrata indipendentemente per induzione su n .

Lasciamo per esercizio la verifica della formula che dà la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di termine iniziale a e ragione $q \neq 1$:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = (a - aq^n) / (1 - q)$$

2) Come esempio di applicazione del principio di induzione matematica nella 2^a forma , dimostriamo la nota proposizione P(n) : ogni numero naturale n > 1 può essere fattorizzato in un prodotto di numeri primi .

Base dell'induzione . P(2) è vera : infatti 2 è un numero primo ed è lui la sua fattorizzazione.
Ipotesi induttiva : vale P(k) , $\forall\ 2 \leq k < m$

Proviamo P(m) . Abbiamo due casi :
i) m è primo ed è lui la sua fattorizzazione
ii) m non è primo , allora $m = m_1 m_2$, con $2 \leq m_1, m_2 < m$. Per l'ipotesi induttiva m_1 e m_2 fattorizzano in numeri primi e così avviene quindi per m .

Un altro classico esempio di utilizzo della 2^a forma del principio di induzione matematica è la dimostrazione dell'algoritmo di divisione in N :

$$\forall\ m , n \in N , m>0, n\geq 0 , \exists q,r \in N\ (0 \leq r < m)\ \big|\ n = qm + r$$

Dimostrazione : Per induzione sul numero n .

Se n = 0 (base dell'induzione) , basta porre q = r = 0, ottenendo P(0).
Se m > n , basta porre q = 0 e r = n < m .
Se $m \leq n$, supponiamo P(k) vera , $\forall 0 \leq k < n$ (ipotesi induttiva) e proviamo P(n).

Poiché $m \leq n$, $0 \leq n - m < n$ e P(n-m) vale .Quindi esistono q' e r', con $0 \leq r' < m$ tali che $n-m = q'm + r'$ da cui $n = (q'+1)m + r'$.

3) Chiamiamo n- stringa binaria una sequenza di n cifre scelte tra 0 e 1 . Proviamo , per induzione su n , che il loro numero è 2^n

Base dell'induzione : le 1-stringhe binarie sono 2 , precisamente 0 e 1 .
Ipotesi induttiva : supponiamo che le k-stringhe binarie siano in totale 2^k .

Costruiamo le k + 1 – stringhe binarie , conoscendo quelle di lunghezza k : possiamo procedere premettendo la cifra 0 a tutte e poi ripetere il procedimento premettendo 1 . Otteniamo così $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ k + 1 – stringhe .

4) L'induzione permette di risolvere semplici problemi combinatorici quali , per esempio :
ogni affrancatura di importo maggiore o uguale a otto centesimi di euro può essere ottenuta usando solamente francobolli da tre e da cinque centesimi di euro.

Soluzione : La base induttiva è ovviamente vera : 8 = 5 + 3 .
Ipotesi induttiva : l'affermazione è vera per un importo di k centesimi , ottenibile con h francobolli da tre e con n francobolli da cinque centesimi (k = h3 + n5).
Se n = 0 , h ≥3 e $k + 1 = h3 + 1 = (h – 3)3 + 2 \cdot 5$ (invece di tre francobolli da tre ne abbiamo due da cinque).
Se n ≥1 , $k + 1 = h3 + n5 + 1 = (h + 2)3 + (n – 1)5$ (abbiamo due francobolli da tre invece di uno da cinque).

CAPITOLO 2

Teoria degli insiemi : alcuni problemi combinatorici .

In questo capitolo prenderemo in considerazione degli insiemi finiti particolari .
Premettiamo che se I è un insieme contenente solo un numero finito di elementi , tale numero è un numero naturale , detto ordine o cardinalità di I , e indicato con $|I|$ oppure con # I .
Un insieme finito I ha ordine 0 se e solo se I = $\emptyset$ e ha ordine n $\geq$ 1 se e solo se è in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme $I_n = \{1,\ldots,n-1,n\}$ di N .
Se I è un insieme finito di ordine n e A è un suo sottoinsieme di ordine m , allora m $\leq$n , cioè $|A| \leq |I|$ (per questo tipo di considerazioni si veda anche il capitolo sulle corrispondenze tra insiemi) .
Ricordiamo che , dato un insieme I , finito o infinito , si dice suo insieme delle parti , o insieme potenza l'insieme

$$P(I) = \{A \mid A \subseteq I \}.$$

P(I) non è mai vuoto (ogni insieme I ha i sottoinsiemi banali $\emptyset$ e I stesso) , se I è infinito anche P(I) contiene infiniti elementi , se I è finito vale la

Proposizione 2.1 Sia I un insieme finito di ordine n . Allora P(I) ha 2^n elementi .

Dimostrazione . Per induzione su n = $|I|$.

Base dell'induzione : n = 0 . In questo caso I = $\emptyset$ e P(I) = $\{\emptyset\}$.Quindi $|P(I)| = 2^0 = 1$
Ipotesi induttiva : supponiamo n > 0 e la proprietà vera per un insieme di n – 1 elementi .

Sia I = $\{a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\}$ e fissiamo la nostra attenzione su a_n . I sottoinsiemi di I che non lo contengono sono esattamente i sottoinsiemi di I - $\{a_n\}$, quindi sono 2^{n-1}, per l'ipotesi induttiva .
I sottoinsiemi di I che lo contengono sono del tipo $A\cup\{a_n\}$, dove A è un sottoinsieme di I - $\{a_n\}$, quindi anch'essi sono 2^{n-1} . In totale dunque i sottoinsiemi di I sono $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Vedremo altre dimostrazioni di questa proposizione (con il metodo delle scelte e con le funzioni tra insiemi finiti) .

Esercizio 2.1 Costruire l'insieme delle parti di I_3 = {1,2,3} , osservando che gli 8 elementi che lo formano si costruiscono in modo induttivo (o ricorsivo) .

Dalla definizione di unione e di intersezione di insiemi , segue subito la

Proposizione 2.2 Siano A e B due insiemi finiti disgiunti di ordine n ed m rispettivamente.
Allora

$$|A \cup B| = |A| + |B| = n + m$$

e da questa la

Proposizione 2.3 Siano A e B due insiemi finiti di ordine n ed m rispettivamente e sia k l'ordine di $A \cap B$. Allora

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|,$$

cioè $$|A \cup B| = n + m - k$$

Dimostrazione. $|A \cup B| + |A \cap B| = |A \cup (B - A)| + |A \cap B| = |A| + |B - A| + |A \cap B|$, poichè A e B – A sono disgiunti . Anche B – A e $A \cap B$ sono disgiunti , quindi

$$|B - A| + |A \cap B| = |(B - A) \cup (A \cap B)| = |B|,$$

da cui la tesi .

Queste due evidenti proposizioni risultano utili per risolvere semplici problemi combinatorici

La proposizione 2.1 si estende facilmente,per induzione su n,al caso di n insiemi disgiunti: precisamente si prova che , detti A_i (i = 1,…,n) gli insiemi disgiunti ,

$$|\cup A_i| = \Sigma |A_i|, \ (i = 1,\dots,n) .$$

Come conseguenza otteniamo l'ordine del prodotto cartesiano di due insiemi finiti .

Corollario 2.4 Siano A e B due insiemi finiti di ordine n e m rispettivamente .Allora

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = nm$$

Dimostrazione . Siano $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ e $B = \{b_1,\dots,b_m\}$. Il loro prodotto cartesiano può essere costruito come l'unione degli n insiemi disgiunti

$$A_i = \{ (a_i, b_1), \dots, (a_i, b_m)\} , \ i = 1, \dots ,n$$

aventi ognuno ordine m , da cui la tesi .

Osservazione 2.1 Disponendo in colonna e in riga gli n elementi di A e gli m elementi di B , il prodotto cartesiano A x B può essere visualizzato come una tabella di nm quadretti .

Il corollario 2.4 motiva il " metodo delle scelte " , di cui si fa un grande uso in combinatorica e in molte applicazioni della vita pratica :

Supponiamo di voler contare in quanti modi si può costruire una coppia (a,b) , se a appartiene a un insieme con n elementi e b ad uno con m elementi , cioè se posso scegliere a in n modi e b in m modi . Il corollario 2.4 dice che la coppia (a,b) può essere costruita in nm modi .

Tale metodo , da noi giustificato sopra , viene anche chiamato “ principio di moltiplicazione delle scelte “ e così formulato :

Se una scelta può essere compiuta in n modi diversi e , per ciascuno di essi ,una seconda scelta può essere compiuta in m modi diversi , allora la successione delle due scelte può essere effettuata in $n \cdot m$ modi distinti .

In modo naturale tutto quanto visto per il prodotto cartesiano di due insiemi finiti si estende al caso del prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi finiti .

Il “ principio di moltiplicazione delle scelte “ (anche nella sua forma estesa a più di due scelte) ci permette di risolvere molti problemi combinatorici .

Esempio 2.1 Usiamo il metodo delle scelte per dimostrare la proposizione 2.1 .
Sia $I = \{a_1,\dots,a_n\}$. Vogliamo contare i modi per costruire un sottoinsieme A di I . Ogni elemento di A può appartenere o non appartenere ad A , cioè abbiamo due possibilità di scelta per ogni a_i , $i = 1,\dots,n$.
Vi sono quindi $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ modi per costruire A , da cui la tesi .
In altre parole , potremmo pensare di indicare con 1 l’appartenenza di un elemento di I al sottoinsieme A e con 0 la non appartenenza : in questo modo ogni sottoinsieme di I è una stringa di lunghezza n di due cifre (per esempio , per n = 4 , la stringa 1010 indica il sottoinsieme $\{a_1,a_3\}$ di $\{a_1,a_2 ,a_3, a_4\}$) e tali stringhe sono in totale 2^n (vedi l’esempio 3) di esempi 1.1, p.4) .

Esercizi 2.2

1) Quanti oggetti possiamo differenziare con delle targhe di due simboli di cui il primo è una lettera dell’alfabeto latino e il secondo è una cifra da 0 a 9 ?

   Le lettere possono essere scelte in 26 modi , le cifre in 10 modi : possiamo costruire 260 targhe diverse .

2) Supponiamo che il menu di un ristorante consista di 5 antipasti , 6 primi , 6 secondi e 4 dolci : quanti pasti completi (di quattro piatti) possiamo ordinare ?

   Le quaterne ordinate (e quindi le scelte possibili) sono $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720$.

3) Quanti numeri di sei cifre hanno almeno una cifra pari ?

   Abbiamo dieci cifre (0,1,…,9) : di queste ve ne sono cinque pari (0,2,4,6,8) e cinque dispari (1,3,5,7,9) . Vi sono $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10=900000$ numeri con sei cifre (per la prima cifra

devo escludere lo 0 e quindi ho 9 scelte anziché 10) e $5^6 = 15625$ numeri con sei cifre tutte dispari
I numeri di sei cifre aventi almeno una cifra pari sono quindi $900000 - 15625 = 884375$.

4) In una regione vi sono venti città , collegate a coppie da una strada comunale . Quante strade comunali possiede la regione in questione ?

Osserviamo che ogni strada collega due diverse città . Abbiamo 20 scelte diverse per la partenza e 19 per l'arrivo di una strada : le scelte possibili sono quindi $20 \cdot 19$.
In tal modo però ogni strada ab è stata contata due volte : una volta con a città di partenza e b di arrivo e una volta con b partenza e a arrivo ; ne segue che il numero cercato è $(20 \cdot 19) : 2 = 190$.

5) Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati ?

Osserviamo che ognuno degli n vertici può essere scelto come primo punto di una diagonale , mentre come scelta per il secondo punto dobbiamo escludere il vertice in questione e i due a lui adiacenti . Abbiamo dunque $n - 3$ scelte per il secondo punto di ogni diagonale ed n scelte per il primo . Il prodotto delle scelte deve però essere diviso per due , per le stesse argomentazioni di 4) .
Dunque le diagonali di un n-gono sono $\frac{n(n-3)}{2}$.

CAPITOLO 3

Corrispondenze tra insiemi .

3.1 Corrispondenze tra insiemi .

Definizione 3.1.1 Si definisce corrispondenza dell'insieme I nell'insieme I' un sottoinsieme F del prodotto cartesiano I x I'.

F esprime un "legame" tra gli elementi di I e gli elementi di I' : precisamente dice che l'elemento x di I è legato all'elemento x' di I' se e solo se la coppia ordinata (x,x') appartiene a F. Diciamo allora che x' è una immagine di x nella corrispondenza F e che x è una controimmagine di x'nella corrispondenza F .
I è detto dominio della corrispondenza.
I' è detto codominio della corrispondenza.

Esempio 3.1.1 Dati I ={a,b,c } e I' = {1,2,3 } è una corrispondenza di I in I'l'insiemeF={(a,2),(c,3),(c,2)}. Visualizzarla mediante un diagramma di Eulero –Venn .

Definizione 3.1.2 Una corrispondenza è detta :

funzionale se ogni x di I ha al più una immagine
ovunque definita se ogni x di I ha almeno una immagine
iniettiva se ogni elemento di I' ha al più una controimmagine (o equivalentemente se elementi distinti hanno immagini distinte)
suriettiva se ogni elemento di I' ha almeno una controimmagine

La corrispondenza dell'esempio 3.1.1 non ha nessuna di queste proprietà .
Le corrispondenze più importanti sono quelle ovunque definite e funzionali : esse sono dette funzioni e sono i sottoinsiemi F di I x I' in cui ogni elemento x di I è primo elemento di una e una sola coppia .

Il concetto di funzione è basilare in matematica ; ne diamo un'altra definizione equivalente a quanto detto finora .

Definizione 3.1.3 Dato un insieme I (detto dominio) e un insieme I' (detto codominio) , una funzione f di I in I' è una legge che associa ad ogni elemento di I uno ed un solo elemento di I' . Scriveremo

$$f : I \to I'$$

e per indicare che x viene mandato in x'scriveremo $x \to x'$ oppure

$$f(x) = x'.$$

x’ è detto l’ immagine di x ; x è detta una controimmagine di x’ .

La legge f sopra definita come sottoinsieme di I x I’ è l’insieme $F = \{(x,x') \mid x' = f(x)\}$.
F viene in tal caso detto grafo (o grafico) di f . Nel caso di funzioni reali di variabile reale l’insieme F è l’insieme dei punti appartenenti al grafico della funzione nel piano cartesiano .

Osservazione 3.1.1 In qualche caso una funzione può essere identificata con la sequenza delle immagini degli elementi del dominio : è il caso , per esempio, delle successioni (o progressioni) .
Si dice successione a valori in un insieme C (codominio , negli esempi più noti R) una funzione a avente come dominio l’insieme N . Si scrive :

$$a(0),a(1),\ldots,a(n),\ldots$$

o, come è più abituale,

$$a_0 ,a_1,\ldots,a_n,\ldots$$

Così la successione

$$1,2,2^2,2^3,\ldots,2^n,\ldots$$

è il modo usuale per rappresentare la funzione $f : N \to R$, $f(n) = 2^n$. f è iniettiva e non suriettiva .

Sono particolarmente importanti, nel calcolo combinatorio , le funzioni tra insiemi finiti iniettive , suriettive e quelle aventi entrambe le proprietà : le biiezioni o corrispondenze biunivoche , su cui torneremo nel seguito .

Richiamiamo ancora la composizione di funzioni :

Definizione 3.1.4 Date due funzioni $f : I \to I'$ e $g : I' \to I''$ si dice funzione composizione (o funzione composta) di f e di g la funzione $g \circ f$ di I in I” così definita : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
In termini di grafo , indicati con F e G i grafi di f e g rispettivamente e con H il grafo della loro composizione , abbiamo

$$H = \{ (x,x'') \in I \times I'' \mid \exists\, x' \in I' , (x,x') \in F \text{ e } (x',x'') \in G \} .$$

E’ immediato verificare che la composizione di due funzioni è una operazione associativa e che la composizione di due funzioni iniettive è iniettiva , di due suriettive è suriettiva . Da ciò segue che la composizione di due biiezioni è ancora una biiezione .
Data una biiezione f , la sua funzione inversa secondo la

Definizione 3.1.5 Se $f : I \to I'$ è una biiezione , si definisce inversa di f la funzione $f^{-1} : I' \to I$ che associa ad ogni x’ di I’ l’unico x tale che $f(x) = x'$

è ancora una biiezione .

Sono esempi di biiezioni le permutazioni di n oggetti che tratteremo in seguito .

3.2 Corrispondenze tra insiemi finiti .

Ogni insieme finito con n elementi $A = \{a_1, \dots ,a_n \}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $I_n = \{ 1 ,2 , \dots , n \}$(suo insieme di indici) , quindi è sufficiente ragionare con tali insiemi .
Enunciamo alcune proprietà di tipo combinatorico .

Proposizione 3.2.1 Le corrispondenze tra I_n e I_m sono 2^{nm} .

Dimostrazione . Le corrispondenze sono tante quante i sottoinsiemi del prodotto $I_n \times I_m$, che sono 2^{nm} .

Proposizione 3.2.2 Le funzioni di I_n in I_m sono m^n .

Dimostrazione . Con l'induzione su n .
Se n=1, si hanno $m = m^1$ funzioni di I_1 in I_m , poiché una singola funzione è assegnata dando l'immagine di 1 .
Supponiamo vera la proprietà per n e proviamola per n + 1 .
Una funzione f di I_{n+1} in I_m si ottiene dando una funzione g di I_n in I_m ed una immagine ad n + 1 .
Poichè le g ,per l'ipotesi induttiva, sono m^n ne segue che vi sono m^n funzioni che mandano n + 1 in 1 , m^n funzioni che mandano n + 1 in 2 , … , m^n funzioni che mandano n + 1 in m cioè $m \cdot m^n = m^{n+1}$ funzioni di I_{n+1} in I_m c.v.d.

Dimostrazione . Con il metodo delle scelte .
Dare una funzione di I_n in I_m significa dare f(1) ,f(2),…,f(n) . Per f(1) ho m scelte , tante quanti sono gli elementi del codominio , per f(2) ho ancora m scelte ,…, così per f(n) . In totale avrò $m\,m \dots m = m^n$ scelte .

Osservazione 3.2.1 Diamo la traccia di una dimostrazione della proposizione 2.1 :

$$|I| = n \Rightarrow |P(I)| = 2^n$$

che usa quanto sopra dimostrato .
Per ogni sottoinsieme A di I , sia $\varphi_A : I \to \{0,1\}$ la funzione così definita :

$$\varphi_A(x) = 0 \ \text{, se } x \notin A$$
$$\varphi_A(x) = 1 \ \text{, se } x \in A$$

φ_A è detta la funzione caratteristica di A .
Sia f : P(I) →{ funzioni di I in {0,1}} la funzione così definita : $f(A) = \varphi_A$.
Si prova che f è una biiezione e da questo segue che l'ordine di P(I) è pari all'ordine dell'insieme delle funzioni di un insieme con n elementi in un insieme con 2 elementi , che abbiamo provato essere 2^n.

Osservazione 3.2.2 Una funzione di un insieme con n elementi in un insieme di m elementi può essere vista come una n-pla ordinata di elementi scelti tra m , con possibilità di ripetizioni . Per questo motivo tali funzioni sono anche dette disposizioni con ripetizione : per quanto provato sopra il numero delle disposizioni con ripetizione di m elementi a n a n è m^n .

Esempio 3.2.1 Le funzioni di I_3 in I_2 sono identificabili con le 8 terne (1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2) , (2,1,1) , (2,1,2) , (2,2,1) , (2,2,2) . La prima è la funzione costante di valore 1 , la seconda è la funzione che manda 1 in 1, 2 in 1,3 in 2 , … , l'ultima è la funzione costante di valore 2 .

Esempio 3.2.2 Vogliamo calcolare il numero delle colonne tra loro diverse che si possono giocare al totocalcio . Come è noto , il gioco consiste nell'assegnare uno dei tre simboli 1 , x , 2 ad ognuna delle 13 partite . Ogni colonna può essere identificata con una sequenza ordinata di elementi scelti tra 1,x,2 e quindi con una funzione di un insieme con 13 elementi (le tredici partite) in un insieme con 3 elementi (i tre simboli citati) . Le colonne possibili sono quindi 3^{13} = 1594323 .Giocando tutte queste colonne si ha la certezza del tredici (purtroppo con una spesa superiore alla vincita !!) .

Proposizione 3.2.3 Sia f una funzione di I_n in I_m .

i) Se f è iniettiva , $n \leq m$
ii) Se f è suriettiva , $n \geq m$
iii) Se n = m , f è biiettiva se e soltanto se f è iniettiva o suriettiva .

Tralasciamo la dimostrazione della proprietà 3.2.3 , intuitiva ma non banale . Osserviamo che la proposizione contrapposta di i) (ad essa logicamente equivalente) : se n > m ,allora f non è iniettiva è detta principio dei cassetti (o principio delle gabbie dei piccioni) e può venire così riformulata (chiamando oggetti gli elementi di I_n e cassetti le loro immagini) :

se in m cassetti (gabbie) ho n > m oggetti (piccioni) , qualche cassetto (gabbia) contiene almeno 2 oggetti(piccioni).

La proprietà 3 ci dice anche che non possono esistere biiezioni tra insiemi finiti di ordini diversi , quindi , in particolare, tra un insieme finito e un suo sottoinsieme proprio .
Al contrario , un insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio : per esempio la funzione $f : Z \to 2Z$, f(x) = 2x è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme Z dei numeri interi relativi e il suo sottoinsieme proprio 2Z (insieme dei numeri relativi pari).

Osservazione 3.2.3 Il principio dei cassetti può essere esteso , diventando il Principio generale dei cassetti (o delle gabbie dei piccioni) :

Se ho nk + 1 oggetti da riporre in n cassetti , qualche cassetto contiene almeno k + 1 oggetti.

Per k = 1 , si ritrova il principio enunciato prima (se ho n + 1 oggetti in n cassetti , qualche cassetto ne contiene almeno 2) .
La dimostrazione per assurdo di questa proposizione è la seguente : se ogni cassetto contenesse al più k oggetti , avremmo al più nk oggetti , contro l'ipotesi .

Esempio 3.2.3 Dobbiamo riporre 25 mele in 3 ceste : $25 = 3 \cdot 8 + 1$. Usando il principio generale dei piccioni con n = 3 e k = 8 , avremo che qualche cesta contiene almeno 8 + 1 = 9 mele

Esercizi 3.2.4 Con il principio generale dei cassetti si risolvono i seguenti esercizi :

1) Assumendo che nessun essere umano abbia più di un milione di capelli , provare che in una città con più di un milione di abitanti ci sono almeno due persone aventi lo stesso numero di capelli .

   Soluzione : Numeriamo da 0 a 1.000.000 dei cassetti virtuali e vediamo gli abitanti come gli oggetti con cui riempirli . Metteremo la persona nel cassetto x se e solo se essa possiede esattamente x capelli . Per il principio dei cassetti , ce n'è almeno uno contenente due persone , aventi quindi lo stesso numero di capelli .

2) Supponiamo che i numeri da 1 a 10 siano posizionati casualmente su una circonferenza . Allora la somma di qualche terna di numeri consecutivi è almeno 17 .

   Soluzione : Vi sono 10 terne di numeri consecutivi sulla circonferenza e ogni numero da 1 a 10 compare in tre di esse esattamente : indichiamo con $S_1,S_2,\dots S_{10}$ le somme di ognuna di esse . Da quanto osservato si ha che
   $S_1 + S_2 +\dots + S_{10} = 3 (1 + 2 +\dots+10) = 165$.
   E' come sistemare 165 oggetti in 10 cassetti : qualche S_i vale almeno 17 .

3) Su un quadrato di lato 1 metro vengono disegnati in modo casuale 51 punti . Provare che almeno 3 di questi punti giacciono su un quadrato di lato 20 centimetri .

   Soluzione : se dividiamo il quadrato iniziale in 25 quadrati di lato 20 centimetri , poiché
   $51 = 25 \cdot 2 + 1$, uno di essi contiene almeno 3 punti .

4) Dati dodici numeri interi diversi , provare che almeno due di essi possono essere scelti in modo che la loro differenza sia divisibile per 11 .

   Soluzione : I resti della divisione per 11 sono i numeri da 0 a 10 , quindi almeno due dei dodici interi divisi per 11 hanno lo stesso resto e quindi la loro differenza è un multiplo di 11 .

CAPITOLO 4

Permutazioni e disposizioni .

4.1 Le permutazioni di n elementi . Ritorniamo ad occuparci di biiezioni tra insiemi finiti . Premettiamo alcune notazioni .

Definizione 4.1.1 Dato un numero naturale $n > 0$, chiamiamo fattoriale di n il numero

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Si pone inoltre $0! = 1$.

Osservazione 4.1.1 n! cresce rapidamente al crescere di n : ne diamo i primi dieci valori

n	n!
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

Proposizione 4.1.1 Siano A e B due insiemi finiti dello stesso ordine n . Le biiezioni tra di essi sono n! .

Dimostrazione . Con l'induzione .
Sia $n = 1$ (Base dell'induzione) . Se A e B hanno un elemento ciascuno l'unica biiezione è quella che li fa corrispondere (e $1 = 1!$)
Ipotesi induttiva : supponiamo di sapere che tra due insiemi di ordine n-1 vi sono (n-1)! biiezioni . Sia ora A di ordine n : una biiezione di A in B (anch'esso di ordine n) si ottiene dando una biiezione su n-1 elementi e dando l'immagine dell'elemento rimasto : Si hanno così (n-1)! biiezioni con la stessa immagine per il primo elemento di A , (n-1)! con la stessa immagine per il secondo elemento di A ,…, (n-1)! con la stessa immagine per l'n-simo elemento di A .
In totale le biiezioni cercate sono $n \cdot (n-1)! = n!$

Dimostrazione . Con il metodo delle scelte .

Per individuare una biiezione , noti il dominio e il codominio , basta assegnare le n immagini degli n elementi del dominio . Ora , per l'immagine del primo elemento di A abbiamo n scelte (qualunque elemento di B) , per l'immagine del secondo elemento di A abbiamo n-1 scelte (per l'iniettività) , … , per l'immagine dell'n-simo elemento di A la scelta è unica .
Si possono dunque effettuare n! scelte : ad ognuna corrisponde una diversa biiezione di A in B .

Nel caso in cui i due insiemi A e B coincidano , le biiezioni di A in se stesso vengono dette **permutazioni** di A . Abbiamo così il

Corollario 4.1.1 Le permutazioni di un insieme di ordine n sono n!

Per comodità di scrittura poniamo , nel seguito , $A = I_n$ (identifichiamo in pratica gli elementi dell'insieme con i loro indici) e facciamo alcune considerazioni .
Ricordiamo che è notazione standard indicare con

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ f(1) & f(2) & . & . & . & f(n) \end{pmatrix}$$

la biiezione f che manda 1 in f(1) , 2 in f(2), … , n in f(n) .
Così , per esempio , per n = 4 , la scrittura

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

rappresenta la biiezione che manda 1 in 4 , 2 in 1 , 3 in 2 e 4 in 3 .

Con questa notazione diventa semplice comporre due permutazioni e trovare l'inversa di una permutazione . Vediamolo su un esempio .

Esempio 4.1.1 Sia n = 4 e siano f la permutazione precedente e g la seguente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$g \circ f$ è la permutazione che otteniamo applicando i due fattori successivamente (prima f poi g): possiamo pensare di scrivere su tre righe , omettendo poi il passaggio intermedio :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo la composizione cercata :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

L'inversa di una permutazione si ottiene scambiando le due righe e riordinando poi le colonne in modo che la prima riga diventi la riga 1 2 3 4 .
Scambiando le righe di f , abbiamo :

.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e, riordinando le colonne , abbiamo f^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordando che la composizione di funzioni è un operazione associativa e non commutativa , si ha la

Proposizione 4.1.2. L'insieme di tutte le permutazioni di un insieme di ordine n , rispetto all'operazione di composizione , è un gruppo non abeliano .

Tale gruppo , che ha un' importanza fondamentale all'interno della teoria dei gruppi , si indica solitamente con il simbolo S_n e si chiama gruppo simmetrico(totale) : abbiamo provato che esso ha ordine n! .

Se scriviamo le n! permutazioni dei numeri da 1 a n , vediamo che nella seconda riga delle tabelline abbiamo scritto gli n numeri in tutti gli ordini possibili esattamente una volta : abbiamo ordinato (allineato) in tutti i modi possibili i nostri elementi . Possiamo dedurre che n oggetti distinti possono essere ordinati in n! modi possibili .
Si dice quindi ,per estensione, permutazione di n oggetti distinti un qualunque loro ordinamento o allineamento . Questi ordinamenti si ottengono uno dall'altro permutando gli n oggetti e la teoria svolta ci dice che ne otteniamo in totale n! (corrispondenti alle seconde righe delle tabelline precedenti) . Si scrive anche $P_n = n!$, per indicare il numero totale delle permutazioni di n oggetti distinti .

Esempio 4.1.2 Scriviamo tutte le 3! = 6 permutazioni di 3 palline di colore B (bianco),R (rosso), V (verde) .
Abbiamo due allineamenti che mettono la pallina B al primo posto , altrettanti per R e V (stiamo usando il procedimento induttivo usato nella dimostrazione della proposizione 4.1.1)

B R V B V R R V B R B V V B R V R B .

Esercizio 4.1.2 Quanti sono gli anagrammi della parola madre ? E della parola mamma ?

Osserviamo che si definisce alfabeto un insieme finito di simboli e ,dato un certo alfabeto (qui si tratta dell'alfabeto latino di 26 lettere), si definisce parola un qualunque allineamento dei suoi simboli . Il

numero di simboli è detto lunghezza della parola. Se n è l'ordine dell'alfabeto, le parole di lunghezza m sono in totale n^m .
Non è richiesto quindi che la parola che si ottiene anagrammando madre abbia un significato nella lingua italiana , né che ne segua le regole grammaticali, quindi dobbiamo contare in quanti modi si possono allineare le cinque lettere m,a,d,r,e . I modi sono tanti quante le permutazioni di 5 oggetti , cioè 5! = 120 .
Osserviamo che , in generale , gli anagrammi di una parola con n lettere distinte sono n!
Nella parola mamma vi sono invece delle lettere ripetute , due a e tre m : gli anagrammi saranno 5! / 2! · 3! . Motiviamo così questo fatto : passiamo da mamma (che ha due lettere ripetute) a mamme (che ha una sola lettera ripetuta) e da mamme a madre (che ha tutte lettere distinte) . Gli anagrammi di mamme sono la sesta parte di quelli di madre : da ogni anagramma di mamme ne ottengo 6 = 3! di madre ,sostituendo nelle posizioni delle tre m i 3! anagrammi della parola mdr . A loro volta gli anagrammi di mamme sono il doppio (2 = 2!) di quelli di mamma (ogni anagramma di mamma ci dà due anagrammi di mamme sostituendo al posto delle due a i due anagrammi di ae) .

Osservazione 4.1.2 Si chiama permutazione con ripetizione di n oggetti $a_1, a_2 ,\dots, a_n$ di cui a_1 preso r_1 volte , a_2 preso r_2 volte , … , a_n preso r_n volte ogni $(r_1 + r_2 +\dots+ r_n)$ – upla in cui a_1 compare r_1 volte , a_2 compare r_2 volte , …, a_n compare r_n volte .
Il numero totale di questi allineamenti è

$$\frac{(r_1 + r_2 + \dots r_n)!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!}$$

Proveremo questo fatto nel paragrafo 5.2 dedicato alle combinazioni . Osserviamo ancora che tale numero ci dà il numero delle funzioni suriettive di un insieme di ordine $r_1 + r_2 +\dots+ r_n$ nell' insieme di ordine n $\{a_1, a_2 ,\dots, a_n \}$ aventi la proprietà che r_1 elementi hanno immagine a_1, r_2 elementi hanno immagine a_2 , … , r_n elementi hanno immagine a_n .

Esercizio 4.1.3

1) Dire quanti sono gli anagrammi della parola logica e della parola matematica .

   Soluzione : sono 6! e 10! / 2!·3!·2! rispettivamente . Osserviamo che questo esercizio si può così riformulare : in quanti modi è possibile sistemare 6 oggetti numerati in sei cassetti in modo tale che ogni cassetto contenga esattamente un oggetto? In quanti modi si possono disporre 10 oggetti numerati in 6 cassetti con la condizione che vi siano tre cassetti che contengono 2,3,2 oggetti e tre cassetti che ne contengono uno ciascuno ?
   In altre parole : quante sono le funzioni suriettive di I_6 in I_6 ? Quante sono le funzioni suriettive di I_{10} in {m,a,t,e,i,c } con la condizione che due numeri abbiano immagine m, tre abbiano immagine a , due t , uno abbia immagine e, uno i, uno c ?

2) Scrivere tutti i numeri formati dalle cifre 1 , 2 , 3 non ripetute

   Soluzione : 123, 132 , 213 , 231 , 312 , 321 .

3) Uno studente deve sostenere 5 esami ogni anno per i 4 anni di durata del suo corso di studi, senza poter rimandare un esame da un anno all'altro, nell'ordine da lui preferito .

Quante sono le possibili sequenze dei 20 esami ?

Soluzione : $5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!$

4) In quanti modi si possono trovare disposte le carte di un mazzo da 40 ?

   Soluzione : 40!

4.2 Disposizioni semplici

Nel paragrafo 4.1 abbiamo considerato le permutazioni di n oggetti e abbiamo visto il loro legame con gli allineamenti degli stessi .
Supponiamo ora di voler disporre in fila (allineare) k oggetti presi in un insieme di n (quindi supporremo sempre nel seguito $k \leq n$) : il nome di questi allineamenti è disposizioni semplici di n oggetti a k a k .
Abbiamo già parlato delle disposizioni con ripetizione di n oggetti nel capitolo dedicato alle funzioni di dominio I_n : anche le disposizioni semplici di n oggetti a k a k sono funzioni . Precisamente :

Definizione 4.2.1 Si dice disposizione (di n oggetti a k a k) una funzione iniettiva di un insieme di ordine k in un insieme di ordine n . Il numero totale delle disposizioni di n oggetti a k a k si indica con $D_{n,k}$.

Proposizione 4.2.1 Sia A un insieme di ordine k e B un insieme di ordine n . Vi sono

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

funzioni iniettive di A in B .

Dimostrazione . Per induzione su k .

Base dell'induzione . Sia k = 1 . L'insieme A ha un solo elemento , si hanno evidentemente n funzioni iniettive di A in B e $D_{n,1} = n$
Ipotesi induttiva . Supponiamo di sapere che se A ha k elementi vi sono $D_{n,k}$ funzioni iniettive di A in B .
Sia ora A di ordine k+1 . Abbiamo aggiunto ad A un elemento : per ognuna delle funzioni iniettive già considerate ne otteniamo n-k di A in B perché k elementi di B sono già immagini di elementi di A (per l'iniettività elementi distinti devono avere immagini distinte) , quindi abbiamo la relazione

$$D_{n,k+1} = D_{n,k} \cdot (n-k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k) = \frac{n!}{(n-k-1)!}$$

Dimostrazione. Con il metodo delle scelte.

Sia A = {a_1, … , a_k }. Contiamo in quanti modi si può costruire una funzione iniettiva

$$f : A \to B .$$

Per f(a_1) si hanno n scelte (f(a_1) può essere uno qualunque degli elementi di B), per f(a_2) si hanno n-1 scelte (f(a_2) deve essere diversa da f(a_1) per l'iniettività) , … , per f(a_k) si hanno n-k+1 scelte . Si hanno quindi n(n-1) … (n-k+1) = n!/(n-k)! modi di costruire una funzione iniettiva di A in B e , quindi ci sono $D_{n,k}$ funzioni iniettive di A in B .

Osservazione 4.2.1 . Se A = B (e quindi n = k) ogni funzione iniettiva di A in A è una biiezione e $D_{n,n}$ = n!/0! = n! = P_n diventa il numero delle permutazioni di n oggetti distinti .

Osservazione 4.2.3 . Il numero $D_{n,k}$ può essere visto come il numero di modi in cui si possono allineare (ordinare) k oggetti presi in un insieme di n : possiamo pensare al dominio A come a un insieme di k caselle e far corrispondere a ciascuna di esse l'oggetto che la occupa , oggetto preso dall'insieme B . Così , per esempio, se B è l'insieme formato da tre palline di colore verde (V), rosso (R), nero (N) le disposizioni di queste tre palline a due a due sono $D_{3,2}$ = 3!/1!=6 , e precisamente, sono gli allineamenti

VR,RV,VN,NV,RN,NR

che corrispondono alle sei funzioni iniettive di A = {a_1, a_2 } in B = {V, R, N } seguenti :

f(a_1) = V, f(a_2) = R
f(a_1) = R, f(a_2) = V
f(a_1) = V, f(a_2) = N
f(a_1) = N, f(a_2) = V
f(a_1) = R, f(a_2) = N
f(a_1) = N, f(a_2) = R .

Esercizio 4.2.1

1) Scrivere le disposizioni dei quattro numeri 1,2,3,4 a due a due (equivalentemente , quanti numeri diversi di due cifre scelte tra le quattro assegnate si possono formare ?)

Soluzione : si hanno dodici coppie ordinate di numeri , precisamente

1 2 , 1 3 , 1 4 , 2 3 , 2 4 , 3 4
2 1 , 3 1 , 4 1 , 3 2 , 4 2 , 4 3

2) In quanti modi 3 oggetti possono essere colorati con 5 colori diversi ?

Soluzione : Il numero richiesto è $D_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

2) A un campionato di calcio partecipano nove squadre. Se ogni squadra incontra tutte le altre due volte , quante partite devono essere giocate ?

Soluzione : Si giocano 72 partite , il numero delle disposizioni di 9 oggetti a due a due .

CAPITOLO 5

Combinazioni .

5.1 I coefficienti binomiali e il triangolo di Tartaglia .

Definizione 5.1.1 Si dice coefficiente binomiale n su k , $0 \le k \le n$, il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proposizione 5.1.1

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (formula di Stifel) , $1 \le k \le n-1$.

Dimostrazione . Immediata dalla definizione di coefficiente binomiale .

Proposizione 5.1.2 Per qualsiasi numero naturale non nullo n e per ogni a , b reali si ha

$$(a+b)^n = \sum_{o}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(Formula del binomio di Newton).

Dimostrazione . Per induzione su n .

n =1 (Base dell'induzione) : $(a+b) = a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$

Ipotesi induttiva : supponiamo che

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \quad .$$

Calcoliamo $(a+b)^n$.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = \left(\sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^k \right)(a+b) =$$

$$= \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k}b^k + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^{k+1} .$$

Il coefficiente del termine $a^{n-k}b^k$ è $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ per la formula di Stifel , da cui la tesi .

Dopo aver visto il significato combinatorico di $\binom{n}{k}$, daremo una dimostrazione alternativa di queste due proposizioni .

Scriviamo ora i coefficienti binomiali disponendoli in un triangolo illimitato , chiamato triangolo di Tartaglia o triangolo di Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots
\end{array}$$

Per il punto i) della proposizione 5.1.1 il primo e l'ultimo coefficiente binomiale in ogni riga del triangolo sono uguali a 1 , per il punto ii) il secondo e il penultimo coefficiente binomiale in ogni riga sono uguali tra loro e per il punto iii) ogni coefficiente binomiale all'interno del triangolo è la somma dei due coefficienti binomiali alla sua destra e alla sua sinistra nella riga precedente .

Queste osservazioni ci permettono di riscrivere il triangolo di Tartaglia calcolando molto facilmente i numeri di ogni riga :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & ... & \dots & \dots & \dots & ... & . & &
\end{array}$$

Abbiamo così uno strumento molto utile per calcolare rapidamente i coefficienti binomiali e per visualizzarne altre proprietà , per esempio :

Proposizione 5.1.3

i) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$

ii) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$

iii) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots = 2^{n-1}$

Dimostrazione . La i) si ottiene scrivendo la formula del binomio di Newton con a = b = 1 .
La ii) si ottiene sempre dalla formula del binomio di Newton con a = 1 , b = -1 .
Per la iii) , sommiamo membro a membro la i) e la ii) . Otteniamo :

$$2\cdot\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots\right) = 2^n \text{ e quindi}$$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots = 2^{n-1}\ .$$

Da questa relazione e dalla i) si ha :

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \text{c.v.d.}$$

Quindi : le somme dei numeri di ogni riga del triangolo di Tartaglia sono le potenze successive di 2 , le somme con segno alterno dei numeri di ogni riga sono nulle , le somme dei numeri di posto pari e di posto dispari in ogni riga sono uguali tra loro e coincidono con la somma di tutti i numeri della riga precedente .
Segnaliamo un'altra delle innumerevoli proprietà del triangolo di Tartaglia : se ne diamo la seguente rappresentazione

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . .

leggiamo in diagonale i famosi numeri di Fibonacci $F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 1+1 = 2$, $F_3 = 1+2 = 3$,$F_4 =$ $=1+3+1 = 5$,…, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

5.2 Le combinazioni di n elementi di classe k .

Affrontiamo come ultimo problema l'argomento da cui prende il nome il calcolo combinatorio .

Definizione 5.2.1 Sia A un insieme di ordine n . Si dice combinazione di n oggetti a k a k (o di classe k) ogni sottoinsieme di ordine k di A .

Il numero delle combinazioni di n oggetti a k a k si indica con la notazione $C_{n,k}$. Dato un insieme di ordine n , esso possiede $C_{n,k}$ sottoinsiemi con k elementi .

Proposizione 5.2.1 Sia A un insieme di ordine n . A possiede $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di ordine k .

Dimostrazione . Per induzione su n .

n = 0 (Base dell'induzione) .Allora anche k = 0 : A è l'insieme vuoto e possiede $1=\binom{0}{0}$ sottoinsiemi .

Ipotesi induttiva . Supponiamo vera la proprietà per un insieme di ordine n-1 .
Sia ora $A = \{a_1,\dots,a_n\}$.Fissiamo la nostra attenzione su a_n e sui sottoinsiemi di ordine $k \le n-1$:

quelli che non contengono a_n sono , per l'ipotesi induttiva , $\binom{n-1}{k}$ (sono infatti i sottoinsiemi di A - $\{a_n\}$ di ordine k) , quelli che invece lo contengono sono tanti quanti quelli di A - $\{a_n\}$ di ordine k-1 , cioè , sempre per l'ipotesi induttiva $\binom{n-1}{k-1}$(tali sottoinsiemi si ottengono infatti da quelli di A - $\{a_n\}$ di ordine k-1 "aggiungendo" a_n)
Otteniamo dunque che i sottoinsiemi di A di ordine $k \le n-1$ sono

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k} .$$

Osserviamo inoltre che, se k = n , allora i sottoinsiemi di A di ordine n sono $1 = \binom{n}{n}$, c.v.d .

Osservazione 5.2.1 Dalla definizione di combinazione e dalla proposizione 5.2.1 deduciamo che i coefficienti binomiali sono numeri naturali non nulli .

Osservazione 5.2.2 Il numero $C_{n,k}$ si ottiene dal numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di n oggetti a k a k e dal numero P_k delle permutazioni di k elementi mediante le seguenti considerazioni : il numero delle disposizioni semplici di n oggetti a k a k ci dà il numero di tutte le k-ple (ordinate)di tali oggetti , mentre P_k ci dà il numero degli ordinamenti degli oggetti di ciascuna di esse . Un sottoinsieme di ordine k si ottiene quindi da k ! k-ple di oggetti , per cui vale la relazione :

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Esempio 5.2.1 Se B è l'insieme formato da tre palline di colore verde (V), rosso (R), nero (N) le disposizioni di queste tre palline a due a due sono $D_{3,2}$ = 3!/1!= 6 ,e, precisamente, sono gli allineamenti

VR,RV,VN,NV,RN,NR

Le combinazioni di queste tre palline a due a due sono tre : corrispondono ai tre sottoinsiemi seguenti (che scriviamo senza parentesi e virgola)

VR,VN,RN .

Usando la definizione di combinazione e l'uguaglianza

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

si dimostrano senza calcoli le proprietà dei coefficienti binomiali .
Così la i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ della proposizione 5.1.1 può essere motivata osservando che ci sono solo un sottoinsieme con 0 elementi (l'insieme vuoto) e uno con n (tutto l'insieme) . Per la ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ basta osservare che quando scegliamo k elementi tra n,isoliamo automaticamente i restanti n-k . La iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (formula di Stifel) , $1 \le k \le n-1$, si ottiene osservando che , fissato un elemento tra gli n , vi sono $\binom{n-1}{k}$ sottoinsiemi di ordine k che non lo contengono e $\binom{n-1}{k-1}$ che lo contengono (quest'ultimo numero si calcola escludendo l'elemento fissato e contando il numero dei sottoinsiemi di k-1 elementi che si possono formare con gli n-1 elementi rimasti) .

Anche la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{o}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

può essere ottenuta con considerazioni di tipo combinatorico : svolgendo i conti

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

si ottiene una somma di n addendi , ognuno dei quali è un prodotto di n copie di a o di b in cui se a

compare n- k volte , b compare k volte . Il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è dato dal numero dei fattori in cui ci sono n-k a , e quindi k b (ricordiamo che vale la proprietà commutativa del prodotto) : questo numero è $\binom{n}{k}$, in quanto è il numero di modi in cui possiamo scegliere k binomi (a+b) tra gli n totali .
Osserviamo infine che , sempre per il significato dei coefficienti binomiali , nel triangolo di Tartaglia la somma dei numeri della riga n-sima ci dà l'ordine dell'insieme delle parti di un insieme di ordine n (Proposizione 5.2.2 , punto i)) .

Terminiamo dimostrando quanto affermato nella osservazione 4.1.2 del capitolo 4 .

Proposizione 5.2.3 Sia S una sequenza di lunghezza n formata con n_1 oggetti ripetuti di tipo 1 , n_2 di tipo 2 , … , n_t di tipo t . Il numero totale di tali S (dette anche permutazioni con ripetizioni) è

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$$

Dimostrazione . Dobbiamo dare una "posizione" a ognuno degli n elementi per ottenere una sequenza : possiamo dare posizione agli n_1 elementi di tipo 1 in C_{n,n_1} modi . Fatto questo , possiamo dare posizione agli n_2 elementi di tipo 1 in C_{n-n_1,n_2} modi , … , possiamo dare posizione agli n_t elementi di tipo t in $C_{n-n_1-\ldots-n_{t-1},n_t}$ modi . Otteniamo così :

$$C_{n,n_1}\cdot C_{n-n_1,n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{t-1},n_t} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{t-1})!}{n_t!0!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!} \text{ c.v.d}$$

Osservazione 5.2.1 Il numero $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$ viene anche indicato con il simbolo

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad . \quad . \quad . \quad n_t}$$

e chiamato numero (o coefficiente) multinomiale .
Tali numeri sono una generalizzazione dei binomiali . Per t = 2 ogni numero multinomiale coincide con un binomiale . Non è difficile , tenendo presente il loro significato combinatorico , provare la seguente formula , che generalizza la formula del binomio di Newton : dati gli interi positivi n e t,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n = \sum\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad . \quad . \quad . \quad n_t}x_1^{n1}x_2^{n2}\ldots x_t^{nt} ,$$

dove la somma è fatta su tutte le t-uple di interi non negativi (n_1, n_2,…n_t) con $n_1+n_2+\ldots+n_t = n$.

Osservazione 5.2.2 Osservando che , come già detto nell'osservazione 4.1.2 , il coefficiente multinomiale $\begin{pmatrix} & & n & & \\ n_1 & n_2 & . & . & . & n_t \end{pmatrix}$ conta anche il numero delle suriezioni di un insieme di ordine n in un insieme di ordine t con la condizione che n_1 elementi abbiano immagine il primo elemento del codominio , … , n_t il t-esimo , si ottiene che l'ordine dell'insieme delle suriezioni di I_n in I_t è dato da

$$\sum \begin{pmatrix} & & n & & \\ n_1 & n_2 & . & . & . & n_t \end{pmatrix}$$

dove la somma è fatta su tutte le t-uple di interi non negativi $(n_1, n_2,\dots n_t)$ con $n_1+n_2+ \dots+n_t = n$.

Esempio 5.2.1 In quanti modi possiamo distribuire 5 libri ai due studenti Alice e Matteo in modo che Alice ne abbia due e Matteo tre ? Ordiniamo i libri e consideriamo le sequenze di lunghezza 5 contenenti due a e tre m : per esempio la sequenza ammma determina la distribuzione seguente : Alice ha il primo e l'ultimo libro , Matteo gli altri tre . E' evidente che la risposta al quesito è il numero degli anagrammi della parola mamma , cioè 10 . La sequenza ammma determina la seguente suriezione f di I_5 in {a,m} : f(1) = f(5) = a , f(2) = f(3) = f(4) = m .

Esercizi 5.2.1

1) Quattro giocatori di tennis vogliono giocare un doppio . Quante coppie distinte possono formarsi ?

   Soluzione . Vi sono $C_{4,2} = 6$ formazioni distinte di due giocatori ciascuna .

2) Nel gioco del Superenalotto bisogna indovinare 6 numeri scelti tra il numero 1 e il numero 90 . Quanti insiemi di sei numeri si possono formare ?

   Soluzione : $\begin{pmatrix} 90 \\ 6 \end{pmatrix} = 622614630$.

3) Calcolare il numero di modi distinti in cui può essere servito un giocatore di scala quaranta in una singola mano .

   Soluzione. Supponendo di giocare con 54x2 = 108 carte e sapendo che si danno 13 carte , abbiamo $\begin{pmatrix} 108 \\ 13 \end{pmatrix}$ possibilità .

4) (a) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere con un mazzo da poker di 52 carte ?
   (b) Quanti poker di assi si possono formare ?
   (c) Quanti poker si possono formare ?

   Soluzione . (a) $C_{52,5}$ = 2.598.960
   (b) 48 (tante infatti sono le scelte per la quinta carta)

(c) $13\cdot48$ (si hanno infatti 13 scelte per il grado del poker e per ognuna 48 scelte per la quinta carta).

5) In quanti modi possiamo distribuire 8 videocassette diverse a tre amici, Silvio, Daniele ed Elisa , dandone quattro a Silvio e due a ciascuno degli altri ?

Soluzione . Basta calcolare il numero multinomiale $\begin{pmatrix} & 8 & \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si ottiene 420 .

6) In quanti modi possiamo mettere 12 palline identiche (e quindi indistinguibili) in 6 cassetti (numerati da 1 a 6) in modo tale che nessun cassetto sia vuoto?

Soluzione . Poniamo le palline in una riga : possiamo ripartire la riga in 6 parti usando 5 sbarrette per ottenere una delle configurazioni richieste . Per esempio la configurazione

OO/OOO/O/OO/OOO/O

indica che vi sono due palline nel primo cassetto , tre nel secondo ,una nel terzo , due nel quarto , tre nel quinto e una nel sesto .
Ora , vi sono 11 buchi (tra le dodici palline) in cui inserire 5 pareti per ottenere sei cassetti ogni sbarretta ha 11 posizioni in cui può essere inserita e in nessun buco ve ne possono essere due perché ciò corrisponderebbe a un cassetto vuoto , vi sono dunque $\binom{11}{5}$ possibilità e quindi altrettante ripartizioni di palline .

7) In quanti modi possiamo scrivere il numero naturale non nullo n come somma di k numeri naturali non nulli ?Si considerano diverse due rappresentazioni che differiscono per l'ordine degli addendi.

Soluzione : Pensando a n come alla somma 1+1+…+1 di n 1 , agli 1 come palline e alle k somme come cassetti , l'esercizio 5 generalizzato ci dice che le possibilità sono $\binom{n-1}{k-1}$.

Per esempio , il numero 5 si può scrivere in quattro modi come somma di due naturali non nulli : 5 = 1+4 = 2+3 =3+2 = 4+1.

8) In quanti modi possiamo mettere 12 palline identiche (e quindi indistinguibili) in 6 cassetti (numerati da 1 a 6) ammettendo che qualche cassetto sia vuoto?

Soluzione : mettiamo in riga 17 oggetti , le 12 palline e le 5 sbarrette e osserviamo che ognuna di queste righe ci dà una e una sola ripartizione delle palline : le palline a sinistra della prima sbarra corrispondono a quelle del primo cassetto , quelle tra la seconda e la terza a quelle del secondo cassetto , …. Se le due sbarre sono adiacenti il cassetto è vuoto.
Ogni riga è completamente determinata dalle cinque posizioni delle sbarrette , vi sono quindi

$\binom{17}{5}$ possibilità .

9) In quanti modi possiamo scrivere il numero naturale non nullo n come somma di k numeri interi non negativi ? Si considerano diverse due rappresentazioni che differiscono per l'ordine degli addendi .

La risposta è data dall'esercizio 8 (lo zero è il cassetto vuoto) ed è $\binom{n+k-1}{k-1}$

Con la stessa tecnica usata nell'esercizio 8 si prova la

Proposizione 5.2.3 . Se A è un insieme di ordine n , il numero delle scelte non ordinate di k elementi , con ripetizioni, è $C_{n+k-1,n-1} = C_{n+k-1,k}$.

Dimostrazione . Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Consideriamo n+k-1 simboli di cui k x e n-1 sbarrette . Ogni riga di questi simboli determina una scelta . Il numero di x a sinistra della prima sbarra rappresenta la scelta di altrettante a_1 , il numero di x tra la prima e la seconda sbarra la scelta di altrettante a_2 e così via . Poiché vi sono $C_{n+k-1,n-1}$ modi per posizionare le n-1 sbarre , altrettante sono le selezioni con ripetizione di k elementi di A .

Esempio 5.3.3 . Sia $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Le scelte con ripetizione di due suoi elementi sono $C_{4,2} = 6$ e precisamente : a_1, a_2 ; a_1, a_3 ; a_2, a_3 ; a_1, a_1 ; a_2, a_2 ; a_3, a_3 .
La a_1, a_2 corrisponde alla sequenza di 2 x e 2 sbarre : x/x/ . Le altre sono rispettivamente le sequenze : x//x ; /x/x ; xx// ; /xx/ ; //xx .

Bibliografia

1) I. Anderson , A first course in combinatorial mathematics,Clarendon press-Oxford 1974

2) N.L.Biggs , Discrete mathematics , Clarendon presse – Oxford 1985

3) A.Conte - L.Picco Botta - D.Romagnoli , Algebra , Levrotto§Bella Torino 1986

4) J.H.Conway-R.K.Guy , The book of numbers , Copernicus - Springer - Verlag 1995

5) A. De Marco , Algebra per i licei scientifici , Poseidonia - Bologna 1976

6) K.Devlin , Dove va la matematica , Bollati Boringhieri 1994

7) S.S.Epp , Discrete Mathematics with applications , PWS publishing Company 1995

8) A.Facchini, Algebra e matematica discreta , Decibel Zanichelli 2000

9) Fomin D.- Genkin S. - Itenberg I. , Mathematical circles (Russian experience) , 1996 Mathematical world . Vol. 7 American Mathematical Society

10) M. Gardner , Carnevale matematico, Zanichelli 1977

11) Graham-Knuth-Patashnik , Matematica discreta , Hoepli 1992

12) R. Johnsonbaugh , Discrete Mathematics, Macmillan Publishing Company Collier Macmillan Publishers 1984

13) E.Lucas ,Theorie des nombres , Librairie scientifique et technique Albert Blanchard , 1961

14) W.Maraschini-M.Palma, Format ,SPE.La formazione matematica per il triennio 1 Paravia 1996

15) S.B.Maurer § A.Ralston , Discrete algorithmic mathematics , Addison-Wesley publishing company 1991

16) G. M. Piacentini Cattaneo , Algebra . Un approccio algoritmico , Decibel Zanichelli 1996

17) PMA ProgettoMatematica Archimede,Corso modulare di matematica 2, Archimede Edizioni Bruno Mondadori 1999

18) K.H.Rosen , Elementary number theory and its applications , Addison Wesley 1993

19) M. Townsend , Discrete mathematics : applied combinatorics and graph theory , the Benjamin Cummings publishing Company , Inc . 1987