Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

Angelo Negro

Teoria della Misura
Istituzioni di Analisi Superiore
a.a. 2000/2001

Quaderno # 7 - Giugno 2001

Prefazione

Questa breve monografia si propone di presentare in modo piano e sintetico, ma con dimostrazioni rigorose e complete, i principali temi della moderna teoria della misura e della integrazione.

Gli enunciati sono moderatamente generali e le dimostrazioni, tra le tante spesso possibili, sono scelte con l'intenzione sia di offrire un percorso "naturale" di comprensione delle costruzioni e delle tesi proposte, sia di fornire la traccia per la dimostrazione di risultati più avanzati, nel contesto di strutture più generali o di ipotesi più deboli.

L'intento è di fornire un materiale didattico sufficientemente avanzato, ma accessibile a studenti del secondo biennio del Corso di laurea in Matematica, e anche quello di proporre un breve manuale di agile consultazione e riferimento.

Moltissime sono le presentazioni della teoria della misura e dell'integrazione, alcune delle quali costituiscono un riferimento fondamentale e irrinunciabile per ogni studioso. Ma non abbiamo voluto fornire una vasta bibliografia: abbiamo soltanto indicato i testi effettivamente usati per la redazione di questa monografia e le opere alle quali facciamo esplicito riferimento. Il materiale esposto è tratto essenzialmente da Kolmogorov-Fomin[8], Doob[4], Rudin[10], spesso con considerevole elaborazione della presentazione, dei collegamenti e del percorso di dimostrazione.

Il lavoro che presentiamo è collegato al corso di Istituzioni di analisi superiore, che l'autore ha svolto per molti anni accademici presso il Corso di laurea in Matematica dell'Università di Torino. Agli studenti del corso sono stati offerti brevi fascicoli che coprivano i temi dei singoli capitoli, fascicoli frequentemente aggiornati e messi a disposizione anche in rete sul sito del Dipartimento di matematica. L'aggregazione dei fascicoli concernenti la teoria della misura e dell'integrazione, notevolmente ampliati e più organicamente interconnessi, ha condotto alla redazione di questa monografia.

L'attuale corso di Istituzioni di analisi superiore è diviso in due moduli. Il primo modulo, rivolto a tutti gli studenti del secondo biennio, oltre a primi elementi di analisi funzionale e di teoria delle funzioni olomorfe, propone le basi della teoria della misura e dell'integrazione, svolgendo essenzialmente il contenuto dei Capitoli 1 e 2 e presentando una sintesi dei risultati dei Capitoli 4 e 6 di questo testo. Il materiale degli altri capitoli è utilizzato, parzialmente, nel secondo modulo, che ha un carattere più avanzato e presenta, oltre a complementi di teoria della misura, temi concernenti i fondamenti dell'analisi funzionale, alcuni metodi di compattezza, elementi di teoria spettrale e di analisi armonica.

Sono in preparazione altri due testi che, insieme a quello ora presentato, copriranno tutti i temi del corso.

Torino, giugno 2001

ANGELO NEGRO

Indice

Capitolo 1

σ-Algebre. Misure. Funzioni misurabili

1.1 $\sigma-$*algebre e spazi misurabili*

Definizione. *Una famiglia $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi di un insieme X ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$) costituisce un* **anello** *se e solo se $\mathcal{R} \neq \emptyset$, e, qualsiansi A, B:*

$$A, B \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A \cap B,\; A \cup B,\; A\Delta B,\; A - B \in \mathcal{R}\ .$$

Ricordiamo che $x \in A - B$ equivale a $x \in A$ e $x \notin B$. Inoltre $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. *Dunque un anello è stabile per tutte le usuali operazioni insiemistiche che coinvolgono un numero finito di suoi elementi. Tuttavia, essendo $A^c = X - A$, se $A \in \mathcal{R}$, $A^c \in \mathcal{R}$ se e solo se $X \in \mathcal{R}$.*

Si osservi che è sufficiente chiedere che $A \cap B$ e $A\Delta B$ appartengano a $\mathcal{R}$. Infatti

$$A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B) \quad , \quad A - B = A\Delta(A \cap B)\ .$$

Ovviamente $\emptyset = A - A \in \mathcal{R}$.

Il termine anello deriva dal fatto che l'insieme delle funzioni caratteristiche χ_A degli insiemi A della famiglia, munita delle operazioni di somma e prodotto seguenti:

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B\ ,\ \chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B \quad (mod\ 2)\ ,$$

è un anello nel senso algebrico usuale.

Definizione. *Una famiglia di insiemi $\mathcal{A}$ si dice* **algebra** *se e solo se essa è un anello dotato di unità, cioè se esiste un insieme $E \in \mathcal{A}$, detto unità, tale che per ogni $A \in \mathcal{A}$ si abbia $A \subseteq E$.* In tal caso ovviamente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ed in genere X non interviene ulteriormente. *Nel seguito supporremo $E = X$ e diremo dunque che $\mathcal{A}$ è un'algebra se e solo se $X \in \mathcal{A}$.*

Veniamo ora alla definizione più importante.

Definizione. *$\mathcal{A}$ si dice $\sigma-$**algebra** se e solo se $\mathcal{A}$ è un'algebra e*

$$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A} \ .$$

Di conseguenza si vede facilmente che una sigma-algebra è stabile per tutte le usuali operazioni insiemistiche che coinvolgono una infinità **numerabile** *di suoi sottoinsiemi. Ad esempio*

$$\cap_n A_n \in \mathcal{A} \ .$$

Si controlla immediatamente che $\mathcal{A}$ **è una sigma-algebra se e solo se** $\mathcal{A} \neq \emptyset$ **e**

$$A, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c, \ \cup_n A_n \in \mathcal{A} \ .$$

Si osservi che, se vale l'implicazione precedente, allora

$$X = A \cup A^c \in \mathcal{A} \ .$$

Esempio elementare. Sia $\mathcal{C}$ una partizione finita o numerabile di X e sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le unioni finite o numerabili di elementi di $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \{\ C_n\}_{n\in\mathbf{N}} \quad , \quad \mathcal{A} = \{\ \cup_{j\in J} C_j\}_{J\subseteq\mathbf{N}} \ .$$

È immediato verificare che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra.

Spazio misurabile. *La coppia $(X, \mathcal{A})$, dove $\mathcal{A}$ è una σ-algebra in X si dice spazio misurabile.*

Ovviamente in uno stesso insieme X si possono introdurre diverse strutture di spazio misurabile, selezionando diverse sigma-algebre in X. Quando non ci possano essere equivoci sulla sigma-algebra selezionata, questa viene sottointesa dicendo brevemente che X è uno spazio misurabile. Gli elementi della sigma-algebra si dicono **insiemi misurabili**.

Data una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi, si indica con $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ o con $\sigma(\mathcal{F})$ la più piccola σ-algebra contenete $\mathcal{F}$. Essa viene detta **la σ-algebra generata da $\mathcal{F}$.** La defnizione è corretta perchè

1) se $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$, dove T è un insieme arbitrario, è una collezione di σ-algebre, allora $\cap_{t\in T}\mathcal{A}_t$ è ancora una σ-algebra.
Infatti

$$\forall t \ A \in \mathcal{A}_t \Rightarrow \forall t \ A^c \in \mathcal{A}_t \Rightarrow A^c \in \cap_{t\in T}\mathcal{A}_t \ ;$$

$$\forall t \ A_n \in \mathcal{A}_t \Rightarrow \forall t \ \cup_n A_n \in \mathcal{A}_t \Rightarrow \cup_n A_n \in \cap_{t\in T}\mathcal{A}_t \ .$$

2) Esiste almeno una σ-algebra contenete $\mathcal{F}$, ad esempio $\mathcal{P}(X)$.
Dunque $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ è l'intersezione di tutte le σ-algebre contenenti $\mathcal{F}$.

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ una applicazione ovunque definita e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in Y. Allora $f^{-1}(\mathcal{A})$ è una σ-algebra in X . Dimostrazione.* Infatti

$$A \in \mathcal{A} \ \text{ e } \ B = f^{-1}(A) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \ \text{ e } \ B^c = f^{-1}(A^c) \ ,$$

$$\forall n \ A_n \in \mathcal{A} \ \text{ e } \ B_n = f^{-1}(A_n) \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A} \text{ e } \cup_n B_n = f^{-1}(\cup_n A_n) \ .$$

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ una applicazione ovunque definita. Allora*

$$\mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \ .$$

Dimostrazione. Infatti per il punto precedente $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$ è una sigma-algebra $\supseteq f^{-1}(\mathcal{F})$ e per ogni sigma-algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} \supseteq \mathcal{F}$ (dunque $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$) risulta che $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}})$ è una sigma-algebra tale che

$$f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}) \supseteq f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \supseteq f^{-1}(\mathcal{F}) \ .$$

Sia ora $\mathcal{B}$ una qualunque sigma-algebra $\supseteq f^{-1}(\mathcal{F})$. Essa non è necessariamente della forma $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}})$ con $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} \supseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ $\sigma-$algebra[1]. In tal caso si ponga

$$\mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists A \subseteq Y \ B = f^{-1}(A)\} = f^{-1}(\mathcal{A}^*) \ ,$$

dove

$$\mathcal{A}^* = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\} \ .$$

Controlliamo che $\mathcal{A}^*$, la quale evidentemente contiene $\mathcal{F}$, è una sigma-algebra:

$$f^{-1}(A) = B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(A^c) = B^c \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^* \ ,$$

$$\forall n \ f^{-1}(A_n) = B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A}^* \ .$$

Dunque ogni sigma-algebra $\mathcal{B}$ contenente $f^{-1}(\mathcal{F})$ contiene una sigma-algebra $f^{-1}(\mathcal{A}^*)$ contenente $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$ *q.e.d.*

Boreliani. *Se lo spazio X è già munito di una struttura di spazio topologico e $\mathcal{O}$ è la famiglia degli aperti in X , ha particolare interesse la σ-algebra $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$ generata dagli aperti. Essa viene detta la famiglia dei* **Boreliani** *di $(X, \mathcal{O})$ (o di X come si dice più brevemente, sottintendendo la topologia). Ovviamente, se $\mathcal{F}$ è la famiglia dei chiusi in X si ha $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{O})$.* Dunque $\mathcal{B}$ contiene in particolare tutti gli aperti, i chiusi, quindi i compatti, e tutti gli insiemi che si possono ottenere da una infinità numerabile di aperti e chiusi mediante usuali operazioni insiemistiche. Per esempio, indicando con $\mathcal{F}_\sigma$ le **unioni numerabili di chiusi**, che in genere non sono chiusi, e con $\mathcal{G}_\delta$ le **intersezioni numerabili di aperti**, che ingenerale aperti non sono, si ha $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{B}$.

1.2 *Misure positive*

Definizione. *Si dice misura positiva sull'algebra $\mathcal{A}$ ogni funzione*

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}^+$$

[1] Ad esempio, se $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ con $f(x) = |x|$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(D)$ con D insieme dei dispari naturali e $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \cup \{E^c\}$ con E insieme dei dispari relativi e dei pari negativi, allora $\mathcal{B} \supset f^{-1}(\mathcal{F})$ ed è una sigma-algebra in $\mathbf{Z}$ (la presenza di E^c serve perché sia $\mathbf{Z} = E \cup E^c \in \mathcal{B}$), ma ogni elemento di $\mathcal{B}$ non simmetrico rispetto a 0 non è controimmagine di alcun sottoinsieme di $\mathbf{N}$).

non identicamente uguale a $+\infty$ *e* **additiva** , *tale cioè che, se* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ *e* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *per* $j \neq k$, *allora*

$$\mu(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \ .$$

È naturalmente sufficiente che per ogni coppia $A, B \in \mathcal{A}$ *tale che* $A \cap B = \emptyset$ *risulti* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Se $\mathcal{A}$ *è una* σ*-algebra e per ogni successione disgiunta* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, *cioè tale che* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *per* $j \neq k$, *risulta*

$$\mu(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \ ,$$

si dice che μ *è una misura* σ*-additiva.*

Definizione. *Una terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *dove* μ *è una misura* σ*-additiva sulla* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *in* X, *si dice spazio di misura.*

Nel seguito useremo il termine misura per indicare una misura sigma-additiva.

μ *è* **finita** *se* $\mu(X) < +\infty$ *ed è* **sigma-finita** *se* X *è unione numerabile di insiemi di misura finita:*

$$X = \cup_j A_j \ , \ A_j \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A_j) < +\infty \ .$$

Se $\mu(X) < +\infty$, *allora* $\nu = \mu/\mu(X)$ *è una misura normalizzata:* $\nu(X) = 1$. *Le misure normalizzate si dicono* **misure di probabilità**, *l'insieme* X **"sample space"**, $\mathcal{A}$ σ*-algebra degli* **eventi** *e* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **spazio di probabilità**.

Proprietà delle misure.

1) $\mu(\emptyset) = 0$. *Infatti, preso* A *misurabile con* $\mu(A) < +\infty$, *si ha*

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \ .$$

2) μ *è monotona:*

$$A \subseteq B \quad \text{con } A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \ .$$

Infatti

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A) \ .$$

Si osservi che in questo caso si ha anche

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) \ .$$

3) μ *è continua lungo successioni monotone, nel senso che se* *a)* $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \subseteq A_{i+1}$ *e* $A = \cup_i A_i$ *, allora*

$$\mu(A) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \quad , \quad e$$

b) se $A_i \in \mathcal{A}$, $A_{i+1} \subseteq A_i$ *e* $A = \cap_i A_i$ *, allora se almeno una delle* A_i *, diciamo* A_N *, ha misura finita*[2]

$$\mu(A) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \ .$$

Infatti, nel caso a), posto $A_0 = \emptyset$, si ha

$$A = \cup_0^\infty (A_{i+1} - A_i) \quad \text{e, se } i \neq j \ , \quad (A_{i+1} - A_i) \cap (A_{j+1} - A_j) = \emptyset$$

e dunque

$$\mu(A) = \sum_0^\infty \mu(A_{i+1} - A_i) = \lim_p \sum_0^p \mu(A_{i+1} - A_i) =$$
$$= \lim_p \mu(\cup_0^p (A_{i+1} - A_i)) = \lim_p \mu(A_{p+1}) \ .$$

Il caso b) si riconduce al caso a), considerando $A_N - A$:

$$\mu(A_N) - \mu(A) = \mu(A_N - A) = \mu(\cup_{i>N}(A_N - A_i) =$$
$$\lim_i \mu(A_N - A_i) = \lim_i (\mu(A_N) - \mu(A_i)) = \mu(A_N) - \lim_i \mu(A_i) \ .$$

4) μ è $\sigma-$*subadditiva:*

$$\mu(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \ ,$$

per qualunque successione di insiemi A_k *misurabili. Naturalmente la serie a secondo membro può essere divergente a* $+\infty$ *.*

Infatti $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 - A_1) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Dunque, per induzione, la subadditività vale per un numero finito arbitrario di insiemi, e, per la continuità di μ lungo successioni monotone:

$$\mu(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \lim_{N\to+\infty} \mu(\cup_{k=1}^N A_k) \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^N \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \ .$$

Definizione. *Si dice che una misura* μ *è* **completa** *se tutti i sottoinsiemi di ogni insieme di misura nulla sono misurabili, e quindi di misura nulla:*

$$\mu(A) = 0 \quad e \quad A^* \subseteq A \ \Rightarrow A^* \in \mathcal{A} \quad e \quad \mu(A^*) = 0 \ .$$

Si pu'o sempre "completare" una misura accettando come misurabili (e ovviamente di misura nulla) tutti i sottoinsiemi di ogni insieme di misura nulla. Più precisamente, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è uno spazio di misura, esiste una* $\sigma-$*algebra minimale* $\mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{A}$ *sulla quale è definita una estensione completa* μ^* *di* μ*. Si verifica facilmente che* $\mathcal{A}^*$ *è costituita da tutti i sottoinsiemi* A *di* X *tali che esistono* $A_i, A_e \in \mathcal{A}$ *con* $A_i \subseteq A \subseteq A_e$ *e* $\mu(A_e - A_i) = 0$*. Necessariamente* $\mu^*(A) = \mu(A_i) = \mu(A_e)$*.*

[2] In $\mathbf{R}^2$ l'insieme $A_i = [0, 1/i] \times \mathbf{R}$ ha misura di Lebesgue (area) $\lambda(A_i) = +\infty$, $A_i \subset A_{i+1}$, ma $A = \cap_i A_i = \{0\} \times \mathbf{R} = \cup_n \{0\} \times [n, n+1]$ e $\lambda(A) = 0$.

1.3 *Funzioni misurabili*

Limiteremo le nostre considerazioni a funzioni a valori reali (o eventualmente complessi). Talvolta considereremo funzioni a valori reali estesi.

Definizione. *Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $\mathcal{B}$ la sigma-algebra dei Boreliani di $\mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$). $f :\to \mathbf{R}$ si dice* **misurabile** *se e solo se*

$$\forall B \in \mathcal{B} \ \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ .$$

$f^{-1}(\mathcal{B})$, che è la minima σ-algebra in X rispetto alla quale f è misurabile, si dice σ-algebra generata da f e si indica con $\sigma(f)$.

Si osservi che la definizione di misurabilità non presume alcuna misura, cioè fa riferimento ad una struttura di spazio misurabile, non ad una struttura di spazio di misura.

Se X è uno spazio topologico e $\mathcal{A}$ è la σ-algebra dei Boreliani in X, si dice che f è **Boreliana.**

Proposizione. *Sia $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Boreliana, allora $g \circ f : X \to \mathbf{R}$ è ancora misurabile.*
Infatti

$$\forall B \in \mathcal{B} \ \ (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{A} \ .$$

Proposizione. *Le funzioni continue, per esempio da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, sono Boreliane.*
Infatti sia

$$\mathcal{F} = \{M \subseteq \mathbf{R} \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{B}\} \ .$$

Allora $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{O}$ (aperti di $\mathbf{R}$) in quanto f è continua. Ma $\mathcal{F}$ è una sigma-algebra: $\mathbf{R} \in \mathcal{F}$ (è un aperto), inoltre, se $M, M_k \in \mathcal{F}$, allora $f^{-1}(M^c) = f^{-1}(M)^c \in \mathcal{B}$ e $f^{-1}(\cup_k M_k) = \cup_k f^{-1}(M_k) \in \mathcal{B}$. Essendo $\mathcal{B}$ la più piccola sigma-algebra contenete $\mathcal{O}$, ovviamente $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Teorema. *Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. $f : X \to \mathbf{R}$ è misurabile se e solo se*

$$\forall c \in \mathbf{R} \ \{x \mid f(x) < c\} = f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{A} \ .$$

Dimostrazione.
1) I Boreliani in $\mathbf{R}$ coincidono con la sigma-algebra generata dagli intervalli del tipo $]-\infty, c[$. Infatti, come ben noto, ogni aperto di $\mathbf{R}$ è unione numerabile di intervalli aperti, e

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[\ ,$$

$$]a, +\infty[=]-\infty, a]^c \ ,$$

$$]-\infty, a] = \cap_{n=1}^{+\infty}]-\infty, a + 1/n[\ .$$

2) Sia $\mathcal{F} = \{M \in \mathbf{R} \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{A}\}$. Allora $\mathcal{F}$ è una sigma-algebra. Ma, se essa contiene tutti gli insiemi del tipo $]-\infty, c[$, allora essa contiene $\mathcal{B}$. *q.e.d.*

Osservazione. Ovviamente f è misurabile se e solo se tutti gli insiemi del tipo $\{x \mid f(x) \leq c\}$ sono misurabili, oppure se tutti gli insiemi del tipo $\{x \mid f(x) > c\}$ sono misurabili, oppure ancora se tutti gli insiemi del tipo $\{x \mid f(x) \geq c\}$ sono misurabili.

Osservazione. Nel caso di funzioni a valori reali estesi la definizione di funzione misurabile non cambia ed è bene rilevare che:

$$\{x \mid f(x) = +\infty\} = \cap_n \{x \mid f(x) > n\} ,$$

mentre

$$\{x \mid f(x) = -\infty\} = \cap_n \{x \mid f(x) < -n\} .$$

Teorema. *Sia $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}; \mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni misurabili sullo spazio $(X, \mathcal{A})$ a valori reali. (Spesso si userà la notazione abbreviata $\mathcal{M}$). Allora*

$$f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow \lambda f + g \ , \ f \cdot g \ , \ f/g \ (g \neq 0) \ , \ |f| \ , \ \max(f,g) \ , \ \min(f,g) \ \in \mathcal{M} \ ,$$

dove λ è uno scalare arbitrario e $g \neq 0$ significa che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$. Dimostrazione.
1) Basta considerare il caso $\lambda \neq 0$:

$$\{x \mid \lambda f(x) + g(x) < c\} = \cup_{r \in \mathbf{Q}} \{x \mid \lambda f(x) < r\} \cap \{x \mid g(x) < c - r\} .$$

Infatti, se per qualche r razionale $\lambda f(x) < r$ e $g(x) < c - r$, allora $\lambda f(x) + g(x) < c$ e dunque il secondo membro è contenuto nel primo.
Se $\lambda f(x) + g(x) < c$ allora per n opportunamente grande $\lambda f(x) + g(x) < c - 1/n$. Sia $r \in \mathbf{Q}$ tale che $r - 1/n < \lambda f(x) < r$, quindi $-\lambda f(x) < -r + 1/n$ e quindi $g(x) < c - 1/n - \lambda f(x) < c - r$. Allora il primo membro è contenuto nel secondo.
Basta ora dimostrare che $\{x \mid \lambda f(x) < r\}$ è misurabile per concludere che il primo membro, quale unione numerabile di intersezioni di insiemi misurabili, è misurabile.
Ora $\{x \mid \lambda f(x) < r\} = \{x \mid f(x) < r/\lambda\}$, se $\lambda > 0$; se invece $\lambda < 0$, $\{x \mid \lambda f(x) < r\} = \{x \mid f(x) > r/\lambda\}$. In ogni caso abbiamo la controimmagine di un Boreliano (l'intervallo $]-\infty, r/\lambda[$ o l'intervallo $]r/\lambda, +\infty[$) e dunque un insieme misurabile.

2) Se f è misurabile tale è anche f^2, essendo $(\cdot)^2$ continua e pertanto Boreliana. Ma

$$f \cdot g = 1/4((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

e dunque $f \cdot g$ è misurabile.

3) Se f e g sono misurabili e $g \neq 0$,

$$f/g = f \cdot (\rho \circ g)$$

è misurabile, perchè $\rho : \mathbf{R} - \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ è continua e dunque Boreliana.

4) La funzione $|\cdot|$ è continua, dunque se f è misurabile, tale è $|f|$. Oppure: $\{|f| < c\} = \{f < c\} \cap \{-f < c\}$.

5) Se f e g sono misurabili, tali sono:

$$\max(f,g) = \frac{|f-g|+f+g}{2} \quad \text{e} \quad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \ .$$

q.e.d.

Teorema. *Se una succsssione di funzioni misurabili converge semplicemente, la funzione limite è misurabile:*

$$\forall n f_n \in \mathcal{M} \quad \text{e} \ \forall x \in X \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow f \in \mathcal{M} \ .$$

*Dimostrazione.*Basta osservare che

$$\{x \mid f(x) < c\} = \cup_k \cup_n \cap_{p>n} \{x \mid f_p(x) < c - 1/k\} \ .$$

Infatti, se x appartiene al secondo membro

$$\exists k \ \exists n \ \forall p > n \ f_p(x) < c - 1/k \ ,$$

e, passando al limite per $p \to \infty$, si trova $f(x) \le c - 1/k < c$.
Se x appartiene al primo membro allora

$$f(x) < c \ \Rightarrow \exists k \ f(x) < c - 2/k \ ,$$

ma per la convergenza

$$\exists n \ \forall p > n \ f_p(x) < f(x) + 1/k \quad \text{e dunque} \quad f_p(x) < c - 1/k \ .$$

q.e.d.

Per la validità della dimostrazione precedente non è necessario che $f_n(x)$ converga a $f(x)$, basta che $f(x) = \limsup_n f_n(x)$ per garantire che per ogni ε si abbia definitivamente $f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Considerando la successione $-f_n$ si vede anche che $\liminf_n f_n(x)$ è misurabile.
Questi risultati si possono ottenere anche utilizzando la

Proposizione. *Se le funzioni f_n sono misurabili, tali sono* $\sup_n f_n(x)$ *e* $\inf_n f_n(x)$.
Dimostrazione. Basta osservare che

$$\sup_n f_n(x) = \lim_N \max_{1\le p\le N} f_p(x) \ ,$$

ed una relazione analoga vale per $\inf_n f_n(x)$.

Allora segue che

$$\limsup_n f_n(x) = \lim_n \sup_{p\ge n} f_n(x) \ \text{e} \quad \liminf_n f_n(x) = \lim_n \inf_{p\ge n} f_n(x)$$

sono funzioni misurabili.

1.4 *Convergenza q.o e in misura*

Proposizioni valide quasi ovunque (q.o.).
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura* μ **completa.** *Sia P(x) una proposizione dipendente dalla variabile* $x \in X$ *. Si dice che* $P(x)$ *vale quasi ovunque (q.o.) o per quasi ogni* x *se e solo se* $\{x \mid P(x)$ *è falsa*$\}$ *ha misura nulla.*

Ad esempio

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \ q.o. \ \Leftrightarrow \mu(\{x \mid \lim_n f_n(x) \neq f(x) \text{ o non esiste } \}) = 0 \ .$$

In tal caso si dice che f_n converge ad f **quasi ovunque** $f_n \to f$ *q.o.* o $f_n \to f$ *a.e.* (*almost everywhere*).

Nel caso di *misure di probabilità* le funzioni misurabili si dicono *variabili aleatorie (v.a.)* e la convergenza quasi ovunque si dice *convergenza quasi certa (q.c.)* o *convergenza con probabilità 1:* $f_n \to f$ *q.o. o* $f_n \to f$ *a.s.* (*almost surely*).

È bene osservare che $f = g$ *q.o. è una* **relazione di equivalenza.**

I risultati precedenti sui limiti di funzioni misurabili si possono estendere con il seguente

Teorema. *Se* $f_n \in \mathcal{M}$ *e* $f_n \to f$ *q.o., allora* $f \in \mathcal{M}$ *.*
Dimostrazione. Se $A = \{x \mid \lim_n f_n(x) = f(x)\}$, si ha per ipotesi $A, A^c \in \mathcal{A}$ e $\mu(A^c) = 0$. Allora

$$\{x \mid f(x) < c\} = \{x \in A \mid f(x) < c\} \cup \{x \in A^c \mid f(x) < c\} \ .$$

A secondo membro il primo insieme è misurabile per il teorema precedente (con A al posto di X) e il secondo insieme $\subseteq A^c$ è misurabile (e di misura nulla) essendo μ completa.

Siamo ora in grado di dimostrare un teorema fondamentale sul rapporto tra convergenza semplice quasi ovunque e convergenza uniforme:

Teorema di Egorov. *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, con* μ *completa e finita:* $\mu(X) < +\infty$ *. Siano* $f_n \in \mathcal{M}$ *tali che* $f_n \to f$ *q.o. . Allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists X_\varepsilon \in \mathcal{A}$$

tale che

$$\begin{array}{ll} 1) & \mu(X - X_\varepsilon) < \varepsilon \ , \\ 2) & f_n \mid_{X_\varepsilon} \to f \mid_{X_\varepsilon} \ \textit{uniformemente in} \ X_\varepsilon \ . \end{array}$$

Dimostrazione. Essendo f misurabile, per i risultati precedenti e la completezza di μ, poniamo:

$$X_n^p = \cap_{i \geq n} \{x \in X \mid |f_i(x) - f(x)| < 1/p\} \ ,$$

$$X^p = \cup_{n=1}^{\infty} X_n^p \ ... \ \supseteq X_n^p \supseteq ... \ X_2^p \supseteq X_1^p \ .$$

Tutti questi insiemi sono misurabili e per la continuità della misura $\mu(X^p) = \lim_n \mu(X_n^p)$, dunque, essendo $\mu(X^p) \leq \mu(X) < +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \ \mu(X^p - X_\nu^p) < \varepsilon / 2^p \ .$$

Sia $\nu(p)$ un indice per il quale la disuguaglianza precedente vale e poniamo $X_\varepsilon = \cap_p X^p_{\nu(p)}$. Allora:

1) Su X_ε la convergenza è uniforme, infatti si ha

$$\forall 1/p \ \exists \nu (= \nu(p)) \ X_\varepsilon \subseteq X^p_{\nu(p)}$$

e dunque

$$\forall i \geq \nu \ \forall x \in X_\varepsilon \ |f_i(x) - f(x)| < 1/p \ .$$

2) In $X - X^p$ la successione f_n non converge, perchè se $x \notin X^p$, allora $\forall n \ x \notin X^p_n$ e quindi $\exists i \geq n \ |f_i(x) - f(x)| \geq 1/p$. Cioè esistono infiniti indici i tali che $|f_i(x) - f(x)| \geq 1/p$ e pertanto $f_n(x)$ non converge. Dunque $\mu(X - X^p) = 0$, essendo $X - X^p$ un sottoinsieme di un insieme che per ipotesi ha misura nulla. Basta ora osservare che

$$\mu(X - X_\varepsilon) = \mu(X - \cap_p X^p_{\nu(p)}) = \mu(\cup_p (X - X^p_{\nu(p)}) \leq$$

$$\leq \sum_p \mu(X - X^p_{\nu(p)}) = \sum_p \mu(X^p - X^p_{\nu(p)}) \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \varepsilon/2^p = \varepsilon \ .$$

q.e.d.

Un ruolo importante è svolto dal seguente tipo di convergenza.

Definizione. *La successione f_n di funzioni misurabili* **converge in misura** *alla funzione f se e solo se*

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_n \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0 \ .$$

Nel caso di misure di probabilità, si dice che f_n converge in probabilità a f.

Se la misura è finita, la convergenza puntuale q.o. implica la convergenza in misura, mentre una successione può convergere in misura senza convergere q.o., pur ammettendo certamente una sottosuccessione convergente q.o.

Teorema. *Sia $\mu(X) < +\infty$ e f_n convergente q.o. a f. Allora f_n converge in misura a f.*
Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, ricorriamo al teorema di Egorov e sia X_ε tale che $\mu(X - X_\varepsilon) < \varepsilon$ e su X_ε si abbia convergenza uniforme. Allora, fissato comunque $\alpha > 0$, per n sufficientemente grande ($> \nu$ dipendente da α e ε)

$$\forall x \in X_\varepsilon \ |f_n(x) - f(x)| < \alpha$$

e quindi l'insieme dove $|f_n(x) - f(x)| \geq \alpha$ è contenuto in $X - X_\varepsilon$. Dunque per n sufficientemente grande

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \alpha) \leq \mu(X - X_\varepsilon) < \varepsilon \ .$$

q.e.d.

Osservazione. L'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è essenziale: in $\mathbf{R}$ munito della misura standard (di Lebesgue) λ, che assegna ad ogni intervallo (a, b) la sua lunghezza $b - a$, risulta

$$\chi_{[n,n+1[} \to 0 \ \text{ ovunque, ma } \quad \forall n \ \lambda(\{ \ |\chi_{[n,n+1[} - 0| \geq 1/2\}) = 1 \ ,$$

Osservazione. Se $f_n \to f$ in misura, non necessariamente $f_n \to f$ q.o. Basta fornire un controesempio: sia $X = [0, 1[$ con la misura di Lebesgue λ usuale; sia

$$\chi_{n,k} = \chi_{[(k-1)/n, k/n[} \ \ n = 1, 2, ... \ \ , \ k = 1, 2, ..., n \ .$$

Ordiniamo queste funzioni caratteristiche formando la successione $f_p = \chi_{n,k}$, $p = 1+2+...(n-1) + k$. Per ogni $x \in [0, 1[$ vi sono infiniti indici p per i quali $f_p(x) = 1$ e infiniti per i quali $f_p(x) = 0$: quindi la successione f_p non converge in nessun punto. Ma ovviamente per ogni $0 < \alpha < 1$

$$\lambda(\{ \ |\chi_{n,k} - 0| \geq \alpha\}) = \frac{1}{n} \to 0$$

e le f_p tendono a 0 in misura.

Teorema. *Sia $\mu(X) < +\infty$ e f_n convergente in misura a f. Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} converge q.o. a f.*

Dimostrazione. Siano α_n e η_n nomeri positivi tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n < +\infty \ .$$

Selezioniamo, in virtù dell'ipotesi di convergenza in misura, degli indici $n_1 < n_2 < ...$ tali che

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| \geq \alpha_k\}) < \eta_k \ .$$

Siano infine

$$A_j = \cup_{k=j}^{+\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \alpha_k\} \ \text{ e } \ B = \cap_{j=1}^{+\infty} A_j \ .$$

Si ha $A_{j+1} \subseteq A_j$ e, per la continuità della misura,

$$\sum_{k=j}^{+\infty} \eta_k \geq \mu(A_j) \to \mu(B) \ .$$

Poiché il resto della serie tende a 0, si ottiene $\mu(B) = 0$. Ma

$$\forall x \in X - B \quad \lim_k f_{n_k}(x) = f(x) \ .$$

Infatti se $x \notin B$ esiste j tale che $x \notin A_j$, cioè per ogni $k \geq j$

$$x \notin \{|f_{n_k} - f| \geq \alpha_k\} \ \text{ ovvero } \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \alpha_k \ .$$

Ma $\alpha_k \to 0$ e il teorema è dimostrato.

* * *

La convergenza q.o. in generale non è topologica, almeno nel caso (usuale) in cui la convergenza in misura non implica la convergenza q.o. (Billingseley [1]).

Supponiamo per assurdo che sia definita una famiglia di intorni $V(f)$ di ogni ogni funzione misurabile f, tale che $f_n \to f$ *q.o.* equivalga a

$$\forall V(f) \exists \nu \forall n > \nu \quad f_n \in V(f) \ ,$$

e g_n sia convergente in misura a g, ma non converga q.o. a g. Dunque

$$\exists V(g) \forall \nu \exists n > \nu \quad g_n \notin V(g) \ ,$$

ovvero esiste una sottosuccessione g_j^* di elementi non appartenenti a $V(g)$. Da essa si può estrarre un ulteriore sottosuccessione $g_{j_k}^*$ convergente a g q.o. Allora le $g_{j_k}^*$ dovrebbero appartenere definitivamente a $V(g)$ e si giungerebbe ad una contraddizione.

Si osservi che, se una successione f_n si può scomporre in un numero finito o in una infinità numerabile di sottosuccessioni f_j^p convergento q.o. ad f:

$$f_j^p(x) \to f(x) \quad \text{tranne che per} \quad x \in A_p \quad \text{e} \quad \mu(A_p) = 0 \ ,$$

allora l'intera successione converge q.o. ad f:

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{tranne che per} \quad x \in A = \cup_p A_p \quad \text{e} \quad \mu(A) = \mu(\cup_p A_p) = 0 \ .$$

Naturalmente, se f_n converge in misura a f, esistono infinite sottosuccessioni convergenti q.o. a f, ma non necessariamente una infinità numerabile. E un'unione non numerabile di insiemi di misura nulla può non avere misura nulla.

La convergenza in misura (considerando soltanto misure finite: $\mu(X) < +\infty$) si può invece esprimere in termini di una opportuna distanza. Più precisamente, introducendo nello spazio $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ delle funzioni misurabili la relazione di equivalenza

$$f \sim g \ \Leftrightarrow f = g \ q.o.$$

e considerando lo spazio quoziente $M = \mathcal{M}/\sim$, si ha

Teorema. *In $M(X, \mathcal{A}, \mu)$ la funzione*

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$$

è una distanza. (Nella formula precedente si ricorre al consueto abuso di indicare con gli stessi simboli f e g sia due classi di equivalenza che due loro arbitrari rappresentanti.)
La convergenza secondo la metrica d è equivalente alla convergenza in misura.
(M, d) è uno spazio metrico completo (Yosida [11]).

Dimostrazione. È immediato controllare che $d(f,g)=0$ se e solo se $f=g$ *q.o.* e che $d(f,g)=d(g,f)$. La disuguaglianza triangolare segue facilmente dalle disuguaglianze

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \ .$$

È bene notare inoltre che la funzione $x/(1+x)$ per $x \geq 0$ è crescente e concava e tende a 1 per $x \to +\infty$.
Per vedere che la convergenza nel senso della metrica d e la convergenza in misura sono equivalenti basta osservare che, per ogni ε, posto $E = \{\ |f-g| \geq \varepsilon\}$, si ha

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(E) \leq \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu \leq (\int_E + \int_{X-E}) \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu =$$

$$= d(f,g) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(X-E) \ .$$

Per dimostrare che (M,d) è completo consideriamo una successione f_n di Cauchy per d. Viste le disuguaglianze precedenti, possiamo trovare una sottosuccessione f_{n_j} tale che

$$\mu(E_j) \leq 2^{-j} \quad , \text{dove} \quad E_j = \{\ |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \geq 2^{-j}\ \} \ .$$

Allora la serie

$$F(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

risulta convergente su

$$E^c = \cup_l \cap_{j \geq l} E_j^c \quad \text{dove} \quad E = \cap_l \cup_{j \geq l} E_j$$

e $\mu(E) = 0$. Infatti, se $x \in E^c$, esiste l tale che per $j \geq l$ i termini sono maggiorati da quelli della serie geometrica di ragione $1/2$, mentre

$$\forall l \ \mu(E) \leq \mu(\cup_{j \geq l} E_j) \leq \sum_{j \geq l} \mu(E_j) \leq \sum_{j \geq l} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{l-1}} \ .$$

e quindi, facendo tendere l a $+\infty$, $\mu(E) = 0$.
Ma la su E^c, cioè q.o., la serie converge anche semplicemente, ovvero converge la sottosuccessione f_{n_j}, diciamo ad un limite f misurabile. La convergenza q.o. implica la convergenza in misura di f_{n_j} a f e quindi $d(f_{n_j}, f) \to 0$. La successione iniziale f_n è di Cauchy e, ammettendo una sottosuccessione convergente a f, è essa stessa convergente a f. *q.e.d.*

& & &

Capitolo 2

Integrale di Lebesgue astratto

In questa parte considereremo uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$, supponendo che μ sia completa. Nella prima parte, per semplicità nella presentazione dell'integrale e nella dimostrazione delle sue principali proprietà, supporremo inoltre che essa sia finita ($\mu(X) < +\infty$), oppure restringeremo le nostre considerazioni a sottoinsiemi A di misura finita. Successivamente accenneremo alla estensione dei risultati conseguiti limitandoci al caso di misure σ-finite. Indicheremo con $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{A}; \mathbf{R})$ la famiglia delle funzioni misurabili a valori reali.

2.1 *Funzioni semplici*

Definizione. *$f \in \mathcal{M}$ si dice semplice se e solo se $f \in \mathcal{M}$ e $f(X)$ è finito o numerabile*[1], *ovvero*

$$f(X) = \{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...\} \text{ e } f^{-1}(\{y_n\}) = A_n \in \mathcal{A}\ .$$

Per dire che f è semplice scriveremo $f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Teorema. *$f \in \mathcal{M}$ se e solo se esiste una successione di funzioni semplici $f_n \in \mathcal{S}$ convergenti ad f uniformemente.*
Dimostrazione. Per ogni n definiamo $f_n(x) = k/n$ quando $k/n \le f(x) < (k+1)/n$. Si ha $f_n \in \mathcal{S}$ e $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \le 1/n$. Viceversa, se f è limite addirittura uniforme (e quindi puntuale) di funzioni semplici, che sono misurabili, allora $f \in \mathcal{M}$. *q.e.d.*

Osservazione. Talvolta interessa approssimare f con una successione di funzioni semplici *nondecrescente.* In tal caso basta considerare, per ogni n, intervalli di ampiezza $1/2^n$ e porre

[1] Seguiremo la presentazione di Kolmogorov-Fomin [8]. Osserviamo tuttavia che la maggior parte degli autori considera funzioni semplici che prendono soltanto un numero finito di valori. Come vedremo al termine del capitolo, i due percorsi di costruzione dell'integrale sono equivalenti. Con la definizione adottata si ha il vantaggio di poter sfruttare i risultati noti sulle serie (assolutamente) convergenti, con però la necessità di conoscere qualche elemento di teoria della sommabilità, o almeno risultati concernenti il trattamento delle serie doppie.

$f_n(x) = k/2^n$ quando $k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n$. Infatti risulta allora

$$f_n(x) = [\frac{k}{2}]\frac{1}{2^n} \leq \frac{k}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x) \quad \text{per} \quad \frac{k}{2^{n+1}} \leq x < \frac{k+1}{2^{n+1}} \ .$$

Definiamo ora l'integrale per la classe delle funzioni semplici.

Definizione. *Sia $f \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{A}$ di misura finita. Siano y_n i valori distinti assunti da f e $A_n = \{x \in A |\ f(x) = y_n\}$. Si dice integrale di f su A la quantità*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \mu(A_n) \ ,$$

se la serie a secondo membro è assolutamente convergente. Se l'integrale esiste (ciè se la serie converge assolutamente) si dice che f è integrabile su A .

Osservazione 1. L'assoluta convergenza è richiesta perchè l'integrale non dipenda dall'ordine con il quale si considerano i valori distinti assunti da f.

Osservazione 2. Se gli insiemi misurabili B_i costituiscono una partizione di A e $f = f_i$ su B_i , essendo f_i uno dei valori y_n , allora

$$\int_A f d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i) \ ,$$

e questa serie e quella che appare nella definizione sono simultaneamente assolutamente convergenti.

Osservazione 3. Ovviamente, se ci interessa solo l'insieme A, basta che f sia semplice su A (non hanno rilevanza i valori assunti su A^c, dove f potrebbe anche non essere definita).

Alcune proprietà dell'integrale delle funzioni semplici.
1) Se $f, g \in \mathcal{S}$ sono integrabili su A , ogni loro combinazione lineare è integrabile su A. Inoltre l'integrale è lineare:

$$\int_A (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \ ,$$

2) Se $f \in \mathcal{S}$ e $|f(x)| \leq M$ q.o. in A , allora

$$|\int_A f d\mu| \leq M \mu(A) \ .$$

Le dimostrazioni sono conseguenza immediata di note proprietà delle serie. Per il punto 1) si consideri una partizione $\{C_j\}_j$ di A con f e g costanti su ogni C_j.

2.2 *Funzioni sommabili*

Definizione. *Sia $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$: $f \in \mathcal{M}$ si dice sommabile o integrabile su A se e solo se esiste una successione di funzioni semplici f_n integrabili su A che convergono uniformemente, su A, ad f. Si pone allora*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n d\mu \ .$$

Verifica della correttezza della definizione.
1) Con le ipotesi fatte, il limite che appare nella definizione esiste ed è finito in quanto $\int_A f_n d\mu$ è una successione di Cauchy:

$$|\int_A f_m d\mu - \int_A f_n d\mu| \leq \int_A |f_m - f_n| d\mu \leq \mu(A) \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| \to 0$$

quando m, n tendono ad infinito.
2) Il limite non dipende dalla successione di funzioni semplici approssimanti: siano f_n e g_n due successioni in $\mathcal{S}$ integrabili su A e convergenti uniformemente a f su A . Allora anche h_n , con $h_{2n} = f_n$ e $h_{2n-1} = g_n$, ha le stesse proprietà, ma

$$\lim_n \int_A f_n d\mu = \lim_n \int_A g_n d\mu = \lim_n \int_A h_n d\mu \ ,$$

perchè $\int_A f_n d\mu$ e $\int_A g_n d\mu$ sono sottosuccessioni della successione convergente $\int_A h_n d\mu$.
3) Se f è semplice ed integrabile su A la definizione concorda con quella precedentemente data per le funzioni semplici: basta approssimare f con la successione costante $f_n = f$.

Osservazione. Abbiamo definito direttamente l'integrale di una funzione f su un insieme misurabile A . Avremmo potuto equivalentemente, per ora almeno nel caso $\mu(X) < +\infty$, prima definire l'integrale su tutto lo spazio X e poi porre

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu \ ,$$

essendo χ_A la funzione caratteristica di A .
Oppure, dopo aver definito $\int_X f d\mu$, introdurre l'integrale su A considerando la restrizione della funzione f ad A e lo spazio di misura $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$, dove $\mathcal{A}_A$ è la famiglia dei sottoinsiemi di A che appartengono a $\mathcal{A}$ e μ_A la restrizione di μ a $\mathcal{A}_A$:

$$\int_A f d\mu = \int_A f|_A d\mu_A \ .$$

2.3 *Proprietà elementari dell'integrale*

Eventualmente considerando integrali di funzioni semplici approssimanti e passando al limite si ottengono facilmente i seguenti risultati.

Teorema.
1) Per ogni insieme misurabile A

$$\int_A 1 \; d\mu = \mu(A) \; .$$

Infatti la funzione caratteristica di A è semplice.
2) Se f e g sono sommbili su A, le loro combinazioni lineari sono sommabili su A e

$$\int_A (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \; .$$

Dunque le funzioni integrabili su A formano uno spazio lineare e l'integrale è un funzionale lineare.
3) Se $f = 0$ q.o. in A, allora

$$\int_A f d\mu = 0 \; .$$

Infatti se f_n sono funzioni semplici approssimanti f, $f_n \chi_{\{f \neq 0\}}$ sono ancora funzioni semplici convergenti uniformemente a f, con integrale evidentemente nullo.
4) È anche vero che

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f d\mu = 0 \; .$$

5) L'integrale è un funzionale positivo e quindi monotono: se f è sommabile su A e

$$f(x) \geq 0 \;\; q.o. \; in \; A \Rightarrow \int_A f d\mu \geq 0 \; ,$$

quindi

$$f(x) \leq g(x) \; q.o. \; in \; A \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \; .$$

Infatti se le funzioni semplici integrabili f_n approssimano f, essendo $|f_n^+ - f^+| \leq |f_n - f|$, $|f_n^+| \leq |f_n|$ e $f^+ = f$ q.o. in A , le f_n^+ sono integrabili e approssimano f.
6) f e $|f|$ sono simultaneamente sommabili su A e

$$|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\mu \; .$$

Infatti se f_n è integrabile e approssima f, essendo $||f_n| - |f|| \leq |f_n - f|$, $|f_n|$ è una successione di funzioni semplici integrabili e approssimante $|f|$.
7) Se f è una funzione misurabile e $|f| \leq \varphi$ q.o. in A, con φ sommabile su A , allora f è sommabile su A.
Infatti, sia $f_n, \varphi_n \in \mathcal{S}$, $|f_n - f| < 1/n$, $|\varphi_n - \varphi| < 1/n$ e φ_n integrabile, allora

$$|f_n| \leq |f| + \frac{1}{n} \leq \varphi + \frac{1}{n} \leq \varphi_n + \frac{2}{n}$$

e le f_n sono integrabili.

2.4 *Dipendenza dal dominio di integrazione*

Teorema (σ-additività dell'integrale). *Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una partizione numerabile di A , con $A, A_n \in \mathcal{A} : A = \cup_n A_n$ e $A_j \cap A_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Allora*
1) se f è integrabile su A, essa è integrabile su ciascun A_n e

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu \ .$$

Inoltre la serie a secondo membro è assolutamente convergente.
2) Se f è integrabile su ciascun A_n, allora

$$\sum_n \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty \Rightarrow f \text{ è integrabile su } A \text{ e}$$

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu \ .$$

Dimostrazione.
1) Sia $f \in \mathcal{S}$ e $f(X) = \{y_i\}$. (È equivalente considerare funzioni semplici definite su tutto X e considerarne la restrizione a A o considerare funzioni semplici su A e prolungarle, se occorre, a tutto X ponendole uguali a zero su A^c). Poniamo

$$B_i = \{x \in A \mid f(x) = y_i\} \text{ e}$$

$$B_{n,i} = \{x \in A_n \mid f(x) = y_i\} = B_i \cap A_n \ .$$

Allora

$$\int_A f d\mu = \sum_i y_i \mu(B_i) =$$

(per la sigma-additività di μ)

$$= \sum_i y_i \sum_n \mu(B_{n,i}) = \sum_n \sum_i y_i \mu(B_{n,i}) = \sum_n \int_{A_n} f d\mu \ .$$

Lo scambio delle sommatorie è consentito per la sommabilità della famiglia di numeri $\{y_i\mu(B_{n,i})\}$)
.
Consideriamo ora una funzione sommabile f qualunque e, dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, sia $g_\varepsilon \in \mathcal{S}$ tale che $\sup_x |f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Allora

$$\int_A g_\varepsilon d\mu = \sum_n \int_{A_n} g_\varepsilon d\mu \ ,$$

quindi si vede che f è integrabile su ciascun A_n e

$$|\int_A f d\mu - \sum_n \int_{A_n} f d\mu| \leq |\int_A f d\mu - \int_A g_\varepsilon d\mu| + |\int_A g_\varepsilon d\mu - \sum_n \int_{A_n} f d\mu| \leq$$

$$\leq \varepsilon\mu(A) + \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = 2\varepsilon\mu(A) \ .$$

2) Anche per questa implicazione ci si riconduce alle proprietà delle serie assolutamente convergenti, con funzioni semplici approssimanti. *q.e.d.*

Osservazione. Non sarebbe sufficiente,per questa seconda parte, chiedere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f d\mu \right| < +\infty \ .$$

Ad esempio, se si considera l'intervallo $]0,1]$ con la misura di Lebesgue dx, le sue partizioni costituite dagli intervalli X_n e rispettivamente A_k definite da

$$X_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad , \quad A_k = X_{2k-1} \cup X_{2k} =]\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k-1}] \ ,$$

e la funzione

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} (-1)^n n(n+1) \chi_{X_n}(x) \ ,$$

si ha

$$\int_{X_n} f(x)dx = (-1)^n \quad , \quad \sum_k \left| \int_{A_k} f(x)dx \right| = \sum_k 0 = 0 \quad ,$$

ma f non è integrabile, altrimenti lo sarebbe il suo valore assoluto, mentre

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_n \int_{X_n} |f(x)|dx = \sum_n 1 = +\infty \ .$$

Per le nozioni fondamentali concernenti la sommabilità rinviamo, per esempio, a Negro [ ], Appendice A.4. Riportiamo di seguito soltanto un breve riassunto dei risultati essenziali, senza dimostrazioni.

* * *

Definizione. Una famiglia $\{a_\kappa\}_{\kappa\in K}$, dove K è un insieme arbitrario, di numeri complessi si dice **sommabile** se e solo se, indicando con $\mathcal{F}$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di K, posto

$$s_F = \sum_{\kappa \in F} a_\kappa \quad \text{per} \quad F \in \mathcal{F} \ ,$$

esiste un numero complesso s tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_0 \in \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F} \quad F_0 \subseteq F \Rightarrow |s - s_F| < \varepsilon \ .$$

In tal caso s si dice la somma della famiglia e si scrive

$$s = \sum_{\kappa \in K} a_\kappa \ .$$

Proposizione. Nel caso di numeri reali non negativi ($a_\kappa \geq 0$) si può equivalentemente definire s come estremo superiore delle somme finite:

$$s = \sup_{F \in \mathcal{F}} s_F \ .$$

Proposizione. La famiglia $\{a_\kappa\}_{\kappa \in K}$ è sommabile se e solo se è sommabile la famiglia $\{|a_\kappa|\}_{\kappa \in K}$.

Proposizione. Sia $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una partizione arbitraria di K, allora

$$\sum_{\kappa \in K} a_\kappa = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\sum_{\kappa \in K_\gamma} a_\kappa) \ .$$

In particolare, se $K = \Lambda \times M$, si ha, sotto la condizione di sommabilità della famiglia $\{a_{(\lambda\,\mu)}\}_{(\lambda\,\mu) \in \Lambda \times M}$ la formula di *commutazione dei segni di somma*:

$$\sum_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} a_{(\lambda,\mu)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\sum_{\mu \in M} a_{(\lambda,\mu)}) = \sum_{\mu \in M} (\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{(\lambda,\mu)}) \ .$$

Nella dimostrazione della σ-additività dell'integrale serve soltanto la seguente

Proposizione. Se

$$\sup_{M,N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} |a_{jk}| < +\infty \ ,$$

allora

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{jk} \ ,$$

tutte le serie essendo assolutamente convergenti.

& & &

Per le applicazioni future e per il suo intrinseco interesse segnaliamo la seguente disuguaglianza, che fornisce una stima, non necessariamente accurata, della misura degli insiemi dove una funzione sommabile assume valori maggiori di un livello prefissato.

Disuguaglianza di Markov. *(Talvolta detta di Chebychev) Sia $f \geq 0$ q.o. in A e sia $c > 0$ un numero reale positivo arbitrario:*

$$\mu(\{x \in A \mid f(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A f d\mu \ .$$

Dimostrazione. Poniamo $B = \{x \in A \mid f(x) \geq c\}$:

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu \geq c \cdot \mu(B) \ .$$

q.e.d.

Da questa disuguaglianza si deduce un risultato semplice ma importante.

Proposizione.

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \ q.o.$$

Dimostrazione. Si ha anche

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A |f| d\mu = \int_{A \cap \{f > 0\}} f d\mu - \int_{A \cap \{f \leq 0\}} f d\mu = 0 \ .$$

Basta allora osservare che, se $A_n = \{|f| \geq 1/n\}$,

$$\{|f| > 0\} = \cup_n A_n \quad \text{e} \quad \mu(A_n) \leq n \int_X |f| d\mu = 0 \ ,$$

vista la disuguaglianza di Markov. *q.e.d.*

Teorema (assoluta continuità dell'integrale). *Sia f integrabile su A:*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \ \forall B \in \mathcal{A} \ B \subseteq A \ e \ \mu(B) < \delta \Rightarrow |\int_B f d\mu| < \varepsilon \ .$$

È conseguenza del teorema successivo, in quanto

$$F(B) = \int_B |f| d\mu \text{ per } B \subseteq A \text{ e } B \in \mathcal{A}$$

è una misura (sigma-additiva e finita) in A .

Definizione. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ una funzione (d'insieme). Si dice che F è σ-additiva o una misura (con segno) se:*

$$A = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n \ , \ A_n \in \mathcal{A} \ , \ A_i \cap A_j \ (i \neq j) \ \Rightarrow F(A) = \sum_n F(A_n) \ ,$$

essendo la serie assolutamente convergente. Lo spazio $(X, \mathcal{A}, F)$, dove $\mathcal{A}$ è la sigma-algebra di sottoinsiemi di X sulla quale F è definita, si dice spazio di misura con segno.
Si osservi che F non prende necessariamente valori non negativi e la convergenza assoluta è pretesa al solito perchè la somma non dipenda dall'ordine con il quale si considerano gli elementi A_n della partizione.
Si dimostra che esiste una costante C tale che $|F(A)| \leq C$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, cioè F è *limitata.*

Definizione. *Sia μ una misura positiva. La misura (con segno) F è μ-***assolutamente continua** *se e solo se*

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \ \mu(A) = 0 \Rightarrow F(A) = 0 \ .$$

Vedremo nel capitolo successivo che, se F è $\mu-$assolutamente continua, allora esiste f, univocamente definita q.o., tale che $F(A) = \int_A f d\mu$ (teorema di Radon-Nikodym).

Teorema. *Sia F una funzione d'insieme σ-additiva, finita e μ-assolutamente continua, allora*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \ \mu(A) < \delta \Rightarrow |F(A)| < \varepsilon \ .$$

Ci limitiamo al caso di una misura positiva: $F \geq 0$.
Dimostrazione. Per assurdo esistano $\varepsilon > 0$ e A_n tali che

$$\forall n \ \mu(A_n) < 1/2^n \text{ e } F(A_n) \geq \varepsilon \ .$$

Poniamo

$$A = \limsup_n A_n = \cap_n \cup_{p \geq n} A_p = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ per infiniti indici n } \} \ .$$

Allora

$$\forall n \ \mu(A) \leq \sum_{p \geq n} \mu(A_p) \leq \sum_{p \geq n} 1/2^p = 1/2^{n-1} \ .$$

Dunque $\mu(A) = 0$, ma per la continuità delle misure e la finitezza di F, risulta

$$F(A) = \lim_n F(\cup_{p \geq n} A_p) \geq \varepsilon \ ,$$

che contaddice l'ipotesi di μ-assoluta continuità. *q.e.d.*

2.5 *Passaggio al limite sotto segno di integrale*

I teoremi di questo paragrafo sono validi anche nel caso di misure non finite.

Teorema (di Lebesgue o della convergenza dominata). *Sia $A \in \mathcal{A}$ e siano $f, f_n : A \to$ $\mathbf{R}$ funzioni misurabili. Sia φ una funzione* **sommabile** *su A. Allora*

$$f_n \to f \ q.o. \ in \ A \text{ e } \ |f_n(x)| \leq \varphi(x) \ q.o. \ in \ A \Rightarrow \int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu \ .$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$,
1) per l'assoluta continuità dell'integrale esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B \varphi d\mu < \varepsilon/4 \ ;$$

2) per il teorema di Egorov possiamo scegliere B tale che

$$\mu(B) < \delta \text{ e su } C = A - B \ f_n \to f \text{ uniformemente } \ ,$$

quindi esiste N tale che

$$\forall x \in C \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2\mu(C) \ ;$$

3) si trova allora, per $n \geq N$,

$$| \int_A f d\mu - \int_A f_n d\mu | \leq \int_C |f_n - f| d\mu + \int_B |f_n| d\mu + \int_B |f| d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon \ .$$

q.e.d.

Teorema (di Beppo Levi o sulla convergenza monotona): *Sia f_n una successione di funzioni integrabili su A ($A \in \mathcal{A}$) tali che*

$$f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n ... \text{ q.o. in } A \quad \text{e} \quad \int_n f_n d\mu \leq C \ ,$$

dove C è una costante (indipendente da n). Allora per q.o. x in A esiste finito il limite

$$f(x) = \lim_n f_n(x) < +\infty \ ,$$

la funzione f è integrabile su A e

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu \ .$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $f_1 \geq 0$, altrimenti basterebbe studiare la successione $f_n - f_1$. Per la monotonia, q.o in A f_n converge ad un limite finito o diverge a $+\infty$.
1) Indicando con D l'insieme dove f_n diverge, dimostriamo che D ha misura nulla.

$$D = \{x \in A \mid f_n(x) \to +\infty\} = \cap_k \cup_n D_{k,n} \ ,$$

dove

$$D_{k,n} = \{x \in A \mid f_n(x) > k\} \ .$$

Per la positività di f_n e la disuguaglianza di Chebychev $\mu(D_{k,n}) \leq C/k$. Ma

$$D_{k,1} \subseteq D_{k,2} \subseteq ... \subseteq D_{k,n} ... \text{ e}$$

$$\forall k \ D \subseteq \cup_n D_{k,n} \ ,$$

quindi

$$\mu(D) \leq \mu(\cup_n D_{k,n}) = \lim_n \mu(D_{k,n}) \leq C/k \ ,$$

cioè $\mu(D) = 0$.
2) Per il passaggio al limite sotto segno di integrale possiamo ricondurci al teorema della convergenza dominata, introducendo una funzione maggiorante φ nel modo seguente. Siano

$$A_k = \{x \in A \mid k - 1 \leq f(x) < k\} \text{ e } \varphi(x) = k \text{ per } x \in A_k \ .$$

Ovviamente, essendo f l'estremo superiore delle f_n , $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ q.o. in A . Basta allora verificare che φ è sommabile. Se

$$B_p = \cup_{k=1}^p A_k \quad , \quad \text{su } B_p \quad |f_n(x)| \leq p \ .$$

La costante p è sommabile su B_p (stiamo supponendo che la misura sia finita) e quindi su B_p il teorema della convergenza dominata è applicabile. Inoltre per definizione $\varphi(x) \leq f(x) + 1$, dunque

$$\sum_{k=1}^{p} k\mu(A_k) = \int_{B_p} \varphi d\mu \leq \int_{B_p} f d\mu + \mu(B_p) \leq$$

$$\leq \lim_n \int_{B_p} f_n d\mu + \mu(A) \leq C + \mu(A) \ .$$

Ma allora la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu(A_k) = \int_A \varphi d\mu$$

converge (assolutamente) e φ è sommabile. *q.e.d.*

Teorema di Fatou. *Siano g, f_n funzioni integrabili su A, tali che*

$$g \leq f_n \ \textit{q.o. in } A \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n d\mu = C < +\infty \ .$$

Allora $f = \liminf_n f_n$ è integrabile su A e

$$\int_A f d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu = C \ .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$g_n = \inf_{p\geq n} f_p \ .$$

Le funzioni g_n sono misurabili e integrabili su A, perchè maggiorabili e minorabili mediante funzioni integrabili:

$$\forall p \geq n \quad g \leq g_n \leq f_p \ .$$

Peraltro,

$$f = \liminf_n f_n = \sup_n \inf_{p\geq n} f_p = \sup_n g_n \ .$$

L'ipotesi del teorema sugli integrali delle f_n si può scrivere

$$\sup_n \inf_{p\geq n} \int_A f_p d\mu = C < +\infty \ ,$$

quindi

$$\forall n \ \inf_{p\geq n} \int_A f_p d\mu \leq C \ .$$

Ma, essendo

$$\forall p \geq n \quad \int_A g_n d\mu \leq \int_A f_p d\mu \ ,$$

risulta

$$\forall n \ \int_A g_n d\mu \leq C \ .$$

Basta ora osservare che g_n converge q.o. non decrescendo ad f e, applicando il teorema di Beppo Levi, si ottiene che f è integrabile su A e

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A g_n d\mu \leq C \ .$$

q.e.d.

Una conseguenza quasi immediata del teorema di Fatou, frequentemente utilizzata nelle applicazioni per portare al limite maggiorazionni di integrali, è presentata nel sguente

Corollario. *Siano f_n funzioni integrabili su A tali che*

$$\forall n \ f_n \geq 0 \quad \text{e} \quad f_n \to f \ \textit{q.o. in } A \ ,$$

allora

$$\forall n \ \int_A f_n d\mu \leq C \Rightarrow \int_A f d\mu \leq C \ .$$

Dimostrazione. Basta porre $g = 0$ e osservare che

$$f = \lim_n f_n = \liminf_n f_n \text{ e che } \liminf_n \int_A f_n d\mu \leq C \ ,$$

ricorrendo quindi al teorema di Fatou.

2.6 *Lo spazio delle funzioni integrabili*

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Dunque $\mathcal{A}$ è una σ-algebra e μ una misura (σ-additiva), che assumeremo completa. Continuiamo a supporre, soltanto per semplicità delle dimostrazioni, $\mu(X) < +\infty$.
Consideriamo l'insieme delle funzioni (a valori reali) integrabili su X e poniamo

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid \int_X |f| d\mu < +\infty\} \ .$$

È immediato verificare che $\mathcal{L}^1$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e che $\int_X |f| d\mu$ è una seminorma su $\mathcal{L}^1$.

Per operare in uno spazio normato, introduciamo la relazione di equivalenza

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \ \textit{q.o.}$$

e definiamo lo spazio quoziente

$$L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1 / \sim \ .$$

Si controlla senza difficoltà che $\|f\|_1 = \int_X |f^*| d\mu$, dove f^* è un qualunque rappresentante di f ($f^* \in f$), è una norma nello spazio vettoriale L^1.

Nel seguito, ove non vi siano pericoli di equivoco, tenderemo ad adottare il comune abuso di linguaggio che confonde rappresentanti e classi di equivalenza. Per esempio diremo "sia f una funzione di L^1" , intendendo che vogliamo considerare una classe di equivalenza ed f indica sia la classe che un suo rappresentante, modificabile arbitrariamente su un insieme di misura nulla.

Teorema. (Completezza di L^1). *L^1 munito della norma $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$ è uno spazio di Banach.*
Dimostrazione. Sia f_n una successione di Cauchy in L^1:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \|f_m - f_n\|_1 \leq \varepsilon \ .$$

Possiamo estrarre una sottosuccessione f_{n_k} tale che

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 < \frac{1}{2^k} \ .$$

Infatti

$$\forall k \ \exists n_k > n_{k-1} \ \forall n \geq n_k \ \|f_n - f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^k} \ .$$

Consideriamo la serie

$$F(x) = |f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \dots \ .$$

Le sue ridotte $F_k(x)$ non decrescono e i loro integrali sono limitati: $\int_X F_k d\mu \leq C = ||f_{n_1}||_1 + 1$. Applicando il teorema di Beppo Levi, si ottiene che $F(x) < +\infty$ q.o. e che F è integrabile. Allora

$$f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) + \dots + f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x) = f_{n_k}(x)$$

converge q.o. ad un limite finito $f(x)$. Ma $|f_{n_k}| \leq F$ e dunque, applicando il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, si ottiene in particolare che $f \in L^1$.
Vediamo ora che f è limite in L^1 di f_{n_k}:

$$f_{n_k} - f \to 0 \ q.o. \ \text{ e } \ |f_{n_k} - f| \leq 2F \ ,$$

dunque, sempre per il teorema di Lebesgue,

$$\|f_{n_k} - f\|_1 = \int_X |f_{n_k} - f| d\mu \to \int_X 0 \ d\mu = 0 \ .$$

Essendo f_n di Cauchy, la convergenza di una sottosuccessione implica la convergenza di tutta la successione: $\|f_n - f\|_1 \to 0$. *q.e.d.*

Corollario. *Ogni successione f_n convergente in L^1 ammette una sottosuccessione covergente q.o.*
Dimostrazione. Ogni successione convergente è di Cauchy. *q.e.d.*

Osservazione. Se $f_n \to f$ in L^1 non necessariamente $f_n \to f$ q.o. Basta fornire un controesempio: sia $X = [0, 1[$ con la misura di Lebesgue usuale; sia

$$\chi_{n,k} = \chi_{[(k-1)/n, k/n[} \quad n = 1, 2, \dots \ , \ k = 1, 2, \dots, n \ .$$

Ordiniamo queste funzioni caratteristiche formando la successione $f_p = \chi_{n,k}$, $p = 1+2+...(n-1)+k$. Per ogni $x \in [0,1[$ vi sono infiniti indici p per i quali $f_p(x) = 1$ e infiniti per i quali $f_p(x) = 0$: quindi la successione f_p non converge in nessun punto. Ma ovviamente

$$\int_X f_p dx = 1/n \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

e dunque f_p converge a 0 in norma L^1.

Se f_n converge ad f in L^1 e f_{n_k} è una sottosuccessione convergente ad f q.o., f_{n_k} converge ad f in misura (la convergenza q.o. implica quella in misura). Questo risultato può essere rafforzato.

Teorema. *Se f_n converge ad f in L^1, allora f_n (l'intera successione) converge in misura ad f.*
Dimostrazione. Basta applicare la disuguaglianza di Markov:

$$\mu(\{|f_n - f| \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

per $n \to +\infty$.

Teorema. *Le combinazioni lineari (finite) delle funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili sono dense in L^1. Questa proprietà si esprime dicendo che $\{\chi_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ è una famiglia* **totale** *in L^1.*
Dimostrazione.
1) Le funzioni semplici integrabili sono dense in L^1. Infatti se $f \in L^1$ esiste una successione di funzioni semplici integrabili f_n uniformemente convergente ad f. Ma allora, se $|f - f_n| < \varepsilon$ per $n \geq \nu$, si ha

$$\|f - f_n\|_1 = \int_X |f - f_n| d\mu < \varepsilon\mu(X)$$

e quindi f_n converge ad f in L^1.
2) Sia g una funzione semplice integrabile:

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \chi_{A_k} \text{ e } \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|\mu(A_k) < +\infty \ ,$$

dove le y_k sono i valori distinti di g e A_k gli insiemi misurabili (disgiunti) sui quali g vale y_k. Allora, posto

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} y_k \chi_{A_k} \ ,$$

si ha

$$\|g - g_N\|_1 = \sum_{K=N+1}^{+\infty} |y_k|\mu(A_k) \to 0$$

per $N \to +\infty$. Dunque le combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili sono dense nell'insieme delle funzioni semplici integrabili, e, per il punto uno, sono dense in L^1. *q.e.d.*

Tenendo conto della completezza di L^1 , il risultato ora ottenuto permette di stabilire il seguente criterio di integrabilità.

Teorema. *Una funzione f è integrabile se e solo se essa è limite q.o. di una successione f_n di funzioni semplici che assumono solo un numero finito di valori distinti e che costituiscono una successione di Cauchy il L^1:*

$$f \in L^1 \Leftrightarrow f = \lim_n f_n \text{ } q.o. \text{ , } f_n = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^n \chi_{A_k^n} \text{ e } \int_X |f_m - f_n| d\mu < \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, purché m ed n siano sufficientmente grandi.
Inoltre

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu \text{ .}$$

Dimostrazione. Se le f_n formano una successione di Cauchy in L^1, per la completezza di L^1 esse convergono in L^1 ad una funzione integrabile f^* ed una loro sottosuccessione converge q.o. a f^*. Dunque $f = f^*$ q.o. e

$$|\int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \to 0 \text{ .}$$

Viceversa, per il precedente teorema di densità, ogni funzione integrabile può essere approssimata come indicato nell'enunciato di questo teorema. *q.e.d.*

2.7 *L'integrale in spazi di misura σ-finita*

Nel caso di misure non finite ($\mu(X) = +\infty$) una definizione diretta dell'integrale mediante approssimazione con funzioni semplici richiederebbe qualche variante. In tal caso infatti la convergenza uniforme di una successione di funzioni semplici non implica necessariamente la convergenza dei loro integrali. Ad esempio, con $X = \mathbf{R}$ e l'ordinaria misura di Lebesgue dx, si ha

$$f_n(x) \overset{def}{=} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{]-n,n[}(x) \to 0 \text{ uniformemente, ma } \int_X f_n dx = 2(-1)^n \text{ ,}$$

e la successione degli integrali è oscillante.

Avendo già trattato il caso delle misure finite, volendo conservare la proprietà che una funzione è integrabile se e solo se il suo valore assoluto è integrabile, volendo inoltre conservare la σ-additività dell'integrale, conviene adottare la definizione seguente.

Definizione. *Sia μ σ-finita e sia $\{X_n\}_n$ una partizione di X con insiemi disgiunti di misura finita:*

$$X = \cup_n X_n \quad , \quad i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset \quad , \quad \mu(X_n) \leq +\infty \text{ .}$$

Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice integrabile se e solo se la sua restrizione a ciascun X_n è integrabile su X_n, dunque il suo valore assoluto è integrabile su X_n, e la serie degli integrali del valore assoluto converge:

$$\sum_n \int_{X_n} |f| d\mu < +\infty \ .$$

(Con un abuso di linguaggio, di uso comune, negli integrali precedenti abbiamo scritto f in luogo di $f|_{X_n}$.)
Si pone allora

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_{X_n} f d\mu \ ,$$

serie convergente, la cui somma non dipende dall'ordine dei termini.

Osservazione 1. La definizione dell'integrale non dipende dalla partizione considerata. Se infatti Y_n è un'altra partizione con $\mu(Y_n) < +\infty$, consideriamo la partizione più fine $X_j \cap Y_k$, il cui elemento generico verrà indicato con Z_n. Per la σ-additività dell'integrale, che abbiamo studiato nel caso di insiemi di misura finita, e per le proprietà di decomposizione delle somme infinite, si vede facilmente che se una delle famiglie

$$\{\int_{X_n} |f| d\mu\}_n \quad , \quad \{\int_{Y_p} |f| d\mu\}_p \quad , \quad \{\int_{Z_q} |f| d\mu\}_q$$

è sommabile, anche le altre lo sono e

$$\sum_n \int_{X_n} |f| d\mu = \sum_p \int_{Y_p} |f| d\mu = \sum_q \int_{Z_q} |f| d\mu \ .$$

Osservazione 2. La presenza dei valori assoluti è indispensabile. Ad esempio in $\mathbf{R}$, munito della misura di Lebesgue dx, per la funzione

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \chi_{[n,n+1[}(x) \ ,$$

il cui valore assolto è la costante 1, se

$$X_j = [2j, 2j+2[\quad , \quad Y_k = [2k+1, 2k+3[\quad , \quad Z_p = [p, p+1[\ ,$$

si ha

$$\sum_j |\int_{X_j} f(x) dx| = \sum_k |\int_{Y_k} f(x) dx| = \sum_k 0 = 0 \quad , \quad \sum_p |\int_{Z_p} f(x) dx| = \sum_p 1 = +\infty \ .$$

Osservazione 3. In luogo di partizioni si possono considerare successioni esaustive:

$$X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n ... \quad , \quad X = \cup_n X_n \quad , \quad \mu(X_n) < +\infty \ ,$$

chiedendo che $\sup_n \int_{X_n} |f| d\mu < +\infty$ e ponendo allora

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_{X_n} f d\mu \ .$$

Ci si riconduce alla definizione precedente considerando la partizione $X_{n+1} - X_n$ $(X_0 = \emptyset)$.

Per l'integrale rispetto a misure μ σ-finite valgono la σ-additività, l'assoluta continuità, il teorema di Radon-Nikodym per misure con segno F finite, i teoremi di Lebesgue, B.Levi e Fatou, la completezza di L^1, le relazioni stabilite tra la convergenza in L^1 e quelle in misura e q.o. e la densità delle combinazioni lineari finite delle funzioni caratteristiche degli insiemi di misura finita.

Per controllare questa affermazione, basta, fissata una partizione (numerabile) di X in insiemi di misura finita X_n, operare separatamente su ciascun X_n e mettere insieme i risultati parziali, tenendo conto che unioni numerabili di insiemi di misura nulla hanno misura nulla, che, dato $\varepsilon > 0$, per ν sufficientemente grande

$$\sum_{|n|>\nu} \int_{X_n} |f| d\mu < \varepsilon$$

e che la teoria della sommabilità consente decomposizioni arbitrarie delle somme.

Capitolo 3

Misure con segno

Ricordiamo la

Definizione. *Sia $\mathcal{A}$ una $\sigma-$algebra in X ed F una funzione d'insieme $F : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$. Si dice che F è σ-additiva o che è una misura con segno se:*

$$A = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \ , \ A_n \in \mathcal{A} \ , A_i \cap A_j \ (i \neq j) \ \Rightarrow F(A) = \sum_n F(A_n) \ ,$$

essendo la serie assolutamente convergente. Lo spazio $(X, \mathcal{A}, F)$, dove $\mathcal{A}$ è la $sigma$-algebra di sottoinsiemi di X sulla quale F è definita, si dice spazio di misura con segno.

Abbiamo già osservato che F non prende necessariamente valori non negativi e la convergenza assoluta è pretesa, al solito, perchè la somma non dipenda dall'ordine con il quale si considerano gli elementi A_n della partizione.

Proposizione. *Esiste una costante C tale che $|F(A)| \leq C$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, cioè F è limitata.*
Dimostrazione. È una conseguenza immediata della decomposizione di Hahn, che verrà considerata nella sezione seguente.

Ricordiamo ancora la

Definizione. *Sia μ una misura positiva. La misura (con segno) F è μ-**assolutamente continua** se e solo se*

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \ \mu(A) = 0 \Rightarrow F(A) = 0 \ .$$

Ricordiamo infine che per le misure assolutamente continue vale il

Teorema. *Sia F una funzione d'insieme σ-additiva, finita e μ-assolutamente continua, allora*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \ \mu(A) < \delta \Rightarrow |F(A)| < \varepsilon \ .$$

3.1 *Decomposizione di Jordan e di Hahn*

Per le **misure a valori reali (o misure con segno)** valgono i seguenti risultati di decomposizione.

Teorema.

1) Decomposizione di Jordan.
Posto, per $A \in \mathcal{A}$:

$$F^+(A) = \sup_{S \subseteq A} F(S) \quad , \quad F^-(A) = -\inf_{S \subseteq A} F(S) \quad , \quad |F| = F^+ + F^-,$$

$F^+, F^-, |F|$ sono misure positive (su $\mathcal{A}$) dette **variazione positiva, negativa** e **totale** di F e risulta

$$F = F^+ - F^- \ .$$

Inoltre se G ed H sono misure positive tali che $F = G - H$, allora $F^+ \leq G$ e $F^- \leq H$.

2) **Decomposizione di Hahn.** Detto *insieme di negatività* un insieme $A \in \mathcal{A}$ per il quale $F^+(A) = 0$, cioè tale che ogni suo sottoinsieme misurabile abbia misura non positiva, e *insieme di positività* un insieme $A \in \mathcal{A}$ per il quale $F^-(A) = 0$, cioè tale che ogni suo sottinsieme misurabile abbia misura non negativa, esistono due insiemi *disgiunti* X^+ *e* X^-, *rispettivamente di positività e di negatività, massimali e unici, a meno di insiemi di misura* $|F|$ *nulla*, tali che

$$X = X^+ \cup X^- \quad \text{e} \quad F^+(A) = F(X^+ \cap A), \ F^-(A) = -F(X^- \cap A), \ .$$

Premettiamo alla dimostrazione la seguente

Osservazione. n sottoinsiemi arbitrari A_n di X generano una partizione di X in 2^n **celle** *C_j, alcune eventualmente vuote, ognuna delle quali è della forma $A_1^* \cap A_2^* ... \cap A_n^*$, dove per ogni k $A_k^* = A_k$ oppure $A_k^* = A_k^c$.*
(Le C_j sono disgiunte e, per ogni $x \in X$, si ha $(x \in A_1 \vee x \in A_1^c) \wedge (x \in A_2 \vee x \in A_2^c)...)$

Dimostrazione del teorema. Per ogni $S \subseteq A$ si ha $F(A) = F(S) + F(S^c)$ e quindi

$$F^+(A) = \sup_S F(S) = F(A) - \inf_S F(S^c) = F(A) - \inf_S F(S) = F(A) - F^-(A) \ .$$

Se $F = G - H$, con G e H misure positive,

$$F^+(A) = \sup_{S \subseteq A} F(A) = \sup_{S \subseteq A} (G(S) - H(S)) \leq \sup_{S \subseteq A} G(S) = G(A)$$

e analogamente $F^-(A) \leq H(A)$. Quando avremo stabilito che F^+ e F^- sono misure avremo dimostrato la decomposizione di Jordan. È utile stabilire prima la decomposizione di Hahn.
Sia A_j una successione massimizzante, tale che

$$\lim_j F(A_j) = F^+(X) = \sup_{S \subseteq X} F(S) \ .$$

Per ogni n, siano C_n^j le celle della partizione generata da $A_1, ...A_n$ e X_n l'unione di quelle di misura non negativa:

$$X_n = \cup_{j \in P} C_n^j \quad \text{dove} \quad P = \{\ j \mid F(C_n^j) \geq 0\}\ .$$

Ovviamente $F(A_n) \leq F(X_n)$, perché tutte le celle positive di A_n sono in X_n. Al crescere di n si hanno partizioni sempre più fini (ogni C_n^j è unione di celle C_{n+1}^k) e dunque $U_n = X_n \cup X_{n+1}...$ è un successione noncrescente (anche se in generale non si ha $X_n \subseteq X_{n+p}$, perché le celle C_{n+p}^k nelle quali si scompone una cella C_n^j di misura ≥ 0 potrebbero non essere tutte di misura ≥ 0).
Poniamo allora

$$X^+ = \limsup_n U_n = \cap_n \cup_{p \geq n} X_p$$

e controlliamo che X^+ è un insieme di positività massimale. Per ogni n si ha

$$F(A_n) \leq F(X_n) \leq F(\cup_{p \geq n} X_p) \leq F^+(X)\ ,$$

dunque, per la monotonia delle U_n e per la continuità di F

$$+\infty > F(X^+) = \lim_n F(U_n) = \lim_n F(A_n) = F^+(X)\ ,$$

cioè X^+ è massimale e la variazione positiva finita. Poniamo ora $X^- = X - X^+$ e controlliamo che X^+, X^- formano una decomposizione di Hahn. Infatti

$$F(X^+) \leq F^+(X^+) \leq F^+(X) = F(X^+)$$

e dunque $F(X^+) = F^+(X^+) = F^+(X)$. Ne segue, essendo $F(X^+) = F^+(X^+) - F^-(X^+)$, che $F^-(X^+) = 0$, e, essendo $F^+(X^-) + F^+(X^+) \geq F^+(X)$, che $F^+(X^-) = 0$; cioè X^+ e X^- sono effettivamente insiemi di positività e negatività.
A questo punto è immediato riconoscere che

$$F^+(A) = F(A \cap X^+) \quad , \quad F^-(A) = -F(A \cap X^-)\ ,$$

perché $F(A) = F(A \cap X^+) + F(A \cap X^-)$ e per $S \subseteq A$ si ha $F(S) \leq F(S \cap X^+) \leq F(A \cap X^+)$ e $F(S) \geq F(S \cap X^-) \geq F(A \cap X^-)$. Pertanto F^+ e F^- sono misure.
Infine, se (Y^+, Y^-) è un'altra decomposizione di Hahn:

$$0 \leq F^+(Y^+ \cap X^-) \leq 0 \quad , 0 \leq F^-(Y^+ \cap X^-) \leq 0\ ,$$

perché nel primo caso X^- è di negatività e nel secondo caso Y^+ è di positività. Dunque

$$F^{\pm}(Y^{\pm} \cap X^{\mp}) = 0 \quad , \quad |F|(Y^{\pm} \Delta X^{\pm}) = 0\ .$$

q.e.d.

Osservazione. Come preannunciato, la decomposizione di Hahn permette di controllare che, se una misura F ha sempre valori finiti, allora essa è limitata. Infatti, per ogni insieme misurabile A si ha

$$|F(A)| \leq |F|(A) = F^+(A) + F^-(A) \leq F(X^+) + |F(X^-)|\ .$$

3.2 *Il Teorema di Radon-Nikodym*

Abbiamo già enunciato, nel capitolo precedente, il seguente risultato fondamentale, reciproco della assoluta continuità dell'integrale, del quale forniremo ora una dimostrazione.

Teorema (di Radon-Nikodym). *Sia F una funzione d'insieme σ-additiva, finita e μ-assolutamente continua. Allora esiste $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile tale che*

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; F(A) = \int_A f d\mu \; .$$

f è univocamente individuata, a meno di modifiche arbitrarie su un insieme di misura nulla, e si dice derivata di Radon-Nikodym di F.

Questo teorema, fermo restando il fatto che F sia finita, vale anche se μ è σ-finita.

Dimostrazione del teorema di Radon-Nikodym. Per la decomposizione di Jordan di F, non è restrittivo supporre che F sia una misura positiva finita. Infatti, se $\mu(S) = 0 \Rightarrow F(S) = 0$, essendo $F^+(A) = \sup_{S \subseteq A} F(S)$, si ha $\mu(A) = 0 \Rightarrow F^+(A) = 0$. In modo analogo si vede che F^- è assolutamente continua.
Indicando, come sempre, con $\mathcal{M}$ la classe delle funzioni misurabili (che dipende da $\mathcal{A}$ e non dalle singole misure definite su $\mathcal{A}$), poniamo

$$\mathcal{G} = \{ \; 0 \le g \in \mathcal{M} \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A g d\mu \le F(A) \; \} \; .$$

$\mathcal{G}$ ha le proprietà seguenti:

a) Se $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $E \in \mathcal{A}$ e $g = g_1\chi_E + g_2\chi_{E^c}$, cioè se $g = g_1$ su E e $g = g_2$ su E^c, allora $g \in \mathcal{G}$. Infatti $0 \le g \in \mathcal{M}$ e per ogni insieme misurabile A si ha

$$\int_A g d\mu = \int_{A\cap E} g_1 d\mu + \int_{A \cap E^c} g_2 d\mu \le F(A\cap E) + F(A \cap E^c) = F(A) \; .$$

In particolare $g_1 \vee g_2 \in \mathcal{G}$: basta prendere $E = \{g_1 > g_2\}$. Più in generale il massimo tra un numero finito di funzioni in $\mathcal{G}$ è ancora in $\mathcal{G}$.

b) Se F non è identicamente nulla, esiste una funzione $h \in \mathcal{G}$ non q.o. nulla rispetto a μ. Infatti, posto $F_n = F - \mu/n$, sia X_n l'insieme di positività di una decomposizione di Hahn relativa a F_n: $F_n(X_n) = F_n^+(X)$. Dunque

$$0 \le F(X_n^c) \le \frac{\mu(X)}{n} \to 0$$

La successione X_n è oviamente nondecrescente e la successione X_n^c noncrescente e quindi

$$F(\cap_n X_n^c) = \lim_n F(X_n^c) = 0 \quad \text{e} \quad F(\cup_n X_n) = F(X) > 0 \; .$$

Allora esiste N tale che $\mu(X_N) > 0$, altrimenti, per l'assoluta continuità di F, si avrebbe $F(X_n) = 0$ per ogni n. Basta ora prendere $h(x) = \chi_{X_N}(x)/N$, perché per ogni A, essendo $F_N(A \cap X_N) \geq 0$ (X_N è di positività per F_N), risulta

$$\int_A h d\mu = \int_{A\cap X_N} \frac{d\mu}{N} = \frac{\mu(A \cap X_N)}{N} \leq F(A \cap X_N) \leq F(A)$$

e $h \in \mathcal{G}$, mentre h non è μ-q.o nulla.

Sia

$$M = \sup_{g\in\mathcal{G}} \int_X g d\mu \leq F(X) \quad , \quad g_n \in \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \lim_n \int_X g_n d\mu = M \ .$$

Poniamo $f_n = g_1 \vee g_2 \vee ... \vee g_n$. Si ha $f_n \in \mathcal{G}$ e $g_n \leq f_n \leq f_{n+1}$. Allora, per il teorema di B.Levi e la scelta delle g_n:

$$f_n \to f < +\infty \ \mu - q.o. \ \text{ e } \ \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu = M \ .$$

Controlliamo che, per ogni A e $g \in \mathcal{G}$, si ha

$$\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu \leq F(A)$$

e dunque $f \in \mathcal{G}$. Infatti

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu \leq F(A)$$

e se esistessero A e $g \in \mathcal{G}$ tali che

$$\int_A f d\mu < \int_A g d\mu < F(A) \ ,$$

posto $\psi = g\chi_A + f\chi_{A^c}$, si avrebbe $\psi \in \mathcal{G}$ e

$$\int_X \psi d\mu = \int_A g d\mu + \int_{A^c} f d\mu > \int_{A\cup A^c} f d\mu = M \ ,$$

in contraddizione con la definizione di M. Ora finalmente siamo in grado di stabilire che $F(A) = \int_A f d\mu$. Infatti, se cosi non fosse, la misura $\Phi(A) = F(A) - \int_A f d\mu$, assolutamente continua rispetto a μ, non sarebbe identicamente nulla ed esisterebbe una funzione h non μ-q.o. nulla tale che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A h d\mu \leq \Phi(A) \ .$$

Ma allora $f + h \in \mathcal{G}$, perché

$$\int_A (f + h) d\mu \leq \int_A f d\mu + \Phi(A) = F(A)$$

e si giungerebbe all'assurdo che

$$M = \sup_{g\in\mathcal{G}} \int_X g d\mu < \int_X (f + h) d\mu \ .$$

q.e.d.

3.3 *Decomposizione di Lebesgue*

Una situazione diametralmente opposta all'assoluta continuità di una misura con segno F rispetto ad una misura positiva μ è descritta nella seguente

Definizione. *La misura con segno F si dice singolare rispetto alla misura (positiva) μ se e solo se esiste un insieme A tale che $\mu(A) = 0$ e $|F|(A^c) = 0$, ovvero se F può essere diversa da 0 solo su insiemi di misura μ nulla.*

Osservazione 1. $|F|$ è singolare rispetto a μ se e solo se μ è singolare rispetto a $|F|$ e si usa indicare tale relazione riflessiva con $\mu \perp |F|$.

Osservazione 2. Più in generale si può definire $F \perp G$ per due misure con segno e risulta

$$F \perp G \Leftrightarrow |F| \perp |G| \ .$$

Osservazione 3. Se F è simultaneamente singolare e assolutamente continua rispetto a μ allora $F \equiv 0$.

Teorema (Decomposizione di Lebesgue). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura ed F una misura con segno definita su $\mathcal{A}$. Allora esistono due misure con segno F_a e F_s, univocamente determinate, tali che F_a è assolutamente continua rispetto a μ, F_s è singolare rispeto a μ e $F = F_a + F_s$.*

Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui F sia una misura positiva. Sia $M = \sup\{\ F(A) \mid \mu(A) = 0\ \}$. Se $M = 0$, allora F è μ-assolutamente continua. Se $M > 0$, sia A_n una successione di insiemi tali che

$$\mu(A_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n F(A_n) = M \ .$$

Poniamo $S = \cup_n A_n$. Ovviamente

$$\mu(S) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0 \quad \text{e} \quad \forall n \ F(A_n) \leq F(S) \ .$$

Per la prima disuguaglianza $\mu(S) = 0$ e dunque $F(S) \leq M$. Per le altre disuguaglianze $F(S) \geq M$ e dunque $F(S) = M$. Ponendo

$$F_a(A) = F(A \cap S^c) \quad \text{e} \quad F_s(A) = F(A \cap S) \ ,$$

si ottiene una decomposizione di Lebesgue. Infatti, F_s è concentrata su un insieme di misura μ nulla e quindi è singolare; e F_a è assolutamente continua, perché $\mu(A) = 0$ implica $\mu(S \cup (A \cap S^c)) = 0$ e, se fosse $F_a(A) = F(A \cap S^c) > 0$, si avrebbe $F(S \cup (A \cap S^c)) > F(S) = M$, in contraddizione con la definizione di M.

Se $F = G_a + G_s$ è una qualunque decomposizione di Lebesgue, allora $F_a - G_a = G_s - F_s$. Ma la prima differenza è assolutamente continua e la seconda singolare; dunque entrambe le differenze sono nulle, e ciò dimostra l'unicità della decomposizione. *q.e.d.*

Esempi semplici ma significativi saranno presentati studiando le misure di Lebesgue-Stieltjes in **R**.

Capitolo 4

Estensione di misure

4.1 *Semianelli e algebre generate*

Definizione. *Una famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di un insieme X si dice semianello se e solo se*
1) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
2) Se $A, B \in \mathcal{S}$ allora $A \cap B \in \mathcal{S}$;
3) Se $A, B \in \mathcal{S}$ e $B \subset A$ allora A si può ottenere come unione disgiunta di un numero finito di elementi di $\mathcal{S}$, uno dei quali è B:

$$A = \cup_{k=1}^{n} B_k \ , \ B_k \in \mathcal{S} \ , \ B_i \cap B_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \ , \ B_1 = B \ .$$

Gli elementi di $\mathcal{S}$ sono in genere insiemi “semplici” ai quali è “naturale” associare una misura “elemntare” m. La struttura di semianello serve per estendere m a famiglie pi‘u ampie ed interessanti di sottoinsiemi di X.

Ad esempio gli intervalli di $\mathbf{R}^n$, cioè gli insiemi della forma $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$, dove (p, q) indica un intervallo di $\mathbf{R}$ che può essere aperto, chiuso o semiaperto, costituiscono un semianello.

Se esiste $X \in \mathcal{S}$ tale per ogni $A \in \mathcal{S}$ risulta $A \subseteq X$ si dice che X è **l’unità** di $\mathcal{S}$.

Ad esempio i sottointervalli di un intervallo fisso I di $\mathbf{R}^n$ costituiscono un semianello con unità I.

Sia $\mathcal{S}$ un semianello con unità X e $\mathcal{R}$ l’insieme delle unioni finite di elementi di $\mathcal{S}$:

$$B \in \mathcal{R} \Leftrightarrow B = \cup_{k=1}^{N} B_k \quad , \quad B_k \in \mathcal{S} \ .$$

È facile verificare che $\mathcal{R}$ è un’algebra. Si dice che $\mathcal{R}$ **è l’algebra generata da $\mathcal{S}$.**
In virtù della proprietà 3) dei semianelli, ogni $B \in \mathcal{R}$ si può scrivere come unione *disgiunta* di un numero finito di elementi di $\mathcal{S}$.

Sia $m : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ (per ragioni di semplicità nel seguito assumeremo che $m(X) < +\infty$) una misura su $\mathcal{S}$, cioè una funzione additiva.
(Ad esempio

$$m(\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \ .)$$

Proposizione. *Esiste un'unica misura su $\mathcal{R}$ che prolunga m, ancora indicata con m, ed è definita da*

$$m(B) = \sum_{k=1}^{N} m(B_k) \ \text{ se } \ B = \cup_{k=1}^{N} B_k \ , \ B_k \in \mathcal{S} \text{ e } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \ .$$

La dimostrazione è elementare, bisogna però verificare che la somma non dipende dalla scelta della decomposizione di B in insiemi elementari appartenenti ad $\mathcal{S}$:
se B è unione digiunta degli insiemi $C_l \in \mathcal{S}, \ l = 1...M$, allora gli insiemi $A_{k,l} = B_k \cap C_l$ sono una partizione di B in insiemi elementari e per l'additività di m su $\mathcal{S}$:

$$\sum_{k=1}^{N} m(B_k) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} m(A_{k,l}) = \sum_{l=1}^{M} m(C_l) \ .$$

4.2 *Misura esterna*

Definizione. *Per ogni sottoinsieme A di X ($A \in \mathcal{P}(X)$) si pone*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty} m(B_k) \mid A \subseteq \cup_{k=1}^{+\infty} B_k \ , \ B_k \in \mathcal{S}\} \ .$$

La funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty[$ si dice **misura esterna.**
La misura esterna è una valutazione di A in termini di "costo minimo" (cioè $\sum_k m(B_k)$) per ricoprire A con una successione "ottimale" di elementi semplici B_k. In generale il minimo non esiste e non vi è un ricoprimento ottimale. Si considera allora l'estremo inferiore dei "costi" possibili.
In generale una misura esterna non è una misura perché non è necessariamente additiva. Tuttavia vale la

Proposizione. *μ^* è σ-subadditiva:*

$$A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \ .$$

In particolare μ^* è monotona: $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, siano $B_n^k \in \mathcal{S}$ con

$$A_n \subseteq \cup_k B_n^k \ \text{ e } \ \sum_k m(B_n^k) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \ .$$

Allora $A \subseteq \cup_n \cup_k B_n^k$ e

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \sum_k m(B_n^k) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon \ . \ q.e.d.$$

Si noti che $\mu^*(\emptyset) = 0$, essendo $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Osservazione. La funzione

$$d(A, B) = \mu^*(A\Delta B)$$

è una pseudometrica in $\mathcal{P}(X)$. Infatti:

$$d(A, B) \geq 0 \ , \ d(A, A) = 0 \ , \quad \text{ma} \ \ d(A, B) = 0 \ \ \text{non implica} \ \ A = B \ ;$$

$$d(A, B) = d(B, A) \ ;$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(A, B) \ .$$

Infatti $A\Delta A = \emptyset$, ma vi possono essere insiemi non vuoti di misura esterna nulla. Inoltre $A\Delta B = B\Delta A$. Infine $A\Delta B \subseteq (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$, perché se $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$ allora o $x \in C$ e quindi $(x \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in C \wedge x \notin A)$, oppure $x \notin C$ e quindi $(x \notin C \wedge x \in A) \vee (x \notin C \wedge x \in B)$. Per la subadditività di μ^* si ottiene

$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B) \ .$$

Osserviamo ancora che per ogni pseudo metrica d si ha

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

e quindi, essendo $E\Delta\emptyset = E$:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B) \ .$$

Nel seguito supporremo che m sia σ-additiva su $\mathcal{S}$,cioè

$$B, B_k \in \mathcal{S} \ , \ B = \cup_{k=1}^{+\infty} B_k \ , \ B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{se} \ \ i \neq j$$

implica

$$m(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(B_k) \ .$$

Proposizione. $\mu^*|_{\mathcal{R}} = m$. *Di conseguenza, essendo m additiva e μ^* sigma-subadditiva, m è σ-additiva su $\mathcal{R}$.*

Ricordiamo che in generale *additività finita e σ-subadditività implicano σ-additività*: se A è l'unione disgiunta degli A_k,

$$\forall n \ \ m(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) \ .$$

Basta allora passare al limite per $n \to +\infty$ per verificare che l'ultima disuguaglianza è in effetti una uguaglianza.

Dimostrazione della Proposizione.
1) In primo luogo vediamo che $\mu^* = m$ su $\mathcal{S}$, perchè risulta

$$B \subseteq \cup_{k=1}^{+\infty} B_k \ , \ B, B_k \in \mathcal{S} \ \Rightarrow m(B) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(B_k) \ .$$

Poniamo infatti $C_k = B_k \cap B \in \mathcal{S}$. B è unione in generale non disgiunta dei C_k. Poniamo allora $D_k = C_k - \cup_{j=1}^{k-1} C_j \in \mathcal{R}$. I D_k sono disgiunti e

$$B = \cup_{k=1}^{+\infty} D_k \quad , \quad m(D_k) \leq m(C_k) \leq m(B_k) \ .$$

Essendo $D_k \in \mathcal{R}$, si può scrivere $D_k = \cup_{i=1}^{n_k} E_k^i$, con gli $E_k^i \in \mathcal{S}$ disgiunti. Allora B è unione disgiunta degli E_k^i e, per la σ-additività di m su $\mathcal{S}$, si trova

$$m(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n_k} m(E_k^i) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(D_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(B_k) \ .$$

2) Sia ora $A = \cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{R}$, con gli $A_k \in \mathcal{S}$ disgiunti. Ovviamente

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m(A) \ .$$

Per ogni ricoprimento $A \subseteq \cup_{j=1}^{+\infty} B_j$, $B_j \in \mathcal{S}$, se poniamo $C_k^j = A_k \cap B_j$, risulta

$$A_k \subseteq \cup_{j=1}^{+\infty} C_k^j \quad , \quad m(A_k) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m(C_k^j) \ ,$$

$$\cup_{k=1}^{n} C_k^j \subseteq B_j \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} m(C_k^j) \leq m(B_j) \ .$$

Pertanto

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{+\infty} m(C_k^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} m(C_k^j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m(B_j) \ .$$

Per l'arbitrarietà delle B_j si ha $m(A) \leq \mu^*(A)$. *q.e.d.*

4.3 *Insiemi misurabili*

Si può considerare una classe in genere più ampia di $\mathcal{R}$, ma in genere più ristretta di $\mathcal{P}(X)$, tale che la restrizione di μ^* ad essa sia una misura.

Definizione. *$A \in \mathcal{P}(X)$ si dice* **misurabile** *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{R} \ \ d(A, B) < \varepsilon \ .$$

Indicheremo con $\mathcal{L}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X misurabili nel senso ora indicato. Ovviamente $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$. Per $A \in \mathcal{L}$ si pone

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \textit{cioè} \quad \mu = \mu^*|_{\mathcal{L}} \ .$$

Le Proposizioni 1 e 2 seguenti saranno precisate dalle successive Proposizioni 3 e 4.

Proposizione 1. *$\mathcal{L}$ è un'algebra.*
Dimostrazione.
1) Ovviamente la definizione implica che $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$.
2) Se $A \in \mathcal{L}$ e $B_\varepsilon \in \mathcal{R}$, con $d(A\Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$, essendo

$$A\Delta B_\varepsilon = (A \cap B_\varepsilon^c) \cup (A^c \cap B_\varepsilon) = A^c \Delta B_\varepsilon^c$$

e $B_\varepsilon^c \in \mathcal{R}$, si ha $A^c \in \mathcal{L}$.
3) Se $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ e $B_{1,\varepsilon}, B_{2,\varepsilon} \in \mathcal{R}$, con $d(A_j \Delta B_{j,\varepsilon}) < \varepsilon, \ j = 1, 2$, essendo $B_{1,\varepsilon} \cup B_{2,\varepsilon} \in \mathcal{R}$,

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_{1,\varepsilon} \cup B_{2,\varepsilon}) \subseteq (A_1\Delta B_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \Delta B_{2,\varepsilon})$$

e dunque, per la monotonia e subadditività di μ^*:

$$d((A_1 \cup A_2), (B_{1,\varepsilon} \cup B_{2,\varepsilon})) \leq d(A_1\Delta B_{1,\varepsilon}) + d(A_2\Delta B_{2,\varepsilon}) < 2\varepsilon \ ,$$

si ha $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}$.
4) $X \in \mathcal{R}$ e quindi $X \in \mathcal{L}$. *q.e.d.*

Proposizione 2. *μ è additiva su $\mathcal{L}$.*
Dimostrazione. Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ disgiunti. Basta verificare che

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) \ ,$$

prché già sappiamo (subadditività di μ^*) che

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) \geq \mu(A_1 \cup A_2) \ .$$

Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{R}$, tali che $d(A_j\Delta B_j) < \varepsilon, \ j = 1, 2$ e poniamo $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$. Allora, come nella proposizione precedente $d(A, B) < 2\varepsilon$. Inoltre, essendo $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, cioè $A_1^c \cup A_2^c = X$, si ha

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1\Delta B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \ \text{ e } \ m(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon \ .$$

Ricordando che in generale $\mu^*(P) - d(P,Q) \leq \mu^*(Q)$, otteniamo

$$\mu(A) \geq \mu(B) - 2\varepsilon \geq m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon \geq$$

$$\geq \mu(A_1) - \varepsilon + \mu(A_2) - \varepsilon - 2\varepsilon - 2\varepsilon \ .$$

E, per l'arbitrarietà di ε, la disuguaglianza iniziale e con essa la proposizione è dimostrata.

Proposizione 3. *$\mathcal{L}$ è una σ-algebra.*
Dimostrazione. Dati $A_k \in \mathcal{L}$, sia $A = \cup_{k=1}^{+\infty} A_k$. Definendo

$$A'_k = A_k - \cup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{L} \ ,$$

si ha $A = \cup_{k=1}^{+\infty} A'_k$, con unione disgiunta, e quindi, per la monotonia di μ^* e la finita additività di μ, per ogni n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu(\cup_{k=1}^{n} A'_k) \leq \mu^*(A) \ .$$

Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A'_k) \leq \mu^*(A)$ e, dato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\sum_{k>N} \mu(A'_k) < \varepsilon$. Inoltre $C_N = \cup_{k=1}^{N} A'_k \in \mathcal{L}$ e dunque esiste $B_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che

$$\mu^*(C_N \Delta B_\varepsilon) = d(C_N, B_\varepsilon) < \varepsilon \ .$$

Ma, se $D_N = \cup_{k>N} A'_k$:

$$A \Delta B_\varepsilon = (C_N \cup D_N) \Delta B_\varepsilon \subseteq (C_N \Delta B_\varepsilon) \cup D_N$$

e, per la subadditività di μ^*,

$$d(A, B_\varepsilon) = \mu^*(A \Delta B_\varepsilon) \leq \varepsilon + \sum_{k>N} \mu(A'_k) < 2\varepsilon \ .$$

Cioè $A \in \mathcal{L}$. *q.e.d.*

Proposizione 4. *μ è σ-additiva su $\mathcal{L}$.*
Dimostrazione. μ è finitamente additiva e σ-subadditiva su $\mathcal{L}$ e già sappiamo che queste due proprietà implicano la σ-additivtà di μ. *q.e.d.*

Proposizione 5. *μ è completa su $\mathcal{L}$.*
Dimostrazione. Si osservi che se $\mu^*(A) = 0$ allora $A \in \mathcal{L}$:

$$\emptyset \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu^*(A \Delta \emptyset) < \varepsilon \ .$$

Dunque se $\mu(A) = 0$ e $B \subseteq A$, si ha $\mu^*(B) = 0$ e pertanto $B \in \mathcal{L}$. *q.e.d.*

Possiamo allora riassumere i risultati precedenti nel

Teorema. *Sia $\mathcal{S}$ un semianello con unità X e m una funzione non negativa, finita e σ-additiva su $\mathcal{S}$, allora $(X, \mathcal{L}, \mu)$ è uno spazio di misura completo (ovvero $\mathcal{L}$ è una sigma-algebra* *in X e μ è una misura (finita) sigma-additiva e completa su $\mathcal{L}$).*

Osservazione. L'estensione $\sigma-$additiva μ della misura elementare m è unica, nel senso che se λ è una qualunque estensione $\sigma-$additiva di m e $A \in \mathcal{L}$ appartiene al dominio di definizione di λ allora $\lambda(A) = \mu(A)$. Infatti, sull'algebra $\mathcal{R}$ generata da $\mathcal{S}$ λ, μ e m coincidono, ma per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{R}$ tale che $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$ e dunque

$$|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A) - m(B)| = |\mu(A) - \lambda(B)| < \varepsilon \ .$$

Osservazione. Le affermazioni precedenti valgono anche per misure σ-finite. In particolare, se si parte da una misura (σ-additiva) m σ-finita su un'algebra $\mathcal{A}$, poiché $\mathcal{L}$ contiene $\sigma(\mathcal{A})$ (la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$), si verifica che m ha un'unica estensione ad una misura μ σ-finita su $\sigma(\mathcal{A})$, risultato noto come teorema di **Hahn-Kolmogorov**.

4.4 *Il criterio di Carathéodory*

La famiglia degli insiemi misurabili, nel senso della definizione introdotta nella sezione precedente, può essere anche caratterizzata dal seguente

Criterio di Carathéodory. *$A \subseteq X$ è misurabile se e solo se per ogni $S \subseteq X$ si ha*

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \ .$$

Dimostrazione.
1) Supponiamo che A sia misurabile. Sia P un insieme misurabile (ad esempio una unione disgiunta e numerabile di elementi del semianello iniziale) tale che $S \subseteq P$ e $\mu^*(S) \leq \mu(P) \leq \mu^*(S) + \varepsilon$, allora

$$\mu^*(S) + \varepsilon \geq \mu(P) = \mu(P \cap A) + \mu(P \cap A^c) \geq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \ .$$

Essendo μ^* subadditiva, si ottiene l'uguaglianza desiderata

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \ .$$

2) Supponiamo ora che A soddisfi il criterio di Carathéodory e controlliamo che A è misurabile. Sia P una unione disgiunta e numerabile di elementi del semianello iniziale, $P = \cup_k I_k$, tale che $A \subseteq P$ e

$$\mu^*(A) \leq \mu(P) = \sum_k \mu(I_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \ .$$

Siano poi n e B tali che $P \supseteq B = \cup_{k=1}^n I_k$ e $\mu(P) - \varepsilon \leq \mu(B)$. Allora abbiamo

$$A \subseteq B \cup (P - B) \quad , \quad A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \subseteq (P - B) \cup (P - A) \ ;$$

$$\mu(P - B) \leq \varepsilon \quad \text{e}$$

$$\mu(P) = \mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(P - A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \ ,$$

dunque $\mu^*(P - A) \leq \varepsilon$. Finalmente

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(P - B) + \mu^*(P - A) \leq 2\varepsilon \ ,$$

per ogni $\varepsilon > 0$; quindi A è misurabile. *q.e.d.*

* * *

Viceversa, data una misura esterna, si può usare il criterio di Carathéodory per *definire* gli insiemi misurabili. Riassumiamo i principali risultati, rinviando per una trattazione più dettagliata e per le relative dimostrazioni a Federer[5] e Hewitt-Stromberg[7].

Definizione. *Una funzione $M : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ si dice* **misura esterna** *su X se e solo se soddisfa alle condizioni seguenti:*
1) $M(\emptyset) = 0$, e quindi non è identicamente uguale a $+\infty$,
2) $A \subseteq B \Rightarrow M(A) \leq M(B)$, cioè M è monotona non decrescente, e
3) per ogni successione di insiemi A_k disgiunti si ha

$$M(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} M(A_k) \ ,$$

cioè M è σ-subadditiva.

Definizione. *$A \subseteq X$ si dice* **misurabile (secondo Carathéodory)** *se e solo se per ogni $S \subseteq X$ si ha*

$$M(S) = M(S \cap A) + M(S \cap A^c) \ .$$

Indichiamo con $\mathcal{A}_M$ la famiglia degli insiemi misurabili (secondo Carathéodory) e con μ la restrizione di M a $\mathcal{A}_M$.

Teorema. *$\mathcal{A}_M$ è una σ-algebra, μ una misura σ-additiva e completa, cioè $(X, \mathcal{A}_M, \mu)$ è uno spazio di misura completo.*

Vi sono molti tipi di procedimenti per generare misure esterne: nella sezione 2 abbiamo visto un metodo di definizione naturale basato su una misura elementare (ma σ-additiva) data su un semianello; nell'ultimo paragrafo del capitolo 7 vedremo misure esterne (di Radon) definite sulla base di un funzionale lineare e positivo sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto. In uno spazio metrico, un procedimento per definire misure esterne di grande importanza, teorica e applicativa, è il seguente:
Sia X uno *spazio metrico separabile*, $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti e m un numero reale positivo. Per $\delta > 0$ arbitrario, dato un qualunque sottoinsieme S di X, poniamo

$$\mu_{m,\delta}(S) = \inf\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (\text{diam} O_k)^m \mid O_k \in \mathcal{O}, \ \text{diam} O_k \leq \delta, \ S \subseteq \cup_k O_k \ \} \ ,$$

e quindi

$$\mu_m(S) = \lim_{\delta \to 0} \mu_{m,\delta}(S) = \sup_{\delta > 0} \mu_{m,\delta}(S) \ .$$

Si vede che μ_m è una misura esterna detta (eventualmente introducendo un opportuno fattore moltiplicativo) *misura di Hausdorff m-dimensionale*. Se $\mu_m(S) < +\infty$ e $n > m$ allora $\mu_n(S) = 0$. Per un sottoinsieme S, l'estremo superiore d dei numeri reali $m > 0$ per i quali $\mu_m(S) = +\infty$ si dice *dimensione di Hausdorff* di S. In $\mathbf{R}^n$ la misura di Lebesgue è proporzionale a μ_n. (Per una trattazione approfondita di questi temi si veda ad esempio Federer[5]).

Definizione. Una misura esterna M si dice **regolare** se per ogni sottoinsieme S esiste un sottoinsieme A misurabile (cioè $A \in \mathcal{A}_M$) tale che

$$S \subseteq A \quad \text{e} \quad M(S) = M(A) = \mu(A) \ .$$

Si dimostra che, se M è regolare, non esistono estensioni proprie σ-additive, e neppure finitamente additive, di μ concordanti con M, cioè non esiste una σ-algebra $\mathcal{A}$ contenete propriemente $\mathcal{A}_M$ tale che M ristretta ad $\mathcal{A}$ sia additiva.

La misura esterna μ^* generata da una misura elementare m σ-additiva su un semianello è regolare. Infatti per ogni $S \subseteq X$ e per ogni $n > 0$ esiste per definizione una unione A_n numerabile di elementi del semianello che ricopre S e tale che $\mu(A_n) \leq \mu^*(S) + 1/n$. Allora $A = \cap_n A_n$ è misurabile, contiene S e $\mu^*(S) = \mu(A)$.
Dunque la σ-algebra degli insiemi misurabili definita nella sezione 3 è massimale, sotto il vincolo di essere una restrizione di μ^*.

Anche le misure esterne (di Radon) definite sulla base di un funzionale lineare e positivo sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto, alle quali acceneremo nel capitolo 7, sono regolari.

& & &

Capitolo 5

Misure in R

5.1 *Misure di Lebesgue-Stieltjes in* $\mathbf{R}$

Ricordiamo che una funzione F **nondecrescente** in $\mathbf{R}$ ammette in ogni punto limite destro e limite sinistro:

$$F(x-0) = \lim_{t\to x^-} F(t) = \sup_{t<x} F(t) \le F(x) \le \inf_{x<t} F(t) = \lim_{t\to x^+} F(t) = F(x+0) \ .$$

Un punto x è di discontinuità per F se e solo se $F(x+0) - F(x-0) > 0$, differenza che in tal caso si dice **salto** di F in x.
Una funzione nondecrescente ha al più un'infinità numerabile di salti (su ogni intervallo finito, ad esempio $[-p,p]$, il numero N di punti con salti $\ge 1/n$ è limitato da $n(F(p) - F(-p))$.
È bene osservare che i punti di salto possono essere distribuiti in modo arbitrario, ed eventualmente costituire un sottoinsieme denso. Ad esempio, considerando per semplicità un intervallo limitato $[a,b[$, sia $\{x_n\}$ un sottoinsieme numerabile arbitrario di $[a,b[$ e $\{p_n\}$ una successione di valori positivi associati ai punti x_n, tale che $\sum_n p_n < +\infty$. Allora la funzione

$$F(x) = \sum_{x_n<x} p_n$$

è monotona nondecrescente e continua a sinistra nell'intervallo $[a,b[$. I punti x_n sono i suoi punti di salto ed i valori p_n sono i salti corrispondenti: $F(x_n+0) - F(x_n) = p_n$. Si dice che F è una funzione di salti.

Se μ è una misura in $\mathbf{R}$ definita almeno sulla σ-algebra dei Boreliani $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ e limitata sugli insiemi limitati, ad essa si può associare una funzione monotona nondecrescente, definita in modo univoco a meno di una costante additiva, ponendo per $a<b$:

$$F(b) - F(a) = \mu([a,b[) \ .$$

Per le proprietà di continuità delle misure lungo successioni crescenti di insiemi, F risulta *continua a sinistra*: $F(x-0) = F(x)$. Infatti, fissato $a<x$,

$$F(x) - F(a) = \mu([a,x[) = \lim_n \mu([a, x - \frac{1}{n}[) = F(x-0) - F(a) \ .$$

Per le proprietà di continuità delle misure lungo successioni decrescenti di insiemi, F è discontinua in x se e solo se $\mu(\{x\}) \neq 0$, che in tal caso è il salto di F in x:

$$\mu(\{x\}) = F(x+0) - F(x) = \lim_n \mu([x, x + \frac{1}{n}[) \ .$$

Se x è un punto di discontinuità di F si ha

$$\mu([t,x]) = \mu([t,x[) + \mu(\{x\}) = F(x+0) - F(t) \neq \mu([t,x[) \ .$$

Ovviamente

$$\mu(]t,x[) = F(x) - F(t+0) \quad , \quad \mu(]t,x]) = F(x+0) - F(t+0) \ .$$

Se la misura è finita, è usuale selezionare la costante arbitraria ponendo $F(x) = \mu(]-\infty, x[)$ e in tal caso, per le proprietà di continuità delle misure, $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = \mu(\mathbf{R})$.

Vale un risultato reciproco:

Teorema. *Sia F una funzione nondecrescente e continua a sinistra su $\mathbf{R}$. Si consideri il semianello $\mathcal{S}$ degli intervalli semiaperti del tipo $[x,y[$ ($[x,y[= \emptyset$ se $y \leq x$), che ha unità $\mathbf{R}$, e si definisca su $\mathcal{S}$ la funzione additiva m nel modo seguente:*

$$m([x,y[) = F(y) - F(x) \quad se \quad x < y \quad , \quad m(\emptyset) = 0 \ .$$

Allora m è σ-additiva su $\mathcal{S}$ e si può quindi estendere, per il teorema di Hahn-Kolmogorov, ad una misura σ-additiva e completa definita su una σ-algebra $\mathcal{L}_F$ contenente $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.
Dimostrazione. Per semplicità ci limitiamo a considerare il caso di misure finite generate da funzioni monotone definite su un intervallo $[a,b[$ limitato.
Verifichiamo la σ-additività di m su $\mathcal{S}$. Sia: $I = [x,y[$, $I_n = [x_n, y_n[$ e $I = \cup_n I_n$, l'unione essendo disgiunta.
1) Essendo m finitamente additiva e dunque monotona (sull'algebra generata da $\mathcal{S}$), per ogni p risulta

$$\cup_{n=1}^{p} I_n \subseteq I \Rightarrow \sum_{n=1}^{p} m(I_n) \leq m(I) \ ,$$

e dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} m(I_n) \leq m(I)$.
2) Dato $\varepsilon > 0$, considerata la continuità a sinistra di F, si possono trovare y^* e x_n^*, $x < y^* < y$ e $x_n^* < x_n$, tali che

$$F(y^*) \leq F(y) < F(y^*) + \varepsilon \quad , \quad F(x_n^*) \leq F(x_n) < F(x_n^*) + \frac{\varepsilon}{2^n} \ .$$

Allora per gli intervalli $K = [x, y^*[$ e $L_n = [x_n^*, y_n[$ si ha

$$m(I) \geq m(K) \geq m(I) - \varepsilon \quad , \quad m(I_n) \leq m(L_n) \leq m(I_n) + \varepsilon/2^n \ .$$

L'aderenza K^a di K è compatta e ricoperta dagli interni L_n° degli L_n, dunque è sufficiente un numero finito di aperti $L_{j_1}^\circ, L_{j_2}^\circ, ...L_{j_N}^\circ$ per ricoprire K^a e allora

$$K \subseteq K^a \subset \cup_{k=1}^{N} L_{j_k}^\circ \subseteq \cup_{k=1}^{N} L_{j_k}$$

implica

$$m(I) - \varepsilon \leq m(K) \leq \sum_{k=1}^{N} m(L_{j_k}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(L_k) + \varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε e per il punto 1) si ottiene la σ-additività. *q.e.d.*
La misura ottenuta si dice **misura di Lebesgue-Stieltjes** *generata da* F.

Osservazione. *Se* $F(x) = x$ *si ha* $m([a, b[) = b - a$ *e l'estensione di* m *è la classica* **misura di Lebesgue** *su* $\mathbf{R}$.
Le proprietà della funzione $F(x) = x$ *e il procedimento di costruzione che conducono all'estensione di Hahn-Kolmogorov mostrano chiaramente che la misura di Lebesgue su* $\mathbf{R}$ *ha la proprietà di* **invarianza per traslazioni***:*

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \forall A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \quad \lambda(x + A) = \lambda(A) \ .$$

Osservazione. *La* σ*-algebra* $\mathcal{L}_F$ *può variare con* F*, tuttavia si ha sempre* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_F$. Ad esempio, se $F(x) = 0$ per $x \leq c$ e $F(x) = 1$ per $c < x$, F genera la misura di Dirac δ_c sulla σ-algebra massimale $\mathcal{P}([a, b[)$:

$$c \notin A \Rightarrow \delta_c(A) = 0 \ , \ c \in A \Rightarrow \delta_c(A) = 1 \ .$$

Invece la misura di Lebesgue ordinaria, generata da $F(x) = x$, è definita,come vedremo successivamente (*insiemi non misurabili*) su una σ-algebra strettamente contenuta in $\mathcal{P}([a, b[)$.

Ossevazione. Si potrebbe in modo equivalente lavorare con funzioni monotone continue a destra. Ad esempio, data μ, si potrebbe porre $F(x) = \mu(] - \infty, x])$.

L'integrale di Riemann-Stieltjes. Ci limitiamo a considerare il caso di un intervallo limitato semiaperto $[a, b[$.

1) Se F è una funzione monotona non decrescente e continua a sinistra su $[a, b[$ e μ è la misura da essa generata, risulta corrispondentemente definita una classe di funzioni f sommabili e il loro integrale, detto di **Lebesgue-Stieltjes** su $[a, b[$, si scrive in una delle forme equivalenti

$$\int_{[a,b[} f d\mu = \int_{[a,b[} f(x) d\mu(x) = \int_{[a,b[} f(x) \mu(dx) = \int_{[a,b[} f(x) dF(x) \ .$$

2) Data una funzione f definita in $[a, b[$, in analogia con la definizione dell'integrale classico di Cauchy-Riemann, si possono considerare le partizioni finite di $[a, b[$ formate dagli intervalli $[x_{k-1}, x_k[$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b)$, scegliere dei punti arbitrari t_k in ogni intervallo e costruire le somme integrali

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})) \ .$$

Se queste somme amettono un limite I quando $\max |x_k - x_{k-1}| \to 0$, indipendentemente dalla scelta dei punti t_k, allora I si dice integrale di Riemann-Stieltjes di f su $[a, b[$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dF(x) \ .$$

Osservazione. L'ultima notazione presuppone di aver precisato di voler intendere l'integrale sull'intervallo semiaperto $[a,b[$. Se si volesse introdurre l'integrale sull'intervallo chiuso $[a,b]$, che si indica con la stessa notazione, si dovrebbe disporre anche di un valore per $F(b+0)$, maggiore o uguale a $F(b)$, e, se questo fosse diverso da $F(b)=F(b-0)$, le somme integrali dovrebbero essere incrementate della quantità $f(b)(F(b+0)-F(b))$, che si ritroverebbe al limite eventuale.

Proposizione. *Se f è una funzione continua su $[a,b]$, essa ammette su $[a,b[$ un integrale di Riemann-Stieltjes coincidente con il suo integrale di Lebesgue-Stieltjes, sempre su $[a,b[$.*
Dimostrazione. Le funzioni, costanti a tratti, uguali a $f(t_k)$ su $[x_{k-1},x_k[$, sono funzioni semplici e le somme integrali sopra considerate sono i loro integrali di Lebesgue-Stieltjes. Tali funzioni convergono uniformemente a f e quindi, per la definizione stessa dell'integrale di Lebesgue, i loro integrali convergono ad un limite I, che è l'integrale di Lebesgue di f.

5.2 *Funzioni a variazione limitata*

Nella sezione precedente abbiamo studiato misure positive di Lebesgue-Stieltjes, generate da funzioni monotone. Possiamo introdurre misure con segno Λ di Lebesgue-Stieltjes come differenza di due misure positive di Lebesgue-Stieltjes μ e ν. Consideriamo, per semplicità un intervallo limitato $[a,b[$. Allora, se

$$G(x)=\mu([a,x[)\ ,\ \ H(x)=\nu([a,x[)$$

e dunque $G(a)=\mu(\emptyset)=H(a)=\nu(\emptyset)=0$, le funzioni G e H, monotone non decrescenti e continue a sinistra, generano le due misure μ e ν. La loro differenza $f=G-H$ genera, sulla σ-algebra $\mathcal{L}_G\cap\mathcal{L}_H\supseteq\mathcal{B}$, la misura Λ. Si ha

$$\Lambda([x,y[)=\mu([x,y[)-\nu([x,y[)=G(y)-G(x)-[H(y)-H(x)]=f(y)-f(x)\ .$$

Se G^* e H^* sono altre funzioni monotone per le quali $f=G^*-H^*$, per tutti gli insiemi di Borel B si ha

$$\Lambda^*(B)=\mu^*(B)-\nu^*(B)=\mu(B)-\nu(B)=\Lambda(B)\ ,$$

perché la famiglia dei B tali che $\Lambda^*(B)=\Lambda(B)$ è una $\sigma-$algebra, contiene la famiglia degli intervalli $[x,y[$ e quindi tutti i Boreliani.
Dunque, per i Boreliani, tutte le decomposizioni di f come differenza di due funzioni monotone sono equivalenti.

La classe delle funzioni che possono essere rapresentate come differenza di due funzioni monotone coincide con la classe delle funzioni *a variazione limitata*(a valori reali).

Definizione. Si dice che una funzione f è *a variazione limitata sull'intervallo* $[a,b]$ se e solo se esiste una costante M tale che per ogni suddivisione

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

dell'intervallo risulta

$$\sum_{j=1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\le M\ .$$

L'estremo superiore delle somme precedenti, al variare di tutte le suddivisioni finite di $[a, b]$, si dice *variazione totale* di f sull'intervallo $[a, b]$ e si indica con $V(f, [a, b])$:

$$V(f, [a, b]) = \sup \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ .$$

L'insieme delle funzioni a variazione limitata su $[a, b]$ verrà indicato con $BV([a, b])$.

Osservazione. Ovviamente ogni funzione monotona è a variazione limitata e, se f è monotona, $V(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$.

Proposizione. *$BV([a, b])$ è uno spazio vettoriale (su $\underline{\mathbf{R}}$) e in esso $V(f, [a, b])$ è una seminorma:*
1) $V(f, [a, b]) \geq 0$ e $V(f, [a, b]) = 0$ se e solo se f è costante;
2) $V(\lambda f, [a, b]) = |\lambda| V(f, [a, b])$;
3) $V(f + g, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$.
Dimostrazione. I punti 1) e 2) seguono immediatamente dalla definizione di variazione totale. Il punto 3) segue dall'osservazione che per ogni suddivisione dell'intervallo

$$\sum_{j=1}^{n} |(f + g)(x_j) - (f + g)(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n} |g(x_j) - g(x_{j-1})| \ .$$

Osservazione. Se si fissa il valore delle funzioni in un punto, ad esempio se si considerano solo il sottospazio $BV^0([a, b])$ delle funzioni a variazione limitata f tali che $f(a) = 0$, si ottiene uno *spazio vettoriale normato*, e si può facilmente dimostrare che esso è *completo.*
(Per $g \in BV^0$ sia $||g|| = V(g([a, b])$. Se f_n è una successione di Cauchy allora, per ogni x, $f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, perché $|f_{n+p}(x) - f_n(x) - (f_{n+p}(a) - f_n(a))| \leq ||f_{n+p} - f_n||$. Sia f il limite puntuale delle f_n:

$$\sum_{j=1}^{n} |(f - f_n)(x_j) - (f - f_n)(x_{j-1})| = \lim_{p} \sum_{j=1}^{n} |(f_{n+p} - f_n)(x_j) - (f_{n+p} - f_n)(x_{j-1})| \ .$$

Ma, qualunque sia $\varepsilon > 0$, per n sufficientemente grande e per ogni p si ha $||f_{n+p} - f_n|| < \varepsilon$, e, prendendo l'estremo superiore del primo membro al variare di tutte le suddivisioni, si trova $||f - f_n|| \leq \varepsilon$.)

Proposizione. *Per la variazione totale di una funzione su un intervallo valgono le affermazioni seguenti:*
1) Se $a < c < b$ allora $V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$;
2) La funzione $v(x) = V(f, [a, x])$ è monotona nondecrescente;
3) Se, in un punto z, f è continua a sinistra o a destra, allora, in z, anche v è continua a sinistra o a destra.
Dimostrazione. Introduciamo la seguente notazione: sia P una partizione di un intervallo formata dai punti x_j, allora poniamo

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \ .$$

Osserviamo che aggiungendo punti di suddivisione la somma non decresce.
Siano P' e P'' partizioni di $[a,c]$ e $[c,b]$ tali che

$$V(f,[a,c]) \leq S(f,P') + \varepsilon \ , \ V(f,[c,b]) \leq S(f,P'') + \varepsilon$$

e sia P la partizione di $[a,b]$ unione delle partizioni P' e P''. Allora

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \leq S(f,P) + 2\varepsilon \leq V(f,[a,b]) + 2\varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \leq V(f,[a,b]) \ .$$

Viceversa, se P è una partizione di $[a,b]$, che non è restrittivo supporre abbia c come suo punto di suddivisione, allora P si può pensare unione di P' e P'' partizioni di $[a,c]$ e $[c,b]$. Dunque

$$S(f,P) = S(f,P') + S(f,P'') \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \ .$$

Per l'arbitrarietà di P, passando all'estremo superiore

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \geq V(f,[a,b]) \ .$$

Il punto 1) è dimostrato.
Essendo $V(f,[x,y])$ non negativa il punto 2) segue dal punto 1).
Se f è continua a sinistra in z, sia

$$z - \delta < x < z \ \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon \ .$$

Sia P una partizione di $[a,z]$ con x ultimo punto di suddivisione prima di z e $V(f,[a,z]) < S(f,P) + \varepsilon$. Allora, se P' è la suddivisione di $[a,x]$ ottenuta da P togliendo z, si ha

$$V(f,[a,z]) < S(f,P') + |f(z) - f(x)| + \varepsilon < V(f,[a,x]) + 2\varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε e la monotonia di v, si ottiene il punto 3) nel caso della continuità a sinistra. Per la continuità a destra la dimostrazione è analoga.

Per quanto concerne il punto 1), conviene osservare che, se μ è una misura di Lebesgue-Stieltjes e F una funzione monotona continua a sinistra che la genera, si ha

$$\mu([a,b[) = F(b) - F(a) = V(F,[a,b]) \ .$$

Per avere $\mu([a,b])$ occorre disporre del valore $F(b+0)$: $\mu([a,b]) = V(F,[a,b]) + F(b+0) - F(b)$.
Per una generica funzione a variazione limitata e continua a sinistra f, alla quale sia associato un valore $f(b+0)$, poniamo

$$V(f,[a,b+0]) = V(f,[a,b]) + |f(b+0) - f(b)| \ .$$

Teorema. *La classe delle funzioni a variazione limitata su $[a,b]$ coincide con la classe delle funzioni rappresentabili come differenza di due funzioni monotone nondecrescenti.*

Dimostrazione. Ovviamente la differenza di funzioni monotone è a variazione limitata. Viceversa, se $v(x)$ è la variazione totale di f su $[a,x]$ e $w = v - f$, si ha $f = v - w$, con v monotona non decrescente, per la proposizione precedente, e anche w monotona non decrescente, perché

$$y < x \ \Rightarrow \ f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq v(x) - v(y) \ .$$

Osservazione. La decomposizione proposta ha anche la proprietà che v e w sono continue a destra o a sinistra dove f è continua a destra o a sinistra.

Osservazione. Si possono introdurre le funzioni *variazione positiva* e *variazione negativa*

$$v^+(x) = V^+(f, [a,x[) = \sup \sum_{j=1}^{n} \max(f(x_j) - f(x_{j-1}, 0) \ ,$$

$$v^-(x) = V^-(f, [a,x[) = \sup \sum_{j=1}^{n} - \min(f(x_j) - f(x_{j-1}, 0) \ ,$$

dove il sup è preso su tutte le partizioni finite di $[a,x[$. Si vede allora che

$$v(x) = v^+(x) + v^-(x) \quad , \quad f(x) = v^+(x) - v^-(x)$$

e dunque $w = 2v^-$. Considereremo canonica questa decomposizione di f come differenza di due funzioni monotone e, se μ^+ e μ^- sono le misure positive generate da v^+ e v^-, diremo che f genera la misura $\Lambda = \mu^+ - \mu^-$.
Ricordiamo che, se ci si limita a considerare insiemi di Borel, tutte le decomposizioni di f come differenza di due funzioni monotone sono equivalenti, nel senso che le differenze delle misure da esse generate coincidono su $\mathcal{B}$.

Si può facilmente dimostrare che, se Λ è la misura di Lebesgue-Stieltjes con segno generata da f su $\mathcal{B}$, le misure di Lebesgue-Stieltjes positive generate da v, v^+ e v^- sono $|\Lambda|$, Λ^+ e Λ^-, dove (Λ^+, Λ^-) è la decomposizione di Jordan di Λ. Infatti, se $S \subseteq A = [x, y[$, con $S \in \mathcal{B}$, S può essere approssimato a meno di un errore in misura inferiore ad un $\varepsilon > 0$ arbitrario mediante una unione finita disgiunta U di intervalli $I_k = [x_k, y_k[$; dunque

$$\Lambda^+(A) = \sup_{S \subseteq A} \Lambda(S) = \sup_{U} \Lambda(S) = \sup_{U'} \Lambda(S) = V^+(f, [x,y[) \ ,$$

dove U' indica le unioni tali che $f(y_k) - f(x_k) \geq 0$ per ogni k. Considerazioni analoghe valgono per la variazione negativa e la variazione totale.

Si definisce in modo naturale **l'integrale di Lebesgue-Stieltjes rispetto ad una funzione a variazione limitata** f scrivendo f come differenza di due funzioni monotone nondecrescenti: $f = F - G$ e ponendo

$$\int_a^b \psi(x) df(x) = \int_a^b \psi(x) dF(x) - \int_a^b \psi(x) dG(x) \ .$$

È facile verificare che il risultato è indipendente dalla decomposizione di f.

Si può anche definire **l'integrale di Riemann-Stieltjes** *rispetto ad una funzione a variazione limitata* f *contunua a sinistra, sull'intervallo* $[a, b[$*, come limite, se esiste, delle somme integrali*

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) \ ,$$

quando $\max_k |x_k - x_{k-1}| \to 0$ *(*t_k *è un punto dell'intervallo* $[x_k, x_{k-1}[$*).*

Come nel caso delle funzioni monotone, si dimostra che se ψ *è continua su* $[a, b]$ *allora il suo integrale di Riemann-Stieltjes esiste e coincide con quello di Lebesgue-Stieltjes.* Inoltre vale la maggiorazione

$$|\int_a^b \psi(x) df(x)| \leq ||\psi|| V(f, [a, b]) \ ,$$

dove $||\psi|| = \max_x |\psi(x)|$. Infatti, per ogni partizione, si ha

$$|\sum_k \psi(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1}))| \leq \sum_k |\psi(t_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq ||\psi|| \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq ||\psi|| V(f, [a, b]) \ .$$

Passando al limite, quando la finezza della partizione tende a zero, si trova la maggiorazione proposta.

5.3 *L'integrale di Riemann*

L'integrale di Lebesgue estende l'integrale nel senso di Riemann. Precisamentesi ha il

Teorema. *Sia* f *una funzione reale integrabile nel senso di Riemann sull'intervallo* $[a, b]$*. Sia* λ *la misura di Lebesgue (su* $[a, b]$*), allora* f *è integrabile nel senso di Lebesgue e*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda \ ,$$

dove il primo membro è il classico integrale di Riemann.

Dimostrazione. non è restrittivo limitarsi al caso $[a, b] = [0, 1]$. Consideriamo delle partizioni sempre più fini di $[0, 1]$ ottenute per suddivisioni successive in $2, 4, 8...$ parti eguali. Per ogni intero n sia

$$f_n^i(x) = \inf_{t \in I_k^n} f(t) \ , \ \text{per} \ \ x \in I_k^n = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\ ,$$

con $k = 0, 1...2^n - 1$, e analogamente

$$f_n^s(x) = \sup_{t \in I_k^n} f(t) \ , \ \text{per} \ \ x \in I_k^n = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\ .$$

La definizione di f_n^i e di f_n^s in 1 non è rilevante. Risulta ovviamente

$$\forall n \ \ f_n^i \leq f \leq f_n^s$$

e, per l'integrabilità nel senso di Riemann di f, si ha

$$\lim_n \int_0^1 f_n^i(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \lim_n \int_0^1 f_n^s(x)dx \ .$$

Nel contesto dell'integrazione nel senso di Lebesgue abbiamo due successioni monotone di funzioni semplici, che assumono un numero finito di valori distinti, con integrali limitati (superiormente o inferiormente) e coincidenti con i loro integrali nel senso di Riemann (somme integrali). Il teorema di B.Levi è applicabile e dunque esistono due funzioni f^i e f^s q.o. finite tali che

$$\lim_n f_n^i = f^i \leq f \leq f^s = \lim_n f_n^s \quad q.o.$$

e

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n^i d\lambda = \int_{[0,1]} f^i d\lambda = \int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f^s d\lambda = \lim_n \int_{[0,1]} f_n^s d\lambda \ .$$

Allora la funzione non negativa $f^s - f^i$ ha integrale nullo e quindi $f^s = f = f^i$ q.o. Ne segue che f è integrabile nel senso di Lebesgue e il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. *q.e.d.*

5.4 *Insiemi non misurabili*

L'estensione di una una misura elementare in X, inizialmente definita su un semi-anello, conduce ad una σ-algebra $\mathcal{L}(X)$ che, in generale, risulta molto ampia ma non coincidente con $\mathcal{P}(X)$. Vediamo il caso particolare della misura classica di Lebesgue λ su un intervallo di $\mathbf{R}$, che per semplicità, supporremo sia $[0,1[$.

Teorema. *Nello spazio di misura* $([0,1[,\mathcal{L},\lambda)$ *esistono insiemi non misurabili.*
Dimostrazione. Sia ω un numero irrazionale e introduciamo in $X = [0,1[$ la seguente relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y + j\omega + m \ \ , \ \ \text{per qualche coppia} \ \ (j,m) \in \mathbf{Z}^2 \ .$$

Necessariamente $-m$ deve essere la parte intera di $y + j\omega$: $m = -[y + j\omega]$. È immediato verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Allora X può essere scomposto in classi di equivalenza (disgiunte). Osserviamo che, se $x \sim y$, vi è un unico intero j tale che, per qualche m, $x = y + j\omega + m$: infatti

$$x = y + j\omega + m \ \wedge \ x = y + k\omega + n \Rightarrow (j-k)\omega + m - n = 0$$

e, se fosse $j \neq k$, allora ω non sarebbe irrazionale.
Dunque X è unione di classi (disgiunte), ciascuna delle quali è un insieme numerabile (se x appartiene ad una classe, tutti gli altri elementi della classe sono $x + j\omega - [x + j\omega]$, $j \in \mathbf{Z}$).
Scegliendo un elemento, ed uno solo, in ciascuna classe, formiamo un insieme W. Quindi, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, consideriamo gli insiemi W_n ottenuti da W aggiungendo $n\omega$ e sottraendo la parte intera.
Dall'osservazione sulla struttura delle classi di equivalenza si deduce immediatamente che gli

insiemi W_n sono disgiunti ed hanno unione tutto X.
Se W fosse misurabile, tutti gli insiemi W_n avrebbero la stesa misura, perché la misura di Lebesgue eredita dalla misura elementare degli intervalli l'invarianza per traslazioni. ($W + n\omega$ è contenuto in un intervallo $[p, p+2[$ e si scompone in due insiemi, contenuti in $[[p, p+1[$ e $[p+1, p+2[$, che vengono successivamente traslati di $-p$ e $-(p+1)$.)
Per la σ-additività, dovrebbe essere

$$1 = \lambda(X) = \sum_n \lambda(W_n) = \sum_n c \ ,$$

ma la serie converge solo per $c = 0$, e in tal caso converge a 0. Dunque gli insiemi W_n non possono essere misurabili. *q.e.d.*

Osservazione. Le inclusioni

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$$

sono *proprie*. Si può dimostrare che $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ha la potenza del continuo, mentre $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ ha la stessa potenza di $\mathcal{P}(\mathbf{R})$. In questo senso i Boreliani sono una classe estremamente ristretta rispetto a quella di tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue (Hewitt-Stromberg[7]).
Una sottoclasse importante di insiemi misurabili, contenente tutti i Boreliani, è costituita dagli insiemi *analitici* o *insiemi di Souslin*, che si ottengono come immagini di spazi metrici separabili e completi (Bourbaki[**?**], Federer[5]).
Esistono estensioni σ-additive μ della misura di Lebesgue λ a σ-algebre $\mathcal{M}$ molto grandi, che conservano anche la proprietà di invarianza per traslazioni. Esse tuttavia coincidono con la misura esterna λ^* indotta da λ soltanto su $\mathcal{L}$ (Hewitt-Stromberg[7]).

5.5 *Derivate di misure di Borel*

La derivabilità di una **funzione monotona** nondecrescente e continua a sinistra F si può studiare, e conviene studiarla, considerando la misura μ di Lebesgue-Stieltjes ad essa associata, definita da

$$\mu([a, b[) = F(b) - F(a) \ .$$

Per le funzioni noncrescenti ci si riporta al caso precedente con un cambiamento di segno. Nei punti nei quali una funzione è derivabile la funzione è continua, dunque la limitazione a funzioni continue a sinistra non ha alcun rilievo per quanto concerne lo studio della differenziabilità.

Proposizione. *F è derivabile in x e $F'(x) = L$ se e solo se, indicando con I un generico intervallo aperto $]a, b[$ tale che $x \in I$, si ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall I \quad |\frac{\mu(I)}{l(I)} - L| < \varepsilon \ ,$$

dove l è la misura di Lebesgue classica in $\mathbf{R}$.
Dimostrazione.
1) Se F è derivabile, dato ε esiste δ tale che

$$|c - x| < \delta \Rightarrow |F(c) - F(x) - L(c - x)| \leq \varepsilon |c - x| \ .$$

Allora, per $a < x < b$, a e b sufficientemente prossimi a x e n sufficientemente grande, si ha

$$F(b) - F(a + \frac{1}{n}) = F(b) - F(x) - L(b - x) + L(b - a - \frac{1}{n}) +$$

$$+ F(x) - F(a + \frac{1}{n}) - L(x - a - \frac{1}{n})$$

e dunque

$$|F(b) - F(a + \frac{1}{n}) - L(b - a - \frac{1}{n})| \leq \varepsilon(b - x) + \varepsilon(x - a - \frac{1}{n}) \ .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si trova

$$|F(b) - F(a + 0) - L(b - a)| \leq \varepsilon(b - a) \Leftrightarrow |\frac{\mu(]a, b[)}{l(]a, b[)} - L| \leq \varepsilon \ .$$

2) Se $\mu(I)/l(I)$, con $x \in I$, converge, allora, essendo $\mu(\{x\}) \leq \mu(I)$, risulta $\mu(\{x\}) = 0$. Dunque $\mu([x, b[) = \mu(]x, b[)$ e F è continua in x. Dalle relazioni

$$0 < b - x < \delta \ , \ n \geq \nu \ \Rightarrow \ |\frac{\mu(]x - 1/n, b[)}{l(]x - 1/n, b[)} - L| \leq \varepsilon$$

e $[x, b[= \cap_n]x - 1/n, b[$, passando al limite per $n \to +\infty$, si trova

$$|\frac{\mu([x, b[)}{l([x, b[)} - L| = |\frac{F(b) - F(x)}{b - x} - L| \leq \varepsilon$$

e F ha derivata destra in x uguale a L. Analogamente, considerando intervalli $I =]a - 1/n, x + 1/n[$, con $a < x$ sufficientemente prossimo a x e n sufficientemente grande, poiché

$$[a, x] = \cap_n]a - 1/n, x + 1/n[\ , \quad \mu([a, x]) = \mu([a, x[) = F(x) - F(a) \ ,$$

passando al limite per $n \to +\infty$, si vede che L è la derivata sinistra di F in x. *q.e.d.*

Un risultato fondamentale concernente le funzioni monotone (dovuto a **Lebesgue**) è il sguente

Teorema. *Una funzione f monotona è q.o. derivabile e la sua derivata f' è sommabile.*
La dimostrazione risulterà dallo studio della derivabilità di misure.

Ci occuperemo dunque della derivabilità, o differenziabilità, di una misura di Lebesgue-Stieltjes (non necessariamente positiva), dunque definita sui Boreliani e limitata sui limitati. Ci occuperemo soltanto della sua restrizione ai Boreliani; dunque studieremo soltanto **misure di Borel σ-finite,** che appunto significa definite sulla σ-algebra dei Boreliani e limitate sui limitati. In genere, per semplicità, ci limiteremo allo studio della misura su un intervallo limitato.

Definizione. Si dice che μ è **derivabile (o differenziabile)** in x se e solo se esiste un numero reale L tale che, indicando con I un generico intervallo aperto $]a, b[$ tale che $x \in I$, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall I \ \ |\frac{\mu(I)}{l(I)} - L| < \varepsilon \ .$$

In tal caso L si dice la derivata di μ in x e si scrive $(D\mu)(x) = L$.

È utile far ricorso alle derivate superiori e inferiori. Poniamo allora, per ogni $r > 0$,

$$\overline{D}_r(x) = \sup\{ \ \frac{\mu(I)}{l(I)} \mid x \in I \ , \ l(I) < r \ \}$$

e definiamo la *derivata superiore* come

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{r \to 0} \overline{D}_r(x) \ .$$

Il limite esiste, essendo $\overline{D}_r(x)$ non crescente come funzione di r.
In modo analogo si definisce la *derivata inferiore*$(\underline{D}\mu)(x)$ come limite delle quantità $\underline{D}_r(x)$ poste uguali all'estremo inferiore dei rapporti $\mu(I)/l(I)$.
Ovviamente si ha sempre $(\underline{D}\mu)(x) \leq (\overline{D}\mu)(x)$.
La misura μ è derivabile in x se e solo se le derivate superiore e inferiore sono finite e coincidono. In questo caso

$$(\underline{D}\mu)(x) = (D\mu)(x) = (\overline{D}\mu)(x) \ .$$

Osserviamo che $\overline{D}\mu(-\mu)(x) = -\underline{D}\mu(x)$ e che, viste le proprietà degli operatori inf e sup, si ha in ogni punto x

$$\underline{D}\mu + \underline{D}\nu \leq \underline{D}(\mu + \nu) \leq \underline{D}\mu + \overline{D}\nu \leq \overline{D}(\mu + \nu) \leq \overline{D}\mu + \overline{D}\nu \ ,$$

come si controlla immediatamente. Dunque, se μ e ν sono derivabili in x, si ha $(D(\mu+\nu))(x) = (D\mu)(x) + (D\nu)(x)$.

Osservazione. Se μ è una misura di Lebesgue-Stieltjes, allora $\overline{D}\mu$ *è una funzione Boreliana.* Infatti, se $\overline{D}_r(x) > c$, esiste un intervallo aperto I tale che $x \in I \ , \ l(I) < r$ e $\mu(I)/l(I) > c$; e quindi $\overline{D}_r(y) > c$ per ogni $y \in I$. Pertanto $\{\overline{D}_r > c\}$ è aperto e quindi $\overline{D}_r$ è Boreliana. Essendo $\overline{D}\mu = \lim_{r \to 0} \overline{D}_r$, la derivata superiore è misurabile rispetto alla σ-algebra dei Boreliani.

La proposizione seguente svolge un ruolo essenziale.

Proposizione. *Per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, se $\mu(B) = 0$, si ha $(D\mu)(x) = 0$ l-q.o. (cioè q.o. rispetto alla misura di Lebesgue ordinaria) su B.*
Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui B è limitato e, vista la decomposizione di Jordan, il caso in cui μ è positiva. Essendo, per la positività di μ, $0 \leq \underline{D}\mu \leq \overline{D}\mu$, basta dimostrare che l'insieme Boreliano $P = \{\overline{D}\mu > 0\} \cap B$ ha misura di Lebesgue nulla.

Il seguito della dimostrazione dipende da una osservazione e da un lemma.

Osservazione. La misura μ, almeno se ristretta alla σ-algebra dei Boreliani, è regolare, come dimostreremo nel capitolo 7, studiando il problema della densità di funzioni continue in L^1.

Lemma di ricoprimento. Sia $\mathcal{I}$ una famiglia finita di intervalli aperti $I_k =]c_k - r_k, c_k + r_k[$, che supporremo per comodità numerata per lunghezza non crescente: $l(I_1) \geq l(I_2) ... \geq l(I_N)$

e sia $A = \cup_k I_k$. Esiste una sottofamiglia $\mathcal{J} = \{I_{k_l}\}$ *disgiunta* tale che, se $A^* = \cup_{k_l} I_{k_l}$, allora $l(A) \leq 3l(A^*)$.
Dimostrazione del lemma. Poniamo $k_1 = 1$ e quindi scegliamo progressivamente k_l come il primo indice $> k_{l-1}$ tale che I_{k_l} non incontri $\cup_{i<l} I_{k_i}$, finché ciò sia possibile. Consideriamo gli intervalli ausiliari $J_l =]c_{k_l} - 3r_{k_l}, c_{k_l} + 3r_{k_l}[$, per i quali si ha ovviamente $l(J_l) = 3l(I_{k_l})$. Per ogni $I_k \in \mathcal{I}$ esiste $I_{k_l} \in \mathcal{J}$ tale che $I_k \cap I_{k_l} \neq \emptyset$, con $k_l \leq k < k_{l+1}$, e dunque $I_k \subseteq J_l$. Possiamo dunque concludere che

$$l(A) = l(\cup_k I_k) \leq l(\cup_l J_l) \leq \sum_l l(J_l) \leq 3 \sum_l l(I_{k_l}) = 3l(A^*) \ .$$

q.e.d.

Seguito della dimostrazione della proposizione. Supponiamo per assurdo che non sia $l(P) = 0$, allora esiste un intero n e un Boreliano $N \subseteq P$ tale che $x \in N \Rightarrow \overline{D}\mu(x) > 1/n$ e $l(N) > 0$. Per la regolarità di μ esiste un compatto $K \subseteq N$ con $l(K) > 0$. Per ogni δ e per ogni $x \in K \subseteq N$ esiste un intervallo aperto I tale che $x \in I$, $l(I) < \delta$ e $1/n < \mu(I)/l(I)$. Tali intervalli formano un ricoprimento aperto del compatto K, e, tenuto conto del lemma precedente, possiamo trovare un numero finito di questi intervalli, $I_1, I_2 ... I_m$, a due a due disgiunti e tali che

$$l(K) \leq 3 \sum_j l(I_j) \ .$$

Sia K_δ l'insieme dei punti a distanza da K minore o uguale a δ, allora, essendo $I_j \subseteq K_\delta$, si ha

$$\mu(K_\delta) \geq \mu(\cup_j I_j) = \sum_j \mu(I_j) > \frac{1}{n} \sum_j l(I_j) \geq \frac{1}{3n} l(K) \ .$$

Prendiamo ora $\delta = 1/p$, osserviamo che $\mu(K) = \lim_p \mu(K_{1/p})$ e passiamo al limite nella relazione precedente:

$$\mu(K) \geq \frac{1}{3n} l(K) > 0 \ ,$$

in contraddizione con il fatto che $K \subseteq A$ e $\mu(A) = 0$. Dunque $l(P) = 0$. *q.e.d.*

Il seguente teorema presenta i risultati fondamentali di questa sezione.

Teorema. *Sia μ una misura di Borel limitata sui limitati. Allora μ è differenziabile $l-$q.o. Sia $\mu = \mu_a + \mu_s$ è la decomposizione di Lebesgue di μ. La derivata $(D\mu)(x)$ coincide con la derivata $f(x)$ di Radon-Nikodym della parte assolutamente continua μ_a. Dunque $(D\mu)(x)$ è integrabile per $l = dx$ e per ogni Boreliano B risulta*

$$\mu(B) = \mu_s(B) + \int_B (D\mu)(x) dx \ .$$

Dimostrazione. Essendo μ_s singolare, esiste un Boreliano A tale che $\mu_s(A) = 0$ e $l(A^c) = 0$. Per la proposizione precedente $D\mu_s(x) = 0$ q.o. su A e, ovviamente, su A^c, dunque $D\mu_s(x) = 0$

l-q.o.
Se f è la derivata di Radon-Nikodym di μ_a, si ha per ogni Boreliano B

$$\mu_a(B) = \int_B f(x)dx \ .$$

Basta allora dimostrare che $D\mu_a(x) = f(x)$ l-q.o.
Vediamo che

$$\overline{D}\mu_a(x) \leq f(x) \ \ l - q.o.$$

Infatti, indicando con r un generico razionale, si ha

$$Z = \{ \ x \mid f(x) < \overline{D}\mu_a(x) \ \} = \cup_r Z_r \ , \quad \text{dove} \quad Z_r = \{ \ x \mid f(x) < r < \overline{D}\mu_a(x) \ \}$$

e si vede che $l(Z_r) = 0$: a tal fine poniamo

$$R = \{ \ x \mid r \leq f(x) \ \} \ , \ \nu(B) = \int_{B \cap R} (f(x) - r)dx \ ,$$

dove B è un Borelliano arbitrario. ν è una misura di Borel e $\nu(R^c) = 0$, dunque, per la proposizione precedente, $\overline{D}\nu = D\nu = 0$ q.o. su R^c, dove $f(x) < r$. Ma

$$\mu_a(B) \leq \nu(B) + rl(B) \ \ \text{e} \ \ \overline{D}\mu_a \leq \overline{D}\nu + r \ ,$$

dunque $\overline{D}\mu_a(x) \leq r$ q.o. su R^c, il che appunto implica $l(Z_r) = 0$.
Essendo $-f$ la derivata di Radon-Nikodym di $-\mu_a$, avremo anche $\overline{D}(-\mu_a) \leq -f$ q.o. , cioè

$$f(x) \leq \underline{D}(-\mu_a)(x) \ \ l - q.o.$$

Dunque finalmente $f = D\mu_a$ l-q.o. *q.e.d.*

Corollario. Se f è una funzione monotona non decrescente continua sinistra si ha

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \ .$$

La dimostrazione è immediata, considerando la misura generata da f.

Se la parte singolare della misura generata da f è nulla, allora vale il segno di uguaglianza. Questo risultato vale più in generale per le funzioni a variazione limitata e può essere presentato in una forma particolarmente utile. Introduciamo la seguente

Definizione. *Una funzione f si dice* **assolutamente continua** *sull'intervallo $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per per ogni successione finita $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 ... a_n < b_n \leq b$ si abbia*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \ .$$

Si vede, ovviamente, che le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata. Si dimostra facilmente che una funzione a variazione limitata genera una misura con parte singolare nulla se e solo se essa è assolutamente continua. Dunque per le funzioni assolutamente continue si ha

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \ .$$

Una funzione a variazione limitata, e in particolare una funzione monotona, ha in genere punti di discontinuità; ma anche se è continua non necessariamente è assolutamente continua. Un esempio celebre di funzione nondecrescente continua ma non assolutamente continua è fornito dalla funzione di **Vitali**, monotona nondescescente e costante sull'**insieme di Cantor**.

L'insieme di Cantor. Si divide l'intervallo $[0,1]$ in 3 parti uguali, e si toglie l'intervallo aperto centrale $A_1^1 =]1/3, 2/3[$. Si divide ciascuno dei due intervalli chiusi rimanenti in 3 parti uguali, e si tolgono i due intervalli aperti centrali $A_1^2 =]1/9, 2/9[$, $A_2^2 =]7/9, 8/9[$. Si procede indefinitamente suddividendo ad ogni passo ciascuno degli intervalli chiusi rimasti. Al passo n si tolgono dunque 2^{n-1} intervalli aperti A_k^n (di ampiezza $1/3^n$). L'insieme di Cantor C è il chiuso complementare dell'aperto costituito dall'unione A degli aperti disgiunti A_k^n:

$$C = A^c, \ A = \cup_n^{+\infty} \cup_{k=1}^{2^{n-1}} A_k^n \ .$$

L'aperto A ha misura di Lebesgue 1:

$$l(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} l(A_k^n) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^{n-1} = 1 \ .$$

Dunque C ha misura nulla.
C non è vuoto: ad esso appartengono almeno gli estremi degli intervalli A_k^n, detti **punti di prima specie**dell'insieme di Cantor. I punti di prima specie formano un insieme numerabile, ma C ha la potenza del continuo. Infatti i punti x dell'intervallo $[0,1]$ si possono rappresentare in base 3: $x = .c_1c_2c_3...$, cioè

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + ... \ ,$$

con c_k uguale a 0,1 oppure 2, e le successioni $c_1c_2c_3...$ per le quali si abbia sempre $c_n \neq 1$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di C (le successioni con c_n definitivamente uguale a 0 o 2 corrispondono ai punti di prima specie). Tali successioni formano un insieme che ha la potenza del continuo. I punti di C non di prima specie si dicono di **seconda specie** e si possono approssimare tanto bene quanto si vuole con punti di prima specie, cioè i punti di prima specie sono un sottoinsieme numerabile denso in C.

La funzione di Vitali. Definiamo la funzione $v(x)$ di Vitali nel modo seguente. Sia B_k^n la chiusura di A_k^n e B l'unione delle B_k^n:
1) se $x \in B_1^1$ si pone $v(x) = 1/2$, se $x \in B_1^2$ si pone $v(x) = 1/4$ e se $x \in B_2^2$ si pone $v(x) = 3/4$, ...
In generale in ogni B_k^n il valore di $v(x)$ scende di $1/2^n$ rispetto al valore assunto nell'intervallo B_j^{n-1} che lo segue immediatamente o sale di $1/2^n$ rispetto al valore assunto nell'intervallo B_j^{n-1} che lo precede immediatamente;
2) i punti di prima specie di C sono in B e se x è un punto di seconda specie si pone $v(x) =$

$\lim_n v(z_n)$, dove z_n è una successione di punti di prima specie convergente ad x (si controlla facilmente che il limite esiste e non dipende dalla successione approssimante).
Si vede che $v(x)$ è monotona nondecrescente e continua; ovviamente ha derivata q.o. nulla e genera una misura singolare rispetto alla misura di Lebesgue. In particolare

$$\int_0^1 v(x)dx = 0 < v(1) - v(0) = 1 \ .$$

Dal teorema sulla diferenziabilità delle misure segue immediatamente la seguente

Proposizione. Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$ per la misura di Lebesgue $l = dx$ ($f \in L^1([a, b])$), allora, indicando al solito con I un intervallo (aperto) al quale appartiene x, risulta

$$\frac{1}{l(I)} \int_I f(t)dt \to f(x) \quad l - q.o \ ,$$

quando $l(I) \to 0$.
Dimostrazione. Basta osservare che la misura $\mu(B) = \int_B f(t)dt$ è assolutamente continua e la sua derivata $D\mu$ coincide q.o. con la derivata di Radon-Nikodym, e quindi con f.

Vale in effetti un risultato più forte, dovuto a Lebesgue.

Teorema. *Se $f \in L^1([a, b])$, allora si ha*

$$\frac{1}{l(I)} \int_I |f(t) - f(x)|dt \to 0 \quad l - q.o \ ,$$

ovvero, per q.o. x e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni intervallo I con $x \in I$ e $l(I) < \delta$ il primo membro è inferiore ad ε.
I punti x per i quali la precedente relazione di limite vale si dicono **punti di Lebesgue** *di f.*
Dimostrazione. Per ogni razionale r, $f(x) - r$ è integrabile e, in virtù della proposizione precedente, esiste un insieme eccezionale Z_r tale che $l(Z_r) = 0$ e

$$x \notin Z_r \Rightarrow \frac{1}{l(I)} \int_I |f(t) - r|dt \to |f(x) - r| \ .$$

Sia $Z = \cup_r Z_r$: $l(Z) = 0$. Sia $x \notin Z$ e r tale che $|f(x) - r| < \varepsilon$. Allora $x \notin Z_r$ e dalla disuguaglianza $|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - r| + |f(x) - r|$ si ricava immediatamente

$$\frac{1}{l(I)} \int_I |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{l(I)} \int_I |f(t) - r|dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon \ ,$$

per $l(I)$ sufficientemente piccolo. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. *q.e.d.*

Capitolo 6

Misure prodotto e teorema di Fubini

6.1 *Misure prodotto*

Seguiremo la presentazione di Kolmogorov-Fomin[8], che considera soltanto misure prodotto complete, e per semplicità si limita a trattare misure finite. Non è difficile estendere i risultati fondamentali al caso di misure sigma-finite.

Proposizione 1. *Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due semianelli di sottoinsiemi, rispettivamente di X_1 e di X_2 . Allora $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, cioè la famiglia degli insiemi della forma*

$$A_1 \times A_2 \quad , \quad A_1 \in \mathcal{S}_1 \ , \ A_2 \in \mathcal{S}_2,$$

è un semianello di sottoinsiemi di $X = X_1 \times X_2$.
Dimostrazione. Praticamente immediata, ricordando la definizione di semianello:
Siano $A, B \in \mathcal{S}$, allora $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$, $A_1, B_1 \in \mathcal{S}_1$, $A_2, B_2 \in \mathcal{S}_2$.
a) Essendo $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{S}_1$ e $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{S}_2$, si ha

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{S} \ .$$

b) Sia $B \subset A$, e dunque $B_1 \subset A_1$ e $B_2 \subset A_2$. Allora

$$A_1 = \cup_{j=1}^{p} C_j \ , \ C_1 = B_1 \ , \ A_2 = \cup_{k=1}^{q} D_k \ , \ D_1 = B_2 \ ,$$

tutte le unioni essendo disgiunte, con $C_j \in \mathcal{S}_1$, $D_k \in \mathcal{S}_2$. Allora, se $B = B_1 \times B_2$, si ha

$$A = A_1 \times A_2 = B \cup \left(\cup_{j,k,j+k>2} C_j \times D_k\right) \ .$$

q.e.d.

Per induzione, il risultato si estende al prodotto di un numero finito arbitrario di semianelli.

Un esempio importante è costituito dagli intervalli $n-$dimensionali di $\mathbf{R}^n$, potenza $n-$esima del semianello degli intervalli di $\mathbf{R}$.

Si osservi che anche se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono algebre, e quindi in particolare semianelli, possiamo solo affermare che il loro prodotto è un semianello.

Definizione. *Siano μ_1 e μ_2 due misure sui semianelli $\mathcal{S}_1$ e rispettivamente su $\mathcal{S}_2$. Allora, ponendo*

$$\mu(C) = \mu_1(A) \times \mu_2(B) \ , \text{ se } \ C = A \times B \ ,$$

si definisce una misura sul semianello $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Giustificazione. Occorre naturalmente controllare che la funzione μ è effettivamente additiva: sia allora

$$C = A \times B = \cup_n C_n \quad , \quad C_n = A_n \times B_n \ ,$$

con unione finita e disgiunta, e con $A, A_n \in \mathcal{S}_1$ e $B, B_n \in \mathcal{S}_2$. Viste le proprietà dei semianelli, si possono presentare A e B come unioni finite e disgiunte di elementi dei rispettivi semianelli:

$$A = \cup_k X_k \ , \ B = \cup_l Y_l \ ,$$

in modo che C e tutti i C_n si possano scrivere come unioni finite e disgiunte di insiemi della forma $X_k \times Y_l$. (Nel caso di un rettangolo del piano con i lati paralleli agli assi, si tratta dell'usuale procedimento di far intervenire tutte le ascisse e tutte le ordinate degli estremi dei segmenti A_n e B_n per ottenere una suddivisione più fine). A questo punto il controllo dell'additività diventa immediato.

Proposizione. *Se le misure μ_1 e μ_2 sono sigma-additive sui rispettivi semianelli, allora la misura μ sopra definita è sigma additiva su $\mathcal{S}$.*
Dimostrazione. Sia

$$C = A \times B = \cup_n C_n \quad , \quad C_n = A_n \times B_n \ ,$$

con unione numerabile e disgiunta, e con $A, A_n \in \mathcal{S}_1$ e $B, B_n \in \mathcal{S}_2$. Per $x \in A$ introduciamo le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A_n \ , \\ \mu_2(B_n) & x \in A_n \ . \end{cases}$$

Per ogni $x \in A$ si ha $\{x\} \times B \subseteq C$ e dunque, posto

$$J(x) = \{ \ j \mid x \in A_j \ \} \ , \quad \text{risulta } \ \cup_{j \in J(x)} B_j = B \ .$$

Si osservi che le C_n sono disgiunte, ma le A_n e B_n in generale non sono disgiunte.
Dunque

$$\sum_n f_n(x) = \sum_{j \in J(x)} f_j(x) = \sum_{j \in J(x)} \mu_2(B_j) = \mu_2(B) \ ,$$

per la sigma-additività di μ_2 . Ricorriamo ora alla sigma-additività di μ_1 e consideriamo la sua estensione di Lebesgue λ_1. Le funzioni non negative $f_n(x)$ sono integrabili e

$$\int_A f_n(x) d\lambda_1(x) = \mu_2(B_n) \mu_1(A_n) = \mu(C_n) \ ,$$

inoltre si può applicare il teorema di Beppo Levi alle ridotte della serie delle f_n:

$$\sum_n \mu(C_n) = \sum_n \int_A f_n d\lambda_1 = \int_A \sum_n f_n d\lambda_1 \int_A \mu_2(B) d\lambda_1 = \mu_2(B)\mu_1(A) = \mu(C) \ .$$

q.e.d.

Possiamo allora considerare l'estensione di Lebesgue di μ, che indicheremo con $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. In generale

Definizione. *Siano μ_1 , μ_2 ... μ_n misure sigma additive sui semianelli $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ ... $\mathcal{S}_n$ in X_1 , X_2 ... X_n. Si dice loro prodotto l'estensione di Lebesgue di $\mu_1 \times \mu_2 ... \mu_n$, definita sul semianello prodotto, alla σ-algebra $\mathcal{L}(X)$, dove $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ e si indica con la notazione*

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n \ .$$

Osservazione. Non si esclude che $\mathcal{S}_k$ sia una σ-algebra, cioè che $(X_k, \mathcal{S}_k, \mu_k)$ sia uno spazio di misura.

Come si è detto all'inizio, i risultati precedenti sono stati dimostrati nel caso di misure finite, ma valgono anche per misure σ-finite e dunque questa definizione si estende al caso di misure σ-finite.

In particolare, se λ è la misura classica di Lebesgue su $\mathbf{R}$, allora $\lambda \otimes \lambda ... \otimes \lambda$, con n fattori presenti, è la **misura di Lebesgue** su $\mathbf{R}^n$.

6.2 *Rappresentazioni di insiemi misurabili*

Ogni insieme misurabile, a meno di un insieme di misura nulla, si può ottenere mediante un'infinità numerabile di operazioni relativamente semplici e controllabili a partire dagli insiemi elementari del semianello $\mathcal{S}$ in X, sul quale è inizialmente definita la misura μ sigma-additiva. Precisamente:

Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ l'anello generato da $\mathcal{S}$ (unioni finite di elementi $\mathcal{S}$) Si indichi ancora con μ l'estensione di Lebesgue della misura σ-additiva inizialmente definita sul semianello e con $\mathcal{L}$ la σ-algebra ottenuta mediante il prolungamento. Allora, per ogni $A \in \mathcal{L}$, esiste $B \in \mathcal{L}$ tale che $A \subseteq B$, $\mu(A) = \mu(B)$ e con la seguente struttura*

$$B = \cap_n B_n \ , \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq ... \supseteq B_n \supseteq ... \ ,$$

$$B_n = \cup_k B_{nk} \ , B_{n1} \subseteq B_{n2} \subseteq ... \subseteq B_{nk} \subseteq ... \ ,$$

dove ogni $B_{nk} \in \mathcal{R}$.

Dimostrazione. Per ogni p esiste $R_p \in \mathcal{R}$ tale che

$$\mu(A \Delta R_p) < \frac{1}{p}$$

e quindi si può trovare Z_p unione numerabile di elementi di $\mathcal{S}$ tale che

$$A \subseteq Z_p \quad \text{e} \quad \mu(A) \leq \mu(Z_p) < \mu(A) + \frac{1}{p} \ .$$

Possiamo allora prendere $B_n = \cap_{p=1}^{n} Z_p$, ottenendo una successione noncrescente, con intersezione un insieme B di misura uguale a quella di A . Ma gli insiemi B_n si possono presentare come unioni numerabili di elementi del semianello: $B_n = \cup_j S_{nj}$, $S_{nj} \in \mathcal{S}$, e prendendo $B_{nk} = \cup_{p=1}^{k} S_{nj}$ si ottiene una successione nondecrescente di elementi di $\mathcal{R}$, con unione B_n. *q.e.d.*

Osservazione. Ovviamente, se B ha la forma sopra indicata e $C = B - A$, allora A e C sono disgiunti, $A = B - C$ e $\mu(C) = 0$.
Nel caso del semianello degli intervalli di $\mathbf{R}^n$, l'insieme B è un Boreliano.

6.3 *Il teorema di Fubini*

Per gli integrali rispetto ad una misura prodotto vale un risultato analogo alla formula di riduzione degli integrali multipli, nota per l'integrale di Cauchy-Riemann in $\mathbf{R}^n$. Ci limitiamo al caso del prodotto di due fattori, potendosi dedurre il caso generale per induzione.

Per sottoinsiemi A di un prodotto $X \times Y$, converrà utilizzare le notazioni seguenti

$$A_x = \{ \ y \mid (x, y) \in A \ \} \ ,$$

$$A_y = \{ \ x \mid (x, y) \in A \ \} \ .$$

A_x è la proiezione su Y della sezione di A ottenuta intersecando A con $\{x\} \times Y$. Un'affermazione analoga vale per A_y.

Teorema (di Fubini). *Siano μ_x e μ_y due misure σ-additive complete e finite (o σ-finite) negli spazi X e Y. Sia $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$ il loro prodotto e $f(x, y)$ una funzione valori reali integrabile su un insieme $A \subseteq X \times Y$. Allora:*
1) Per μ_x-q.o. $x \in X$ la funzione $f(x, \cdot)$ è integrabile su A_x, e per μ_y-q.o. $y \in Y$ la funzione $f(\cdot, y)$ è integrabile su A_y, cioè esistono gli integrali

$$I(x) = \int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \ , \ J(y) = \int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \ ,$$

2) Definendo $I(x) = 0$ o $J(y) = 0$, quando x non appartiene alla proiezione di A su X o quando y non appartiene alla proiezione di A su Y, la funzione I risulta integrabile su X e la funzione J risulta integrabile su Y, cioè esistono gli integrali

$$\int_X I(x) d\mu_x \ , \ \int_Y J(y) d\mu_y \ ;$$

3) Vale la "formula di riduzione"

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X (\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y) d\mu_x = \int_Y (\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x) d\mu_y \ .$$

Il teorema di Fubini si può dedurre da un suo caso particolare, quello in cui $f(x, y)$ è la funzione caratteristica χ_A dell'insieme A e allora gli integrali su A_x e A_y di f sono rispettivamente $\mu_y(A_x)$ e $\mu_x(A_y)$.

Teorema. *Siano μ_x e μ_y due misure σ-additive complete e finite (o σ-finite) negli spazi X e Y. Sia $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$ il loro prodotto e A un sottoinsieme misurabile di $X \times Y$. Allora:*
1) Per q.o. x l'insieme A_x è misurabile e per q.o. y l'insieme A_y è misurabile;
2) $I_A(x) = \mu_y(A_x)$ e $J_A(y) = \mu_x(A_y)$ sono integrabili;
3) Vale la formula

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y \ .$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima uguaglianza. Per insiemi del semianello $\mathcal{S}$ prodotto

$$A = A_1 \times A_2 \ , \quad \text{e dunque} \quad A_x = A_1 \ , \ A_y = A_2 \ ,$$

il risultato è evidente. È immediato estenderlo agli elementi dell'anello $\mathcal{R}$ generato da $\mathcal{S}$. Per insiemi misurabili generali ricorriamo alla rappresentazione esposta nella sezione 2:

$$A = B - C \ , \ \mu(A) = \mu(B) \ , \ \mu(C) = 0$$

e B è intersezione monotona noncrescente di unioni monotone nondecrescenti di elementi di $\mathcal{R}$. Per quanto concerne B il risultato si estende usando il teorema di B. Levi, essendo

$$I_{B_n}(x) = \lim_k I_{B_{nk}}(x) \ , \ I_B(x) = \lim_n I_{B_n}(x) \ ,$$

$$I_{B_{n1}}(x) \leq I_{B_{n2}}(x) \leq \dots \ , \ I_{B_1} \geq I_{B_2} \geq \dots \ ,$$

per ogni x, in vitù della continuità delle misure.
Per quanto concerne C possiamo trovare un insieme D con una struttura analoga a quella di B, tale che $\mu(D) = \mu(C) = 0$. Allora, essendo $I_D(x)$ integrabile e non negativa, si ha $\mu_y(D_x) = 0$ q.o. Ma $C_x \subseteq D_x$ implica $\mu_y(C_x) = 0$ q.o., per la completezza delle misure. Pertanto

$$\mu(C) = 0 = \int_X \mu_y(C_x) d\mu_x \ .$$

Per differenza si ottiene il risultato della tesi per A. *q.e.d.*

Questo teorema permette di ottenere, nel quadro della teoria generale della integrazione, la classica interpretazione "geometrica" dell'integrale.

Proposizione. *Sia A un insieme misurabile per la misura μ_x e $f(x)$ una funzione nonnegativa integrabile su A. In $Y = \mathbf{R}$ consideriamo la misura standard di Lebesgue $\mu_y = \lambda$ e prendiamo in $X \times Y$ la misura prodotto $\mu = \mu_x \otimes \lambda$. Poniamo infine*

$$V = \{ \ (x, y) \mid x \in A \ , \ 0 \leq y \leq f(x) \ \} \ .$$

Allora

$$\mu(V) = \int_A f(x) d\mu_x \ .$$

Dimostrazione. Immediata, in quanto per ogni $x \in A$ risulta

$$\mu_y(V_x) = f(x) \ .$$

Grazie a questa proposizione, siamo ora in grado di dimostrare il teorema di Fubini.

Dimostrazione del teorema di Fubini. Consideriamo prima il caso di funzioni nonnegative $f(x, y) \geq 0$. In $Z = \mathbf{R}$ consideriamo la misura standard di Lebesgue λ e prendiamo in $E = X \times Y \times Z$ la misura prodotto

$$\nu = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \lambda = \mu \otimes \lambda = \mu_x \otimes \xi \ ,$$

dove $\xi = \mu_y \otimes \lambda$. Posto

$$V = \{ \ (x, y, z) \mid (x, y) \in A \ , \ 0 \leq z \leq f(x, y) \ \} \ ,$$

risulta

$$\int_A f d\mu = \nu(V) = \int_X \xi(V_x) d\mu_x = \int_X (\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y) d\mu_x \ .$$

Per funzioni generali si procede preliminarmente alla decomposizione in parte positiva e parte negativa: $f = f^+ - f^-$. *q.e.d.*

L'esistenza di

$$\int_X (\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y) d\mu_x \quad \text{o di} \quad \int_Y (\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x) d\mu_y \ ,$$

o anche di entrambi e la loro uguaglianza, non è sufficiente per concludere che f è integrabile su A in $X \times Y$. Rafforzando un poco l'ipotesi si ottiene un criterio di integrabilità.

Teorema di Tonelli. *Sia*

$$\int_X (\int_{A_x} |f(x, y)| d\mu_y) d\mu_x = C \leq +\infty \ .$$

Allora $|f(x, y)|$ è integrabile in A; dunque $f(x, y)$ è integrabile su A e il Teorema di Fubini è applicabile.

Osservazione. $f(x, y)$ e $|f(x, y)|$ sono simultaneamente integrabili su A_x, ma le due funzioni di x risultanti per integrazione rispetto ad y sono in generale diverse e l'integrabilità della prima su X non implica l'integrabilità della seconda.

Dimostrazione. Per ogni N naturale poniamo $g_N = \max(|f|, N)$ (troncamento di $|f|$ a livello N). Poiché stiamo trattando il caso di misure finite, le funzioni g_N sono integrabili in quanto misurabili e limitate. Applicando il teorema di Fubini e considerando che $g_N \leq |f|$ si ha

$$\int_A g_N(x, y) d\mu = \int_X (\int_{A_x} g_N(x, y) d\mu_y) d\mu_x \leq C.$$

Inoltre

$$g_N \leq g_{N+1} \leq |f| = \lim_N g_N \ .$$

Allora è applicabile il teorema di B.Levi e $|f|$ risulta integrabile su A. *q.e.d.*

6.4 $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due σ-algebre definite rispettivamente in X e Y. Può essere importante considerare nello spazio prodotto $X \times Y$ la più piccola σ-algebra contenente tutti gli elementi $A \times B$ di $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, cioè la σ-algebra $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Se su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono definite due misure μ e ν σ-additive, la misura prodotto $\mu \otimes \nu$ è definita su una σ-algebra $\mathcal{L}(X \times Y)$ che ovviamente contiene $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Per le sezioni degli elementi di $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ vale il risultato interessante seguente:

Teorema. *Sia $S \in \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, allora, per ogni $x \in X$, risulta $S_x \in \mathcal{B}$, e simmetricamente, per ogni $y \in Y$, risulta $S_y \in \mathcal{A}$.*
Dimostrazione. Consideriamo la famiglia $\mathcal{S}$ dei sottoinsiemi S tali che per ogni $x \in X$, risulta $S_x \in \mathcal{B}$. Essa contiene tutti i prodotti $P = A \times B$, con $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, perché $P_x = \emptyset$ se $x \notin A$ e $P_x = B$ se $x \in A$. Basta allora controllare che $\mathcal{S}$ è una σ-algebra. Infatti:
1) $X \times Y \in \mathcal{S}$,
2) $(S^c)_x = (S_x)^c$ e quindi $S \in \mathcal{S} \Rightarrow S^c \in \mathcal{S}$,
3) $(\cup_n S_n)_x = \cup_n (S_n)_x$ e dunque $S_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \cup_n S_n \in \mathcal{S}$.
q.e.d.

Capitolo 7

Spazi L^p

7.1 *Il caso* $1 \leq p < +\infty$

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Analogamente a quanto abbiamo fatto per $p = 1$ nel Capitolo 2, poniamo

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty\} .$$

In considerazione della ovvia disuguaglianza

$$(a + b)^p \leq (2 \max(a, b))^p \leq 2^p(a^p + b^p) ,$$

valida per ogni coppia (a, b) di numeri non negativi, si vede che, se $f, g \in \mathcal{L}^p$, allora $f + g \in \mathcal{L}^p$, e dunque $\mathcal{L}^p$ è uno spazio vettoriale.

Osserviamo che in effetti vale la disuguaglianza più precisa

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) ,$$

che si ottiene come conseguenza immediata della disuguaglianza di Hölder.

Definiamo in $\mathcal{L}^p$ la **seminorma**

$$||f||_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p} .$$

Si tratta effettivamente di una seminorma, perché è non negativa, si annulla per $f = 0$ e soddisfa la disuguaglianza triangolare, come è ovvio per $p = 1$ e come risulterà dalle disuguaglianze notevoli che ora prenderemo in considerazione per $p > 1$.

Disuguaglianza di Young. *Sia $p > 1$ e si definisca l'esponente coniugato q nel modo seguente*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

È evidente che p è a sua volta l'esponente coniugato di q, che $1/2$ è coniugato di sé stesso e che q tende a $+\infty$ quando p tende a 1.
Conviene anche osservare che

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \quad , \quad \frac{p}{q} = p - 1 \quad , \quad \frac{q}{p} = q - 1 = \frac{1}{p-1} \ .$$

Per a e b reali nonnegativi arbitrari risulta

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Dimostrazione. Se a o b è uguale a 0 la disuguagianza è ovvia. Altrimenti dividiamo per ab ed otteniamo la disuguaglianza equivalente

$$1 \leq \frac{1}{p}\frac{a^{p-1}}{b} + \frac{1}{q}\frac{b^{q-1}}{a} \ .$$

Poniamo

$$x = \frac{a^{p-1}}{b} = \frac{a^{p/q}}{b} \quad \text{e dunque} \quad \frac{b^{q-1}}{a} = x^{-q/p} \ ,$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{p} - \frac{x^{-q/p}}{q} \ .$$

Risulta

$$f(1) = 0 \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p}x^{-q/p-1} \ , \ f'(1) = 0 \ , \ f''(x) = (-\frac{q}{p} - 1)\frac{1}{p}x^{-q/p-2} \leq 0 \ .$$

Dunque $f(x)$ è concava, assume il valore massimo 0 per $x = 1$ e per ogni x positivo si ha $f(x) \leq 0$, *q.e.d.*

Disuguaglianza di Hölder. *Se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, dove $1 < p < +\infty$ e p, q sono esponenti coniugati: $1/p + 1/q = 1$, allora*

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \ \in \mathcal{L}^1 \text{ e } ||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q \ .$$

Dimostrazione. La disuguaglianza si verifica immediatamente se $f = 0$ o $g = 0$. Supponiamo allora f e g non nulli. Normalizziamo f e g, ponendo

$$u = \frac{f}{\|f\|_p} \ , v = \frac{g}{\|g\|_q} \ ,$$

allora, per la disuguaglianza di Young

$$|u(x)||v_(x)| \leq \frac{|u(x)|^p}{p} + \frac{|v(x)|^q}{q}$$

e integrando su X si trova

$$\|uv\|_1 \leq \frac{\|u\|^p}{p} + \frac{\|v\|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

E per la positiva omogeneità delle funzioni $\|\cdot\|_p$ si ottiene il risultato, che scriviamo in forma esplicita:

$$\int_X |fg|d\mu \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \int_X |g|^q d\mu)^{1/q} \quad q.e.d.$$

Se X è un insieme finito e tutti i suoi elementi hanno misura 1, le funzioni sono sucesioni finite e gli integrali diventano somme ordinarie.
In particolare se X ha solo due elementi 0 e 1, $f(0) = a \geq 0$, $f(1) = b \geq 0$ e g è costante uguale a 1:

$$a + b \leq (a^p + b^p)^{1/p}(1^q + 1^q)^{1/q} \quad \text{e} \quad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \ .$$

Dalla disuguaglianza di Hölder segue la **disuguaglianza di Minkowski (o disuguaglianza triangolare):** *se* $f, g \in \mathcal{L}^p$ *allora*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \ .$$

Dimostrazione. Se $f + g = 0$ il risultato è immediato. Altrimenti:

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f+g|^{p-1}|f|d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g|d\mu \leq$$

$$\leq (\int_X |f+g|^{q(p-1)}d\mu)^{1/q} \ ((\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}) \ .$$

Ma essendo $q(p-1) = p$, si trova

$$(\int_X |f+g|^p d\mu)^{1-1/q} \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int_X |g|^p d\mu)^{1/p}) \ . \quad q.e.d.$$

Per ottenere uno spazio normato, introduciamo la **relazione di equivalenza**

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \ q.o. \ in \ X$$

e **definiamo** $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ come spazio quoziente di $\mathcal{L}^p$ rispetto a tale relazione di equivalenza: $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$. Come per L^1 le classi di equivalenza vengono spesso, con abuso di linguaggio, dette funzioni e indicate con un loro rappresentante. Tutti i rappresentanti di una classe hanno la stessa seminorma e per $F \in L^p$ si pone

$$||F||_p = ||f||_p \text{ dove } f \in F \ .$$

Teorema. *L^p è uno spazio normato completo cioè uno spazio di Banach. Inoltre da ogni successione convergente in norma $||\cdot||_p$ si può estrarre una sottosuccessione convergente q.o. in X (l'intera successione potrebbe non convergere q.o.).*
Cenno di dimostrazione. Si procede come nel caso di L^1 , considerando le ridotte $F_N(x)$ della serie

$$F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}(x)}| \ ,$$

dove si pone $f_{n_0} = 0$ e le f_{n_j} sono scelte in modo che $||f_{n_j} - f_{n_{j-1}}||_p < 1/2^k$, per $j > 1$. Per la disuguaglianza triangolare

$$||F_N||_p \leq \sum_{j=1}^{N} |||f_{n_j} - f_{n_{j-1}}||_p \leq C \ .$$

Cioè $\int_X |F_N|^p d\mu < C^p$ e alle F_N^p , che costituiscono una successione nondecrescente, è pertanto applicabile il teorema di B.Levi: esse convergono q.o. ad una funzione integrabile G, la serie converge e ovviamente $F = G^{1/p}$. Si deduce allora che esiste una funzione f tale che

$$f_{n_j}(x) \to f(x) \ q.o. \ , \ |f_{n_j}|^p, |f|^p \leq G \ , \ f \in L^p \ \text{ e } \ ||f_{n_j} - f||_p \to 0 \ .$$

q.e.d.

Teorema. *Le combinazioni lineari (finite) delle funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili sono dense in L^p, ovvero $\{\chi_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ è una famiglia* **totale** *in L^p.*
Dimostrazione.
1) Le funzioni semplici in L^p sono dense in L^p . Infatti se $f \in L^p$ e se si pone

$$\text{per } f(x) \in [k/n, (k+1)/n[\ : \ f_n(x) = k/n \text{ o } (k+1)/n \ ,$$

secondo che $|k|/n < |k+1|/n$ o $|k|/n > |k+1|/n$, risulta: f_n è semplice, $|f_n|^p \leq |f|^p$ e $f_n \in L^p$, f_n converge uniformemente ad f e dunque

$$||f_n - f||_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \leq \mu(X)/n^p \to 0 \ ,$$

per $n \to +\infty$ e quindi f_n converge ad f in L^p .
2) Sia g una funzione semplice in L^p:

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \chi_{A_k} \ \text{ e } \ \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p \mu(A_k) < +\infty \ ,$$

dove y_k sono i valori distinti di g e A_k gli insiemi misurabili (disgiunti) sui quali g vale y_k . Allora, posto

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} y_k \chi_{A_k} \ ,$$

si ha

$$||g - g_N||_p^p = \sum_{K=N+1}^{+\infty} |y_k|^p \mu(A_k) \to 0$$

per $N \to +\infty$. Dunque le combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili sono dense nell'insieme delle funzioni semplici in L^p, e per il punto 1) sono dense in L^p.
q.e.d.

7.2 *Il caso $p = +\infty$*

Per f misurabile, introduciamo la quantità (essential supremum)

$$||f||_\infty = \text{ess.sup}_{x\in X}|f(x)| = \inf\{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \; q.o.\} =$$

$$= \inf_{N\in\mathcal{N}} \sup_{x\notin N} |f(x)| \; ,$$

dove $\mathcal{N}$ è la famiglia dei sottoinsiemi di X di misura nulla.

Definizione:

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \mid ||f||_\infty < +\infty\} \; .$$

Osservazione. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$ allora $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ q.o. ed esiste $N \in \mathcal{N}$ tale che $\sup_{x\notin N} |f(x) = ||f||_\infty$.

Infatti sia

$$|f(x)| \leq ||f||_\infty + \frac{1}{n} \;\text{ su }\; X - N_n \; , \; N_n \in \mathcal{N} \; .$$

Allora

$$\forall n \; |f(x)| \leq ||f||_\infty + \frac{1}{n} \;\text{ su }\; X - N \; , \; N = \cup_n N_n \in \mathcal{N} \; ,$$

e quindi $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ su $X - N$. Per la definizione di $||f||_\infty$, non può essere $\sup_{x\in X-N} |f(x)| < ||f||_\infty$.

Considerando la solita realzione di equivalenza $\sim$ che pone in una stessa classe funzioni uguali q.o., si definisce allora

$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim \; .$$

Se $F \in L^\infty$ e $f \in F$ si pone $||F||_\infty = ||f||_\infty$ (tutti i rappresentanti di F hanno la stessa seminorma). Ovviamente $||F||_\infty$ è una norma in L^∞.

Teorema. *L^∞ è uno spazio normato completo, cioè uno spazio di Banach.*
Dimostrazione. Sia F_n una successione di Cauchy in L^∞ e $f_n \in F_n$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \text{ su } X - Y_{n,m} \; Y_{n,m} \in \mathcal{N} \; ,$$

e quindi su $X - Y$, con $Y = \cup_{n,m} Y_{n,m} \in \mathcal{N}$. Pertanto f_n converge uniformemente in $X - Y$ ad una funzione linite f limitata, che può essere prolungata arbitrariamente a Y ottenendo un elemento di $\mathcal{L}^\infty$. Se $F = [f]$,

$$F = \lim_n F_n \quad \text{in} \;\; L^\infty \; .$$

q.e.d.

7.3 *Risultati di immersione*

Teorema (di immersione). *Sia $\mu(X) < +\infty$ e $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ allora*

$$L^p(X) \subseteq L^q(X) \;\; e \;\; ||f||_q \leq \mu(X)^{1/q-1/p}||f||_p \; ,$$

(per $p = +\infty$ in luogo di $1/p$ si deve porre 0)
Cioè L^p è immerso con continuità in L^q; in particolare la convergenza in norma L^p implica quella in norma L^q.
Inoltre

$$\lim_{q\to+\infty} ||f||_q = ||f||_\infty \ .$$

Dimostrazione. Per $p = +\infty$ e per $p = q$ l'immersione e la sua continuità sono evidenti. Se $1 \leq q < p < +\infty$, usando la disuguaglianza di Hölder:

$$||f||_q^q = \int_X 1 \cdot |f|^q d\mu \leq (\int_X (|f|^q)^s d\mu)^{1/s} (\int_X 1^{s'} d\mu)^{1/s'} \ ,$$

dove si è posto

$$s = \frac{p}{q} \ , \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1 \ , \quad s' = \frac{s}{s-1} = \frac{p}{p-q} \ .$$

Dunque

$$||f||_q^q \leq ||f||_p^q \cdot (\mu(X))^{\frac{p-q}{p}} \ .$$

Infine, se $f \in L^\infty$, da un lato si ha

$$\limsup_{q\to+\infty} (\int_X |f|^q d\mu)^{1/q} \leq \limsup_{q\to+\infty} (\mu(X))^{1/q} ||f||_\infty = ||f||_\infty \ ,$$

dall'altro, per definizione di "ess.sup", per ogni ε , esiste un insieme misurabile A con $\mu(A) > 0$ sul quale $|f(x)| \geq ||f||_\infty - \varepsilon$, e quindi

$$\liminf_{q\to+\infty} (\int_A |f|^q d\mu)^{1/q} \geq \liminf_{q\to+\infty} (\mu(A))^{1/q} (||f||_\infty - \varepsilon) = ||f||_\infty - \varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε, si trova $||f||_\infty = \lim_q ||f||_q$. *q.e.d.*

Se la misura non è finita non vale il precedente teorema di immersione.

7.4 *Spazi l^p*

Gli spazi $l^p(\mathbf{C})$ di successioni a valori in $\mathbf{C}$ si definiscono nel modo seguente. Per $1 \leq p < +\infty$ si pone:

$$l^p = \{a = (a_0, a_1, ...) \in \mathbf{C}^\mathbf{N} \ | \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\} \ ,$$

con

$$||a||_p = (\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p)^{1/p} \ .$$

Per $p = +\infty$ si pone

$$l^\infty = \{a = (a_0, a_1, ...) \in \mathbf{C}^\mathbf{N} \ | \ \sup_n |a_n| < +\infty\} \ ,$$

con

$$||a||_\infty = \sup_n |a_n| < +\infty \ .$$

Se si considera lo spazio discreto $\mathbf{N}$ munito della sigma-algebra di tutti i suoi sottoinsiemi e della misura δ che ad ogni insieme costituito da un solo punto n associa il valore 1: $\delta(\{n\}) = 1$, si può identificare l^p con $L^p(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \delta)$. Infatti ogni successione definisce una funzione misurabile $a(n) = a_n$ e:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p = \int_{\mathbf{N}} |a|^p d\delta \ .$$

Il risultato di completezza degli spazi L^p vale anche se la misura non è finita e quindi gli spazi l^p sono spazi di Banach.

La completeza di l^p si può dismostrare direttamente: sia $a^n = (a_0^n, a_1^n, ...)$ una successione (di successioni) di Cauchy in l^p. Dato $\varepsilon > 0$, per n, m sufficientemente grandi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k^n - a_k^m|^p \leq \varepsilon \ .$$

In particolare, per ogni k risulta $|a_k^n - a_k^m|^p \leq \varepsilon$ e $\{a_k^m\}_k$ è una successione di Cauchy in $\mathbf{C}$. Sia $a_k = \lim_m a_k^m$. Per ogni K si ha

$$\sum_{k=0}^{K} |a_k^n - a_k^m|^p \leq \varepsilon$$

e passando al limite per $m \to +\infty$

$$\sum_{k=0}^{K} |a_k^n - a_k|^p \leq \varepsilon \ .$$

Dunque per $K \to +\infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k^n - a_k|^p \leq \varepsilon \ .$$

Poiché per n sufficientemente grande $a^n - a \in l^p$, essendo $a^n \in l^p$, si ottiene $a \in l^p$ (si ricordi che per $x, y \geq 0$ si ha $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$). Allora, per l'arbitrarietà di ε

$$\lim_{n \to +\infty} ||a^n - a||_p = 0 \ .$$

q.e.d.

Per gli spazi l^p vale un risultato di immersione sostanzialmente contrario a quello visto nel caso di misure generali ma finite.

Teorema. *Sia* $1 \leq q \leq p \leq +\infty$. *Allora* $l^q \subseteq l^p$ *con immersione continua, e precisamente*

$$||a||_p \leq ||a||_q \ .$$

Dimostrazione. Per $p < +\infty$ sia $c = a/||a||_q$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^q = 1 \ .$$

Allora, essendo per ogni k $|c_k| \leq 1$, si ha $|c_k|^p \leq |c_k|^q$ e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^p \leq 1 \ .$$

Quindi $||c||_p \leq 1$, da cui segue immediatamente la tesi.
Se $q < p = +\infty$ e $a \in l^q$ si ha $|a_k| \to 0$ per $k \to +\infty$. Sia allora j tale che $|a_j| = \max_k |a_k|$. Si ha immediatamente

$$||a||_\infty = \sup_k |a_k| = |a_j| \leq (\sum_k |a_k|^q)^{1/q} = ||a||_q \ .$$

q.e.d.

Osservazione. Le disuguaglianze ottenute valgono ovviamente anche per successsioni finite. Dunque se $x_1, x_2 ... x_n$ sono numeri non negativi e $q \leq p$ si ha

$$(x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p)^q \leq (x_1^q + x_2^q + ... + x_n^q)^p \ .$$

7.5 *Densità di funzioni continue*

Vediamo ora un risultato importante di densità nel caso in cui lo spazio X è strutturato sia come spazio di misura che come spazio metrico.

Teorema. *Nelle ipotesi*
1) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è uno spazio di misura* ($\mu(X) < +\infty$)*;*
2) (X, d) *è uno spazio metrico;*
3) La famiglia $\mathcal{B}$ *dei Boreliani (per la topologia indotta dalla distanza d) è contenuta in* $\mathcal{A}$: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *;*
4) Ogni insieme misurabile può essere approssimato in misura, tanto bene quanto si vuole, mediante aperti contenenti e chiusi contenuti: indicando con $\mathcal{O}$ *e* $\mathcal{F}$ *gli aperti e chiusi di* X,

$$\forall \varepsilon \ > 0 \forall A \in \mathcal{A} \ \exists O_\varepsilon \in \mathcal{O} \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F} F_\varepsilon \subseteq A \subseteq O_\varepsilon \text{ e } \mu(O_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon \ ,$$

o come si dice la misura μ *è* **regolare**. Allora, per $1 \leq p < +\infty$, le funzioni continue e limitate (C_b) in X costituiscono un sottospazio denso in L^p:

$$C_b(X; \mathbf{R}) \text{ è denso in } L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbf{R}) \ .$$

(In generale non tutte le funzioni continue hanno potenza p-esima integrabile).
Dimostrazione. Ricordando che le funzioni caratteristiche χ_A degli insiemi misurabili formano una famiglia totale in L^p , è sufficiente approssimare tali funzioni con funzioni continue. Infatti se $f \in L^p$, dato $\varepsilon > 0$, esistono ν, c_k, A_k tali che

$$||f - \sum_{k=1}^{\nu} c_k \chi_{A_k}||_p < \varepsilon/2 \ .$$

Se è possibile trovare ϕ_k continua e limitata tale che $||\chi_{A_k} - \phi_k|| < \varepsilon/2|c_k|\nu$, allora

$$||f - \sum_{k=1}^{\nu} c_k \phi_k||_p < \varepsilon \ .$$

Siano dunque: A misurabile, ε positivo, O_ε e F_ε un aperto ed un chiuso con le proprietà indicate al punto 4) delle ipotesi. Poniamo

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{d(x, X - O_\varepsilon)}{d(x, F_\varepsilon) + d(x, X - O_\varepsilon)} \ ,$$

dove, come abitualmente, $d(x, E)$ è definita da

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y)$$

e risulta continua, perché

$$\inf_{y \in E} d(x, y) \leq \inf_{y \in E} (d(x', y) + d(x, x')) \ ,$$

da cui $d(x, E) \leq d(x', E) + d(x, x')$. Scambiando x con x' si ha $d(x', E) \leq d(x, E) + d(x', x)$ e quindi

$$|d(x, E) - d(x', E)| \leq d(x, x') \ .$$

La funzione ϕ_ε è ben definita, continua, assume valori compresi tra 0 e 1, vale 1 su F_ε e 0 sul complementare di O_ε, che è chiuso. Infine

$$\int_X |\chi_A - \phi_\varepsilon|^p d\mu \leq 1 \cdot \mu(O_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon \ .$$

q.e.d.

Proposizione. *In uno spazio metrico, se la σ-algebra $\mathcal{A}$ coincide con la σ-algebra dei Boreliani $\mathcal{B}$, allora la misura è regolare.*
Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X che si possono approssimare tanto bene quanto si vuole mediante chiusi contenuti e aperti contenenti. Se F è chiuso allora $F \in \mathcal{F}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, si può prendere $F_\varepsilon = F$ e, in virtù della continuità della misura (finita) lungo successioni decrescenti, trovare un aperto O_ε con le proprietà richieste tra gli insiemi aperti $A_n = \{ \ x \mid d(x, F) < 1/n \ \}$, i quali appunto formano una successione decrescente con $F = \cap_n A_n$. Basta allora dimostrare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra, essendo $\mathcal{B}$ la minima σ-algebra a

cui appartengono tutti i chiusi. Sia dunque $A_n \in \mathcal{F}$ e si scelgano F_n, chiusi, e O_n, aperti, tali che

$$F_n \subseteq A_n \subseteq O_n \quad , \; \mu(O_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \; .$$

Posto

$$O_\varepsilon = \cup_n O_n \quad , \quad F_\varepsilon = \cup_{n<N} F_n \; ,$$

con N tale che $\mu(\cup_n F_n - F_\varepsilon) < \varepsilon/2$, si ottengono un aperto ed un chiuso tali che

$$F_\varepsilon \subseteq \cup_n A_n \subseteq O_\varepsilon \;\; \text{e} \;\; \mu(O_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon \; .$$

Dunque $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto alle operazioni di unione numerabile, ed essendo ovviamente chiuso per operazioni di passaggio al complementare, è una σ-algebra. *q.e.d.*

Proposizione. *La misura di Lebesgue l su un intervallo limitato di $\mathbf{R}^n$ è regolare.*
Dimostrazione. Sia A misurabile. Allora esiste B, unione finita di intervalli R_j disgiunti, e C unione numerabile di intervalli S_k disgiunti, tali che

$$l(A\Delta B) < \varepsilon \; , \; B = \cup_{j=1}^N R_j \; , \; A\Delta B \subseteq C = \cup_{k=1}^{+\infty} S_k \; , \; l(C) < \varepsilon \; .$$

Consideriamo degli intervalli aperti R_j^a e S_k^a ottenuti per dilatazione degli intervalli R_j e S_k in modo che

$$l(R_j^a - R_j) < \frac{\varepsilon}{N} \; , \; l(S_k^a - S_k) < \frac{\varepsilon}{2^k} \; .$$

Allora, posto

$$B^a = \cup_j R_j^a \; , \; C^a = \cup_k S_k^a \; , \; O = B^a \cup C^a \; ,$$

si ha

$$l(B^a - B) < \varepsilon \; , \; l(C^a - C) < \varepsilon \; , \; l(C^a) < 2\varepsilon \; ,$$

$$O = C^a \cup B \cup (B^a - B) \supseteq (A\Delta B) \cup B \supseteq A \quad , \quad O - A \subseteq C^a \cup (A\Delta B) \cup (B^a - B) \; .$$

Dunque O è un aperto contenente A e $l(O - A) < 4\varepsilon$.
In modo analogo possiamo trovare un aperto O_* contenente A^c tale che, indicando con F il chiuso complementare di O_*, ovviamente contenuto in A, si abbia $l(O_* - A^c) = l(A - F) < 4\varepsilon$. E la proposizione è dimostrata.

La densità delle funzioni continue integrabili in L^1 permette di stabilire un legame importante tra le funzioni misurabili e le funzioni continue, presentato nel seguente enunciato.

Teorema (Lusin). *Sia μ una misura completa, finita e regolare in uno spazio metrico X. Data una funzione reale f misurabile ed un numero $\varepsilon > 0$, esiste un sottoinsieme Z tale che la restrizione di f a Z è continua e $\mu(X - Z) < \varepsilon$.*
Dimostrazione. Posto $E_n = \{ \, |f| > n \, \}$, essendo f ovunque finita, si ha

$$\emptyset = \cap_n E_n \; , \; E_{n+1} \subseteq E_n \; , \; \lim_n \mu(E_n) = 0 \; .$$

Sia allora $Y = E_N^c$, con $\mu(E_N) < \varepsilon/2$. Y è un sottospazio metrico di X e, essendo misurabile, la restrizione di μ a Y è ancora completa, finita e regolare. Infatti la σ-algebra dei sottoinsiemi misurabili di Y contiene tutti gli aperti relativi, traccia degli aperti di X su Y, e, se

$$A \subseteq Y, \; F \subseteq A \subseteq O \; , \; \mu(O - F) < \eta \; ,$$

con F chiuso in X e O aperto in X, allora F è chiuso in Y, $O' = O \cap Y$ aperto in Y e $\mu(O' - F) < \eta$. La restrizione g di f a Y è limitata e quindi in L^1. Sia g_k una successione di funzioni contine integrabili convergente in $L^1(Y)$ a g. Sia g_k^* una sottosuccessione di g_k convergente q.o. in Y a g. Per il teorema di Egorov esiste $Z \subseteq Y$ tale che $\mu(Y - Z) < \varepsilon/2$ e la convergenza delle funzioni continue g_k^* su Z è uniforme. Allora la restrizione di g e quindi di f a Z è continua. *q.e.d.*

Osservazione. Nella dimostrazione precedente si è vista la conservazione della regolarità passando ad un sottospazio. Tale tema poteva essere omesso, considerando la funzione g^N uguale a g su Y e ad N su $X - Y$, e approssimandola in $L^1(X)$ mediante funzioni continue in X. Estraendo una sottosuccessione convergente q.o. in X e restringendola a Y, si poteva concludere, sempre in vitù del teorema di Egorov, solo sulla base del fatto che la restrizione di μ a Y è completa e finita.

7.6 *Il duale di L^1*

Ogni funzionale lineare e continuo $F(f)$ da L^1 in $\mathbf{R}$, cioè ogni elemento del duale topologico $(L^1)'$ di L^1, può essere rappresentato mediante l'integrale del prodotto dell'argomento f con un elemento g di L^∞ univocamente associato a F. Questo risultato, che si dimostra facilmente ricorrendo al teorema di Radon-Nikodym, può essere utilmente confrontato con il classico teorema di rappresentazione di Riesz negli spazi di Hilbert.

Teorema. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbf{R})$, e $F \in (L^1)' = \mathcal{L}(L^1; \mathbf{R})$. Allora esiste un unico elemento $g \in L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbf{R})$ tale che*

$$\forall f \in L^1 \quad F(f) = \int_X fg d\mu \quad e \quad \|F\|_* = \|g\|_\infty \ .$$

Viceversa, se $g \in L^\infty$, l'applicazione

$$F \ : \ f \mapsto \int_X fg d\mu$$

definisce un elemento di $\mathcal{L}(L^1; \mathbf{R})$, con $\|F\|_* = \|g\|_\infty$.

Dimostrazione. Supporremo, solo per semplicità, che la misura sia finita.
Osserviamo in primo luogo che se $F(f) = \int_X fg d\mu$ si ha

$$|F(f)| \le \int_X |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

e quindi F è lineare e continuo con $\|F\|_* \le \|g\|_\infty$.
Essendo, per ogni insieme misurabile A

$$|\int_X \chi_A g d\mu| = |F(\chi_A)| \le \|F\|_* \|\chi_A\|_1 = \|F\|_* \mu(A) \ ,$$

si ha $|g| \le \|F\|_*$ q.o. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\|F\|_* \|\chi_{\{\ g \ge \|F\|_* + \varepsilon\ \}}\|_1 \ge \int_X g \chi_{\{\ g \ge \|F\|_* + \varepsilon\ \}} d\mu \ge (|F\|_* + \varepsilon) \|\chi_{\{\ g \ge \|F\|_* + \varepsilon\ \}}\|_1$$

e dunque $\mu(\{\ g \geq \|F\|_* + \varepsilon\ \}) = 0$. In modo analogo si vede che $\mu(\{\ -g \leq -(\|F\|_* + \varepsilon)\ \}) = 0$. Dunque, posto $G_n = \{\ |g| \geq \|F\|_* + 1/n\ \}$ e $G = \{\ |g| > \|F\|_*\ \}$, si ha $\mu(G) = \mu(\cup_n G_n) \leq \sum_n \mu(G_n) = 0$.
Allora $\|F\|_* = \|g\|_\infty$ e la seconda parte della tesi è dimostrata. Inoltre è immediato verificare che l'applicazione $g \mapsto F$ è iniettiva: se g e g^* individuano lo stesso funzionale, si deve avere per ogni $f \in L^1$

$$\int_X (g - g^*) f d\mu = 0 \quad \text{e dunque} \quad \int_X (g - g^*)^2 d\mu = 0\ ,$$

cioè $g = g^*$ in L^∞.
Dato ora F lineare e continuo, introduciamo la misura

$$\phi(A) = F(\chi_A) \quad , \quad A \in \mathcal{A}\ .$$

Se $A = \cup_n A_n$, con unione disgiunta, per la σ-additività di μ o dell'integrale rispetto a μ, si ha

$$\mu(A) = \|\chi_A\|_1 = \sum_n \|(\chi_{A_n})\|_1 = \sum_n \mu(A_n)$$

e la serie $\chi_A = \sum_n \chi_{A_n}$ converge, oltre che puntualmente, in L^1. Per la linearità e comtinuità di F,

$$\phi(A) = F(\chi_A) = \sum_n F(\chi_{A_n}) = \sum_n \phi(A_n)$$

e ϕ è una misura σ-additiva. Inoltre ϕ è assolutamente continua rispetto a μ, perché

$$|\phi(A)| = |F(\chi_A)| \leq \|F\|_* \|\chi_A\|_1 = \|F\|_* \mu(A)\ .$$

Per il teorema di Radon-Nikodym esiste $g \in L^1$ tale che

$$F(\chi_A) = \phi(A) = \int_A g d\mu = \int_X g \chi_A d\mu\ .$$

Ma allora, per la densità delle combinazioni lineari finite delle χ_A in L^1, i due funzionali lineari e continui $F(f)$ e $\int_X f g d\mu$ coincidono. *q.e.d.*

Abbiamo quindi un isomorfismo, cioè una bijezione lineare e isometrica, tra $(L^1)'$ e L^∞. Più in generale vale il

Teorema. *Per $1 \leq p < +\infty$ il duale topologico di L^p è isomorfo a L^q, dove q è l'esponente coniugato di p (per $p = 1$ si ha $q = +\infty$).*

7.7 *Il duale di $C([a, b])$. Misure di Radon*

Ogni funzionale lineare e continuo su $C([a, b])$ si può rappresentare come un integrale di Stieltjes sull'intervallo $[a, b]$ rispetto ad una misura con segno generata da una funzione a variazione limitata. Questo risultato, che verrà enunciato precisamente in seguito, si ottiene facilmente dal seguente teorema di rappresentazione.

Teorema di Riesz. *Sia L un funzionale lineare positivo su $C([a,b])$, cioè tale che $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. Allora L è limitato ed esiste un'unica misura (positiva) di Lebesgue-Stieltjes μ, generata da una funzione monotona non decrescente continua a sinistra F e da un valore $F(b+0)$, tale che per ogni $f \in C([a,b])$*

$$L(f) = \int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x)dF(x) = \int_{[a,b[} f(x)dF(x) + f(b)(F(b+0) - F(b)) \ .$$

F e $F(b+0)$ sono individuati da L a meno di una costante additiva. Inoltre $||L|| = \mu([a,b]) = F(b+0) - F(a)$.
Dimostrazione. Essendo L positivo, esso è monotono e quindi, per ogni f, si ha

$$-|f| \leq f \leq |f| \leq ||f|| \ \Rightarrow |L(f)| \leq L(|f|) \leq L(1)||f|| \ .$$

Dunque L è limitato e $||L|| = L(1)$.
Osserviamo che $C = C([a,b])$ è somma diretta del sottospazio C^b delle funzioni che si annullano in b e del sottospazio K, di dimensione 1, delle funzioni costanti: $f = f^b + f(b)$. Per la linearità $L(f) = L(f^b) + f(b)L(1)$.
Definiamo la funzione

$$F(x) = \sup_{0 \leq f \leq \chi_{[a,x[}} L(f) \ .$$

Naturalmente $F(a) = 0$, essendo $\chi_{[a,a[} = \chi_\emptyset \equiv 0$ e $L(0) = 0$.
$F(x)$ risulta monotona nondecrescente. Infatti, se $y < x$, la funzione $g \geq 0$ continua, uguale a 1 tra a e y, lineare (decrescente) in $[y,x]$ e nulla in $[x,b]$ maggiora $\chi_{[a,y[}$ ed è maggiorata da $\chi_{[a,x[}$. Dunque $F(y) \leq L(g) \leq F(x)$.
Inoltre F è continua a sinistra. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, sia

$$0 \leq g \leq \chi_{[a,x[} \ \text{ tale che } \ F(x) - \varepsilon < L(g) \leq F(x)$$

e sia $g_h(x) = g(x+h)$ la traslata di g di $-h$, con $0 < h < \delta$ e δ sufficientemente piccolo in modo che $||g_h - g||_\infty < \varepsilon$, come possibile per la continuità uniforme di g. Allora si ha

$$0 \leq g_h \leq \chi_{[a,x-h[} \ , \ |L(g_h) - L(g)| < ||L||\varepsilon \ \text{ e}$$

$$F(x) \geq F(x-h) \geq L(g_h) \geq L(g) - ||L||\varepsilon \geq F(x) - (1 + ||L||)\varepsilon \ .$$

La funzione monotona F induce su $[a,b[$ una misura di Lebesgue-Stieltjes μ, che si può estendere a $[a,b]$ ponendo $F(b+0) = F(b+0) - F(a) = L(1)$.
Si osservi che se O è un intervallo aperto $]x,y[$ e g è una funzione continua tale che $g \leq \chi_O$ allora $L(g) \leq \mu(O)$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, sia $g_h \in C$ ($h > 0$ sufficientemente piccolo) con $0 \leq g_h \leq \chi_{]x+h,y[}$, $||g - g_h|| < \varepsilon$, dunque $|L(g) - L(g_h)| \leq ||L||\varepsilon$, e sia $f_h \in C$ con $0 \leq f_h \leq \chi_{[a,x+h[}$ tale che $F(x+h) - \varepsilon < L(f_h) \leq F(x+h)$. Allora f_h e g_h si annullano in $x+h$ e $0 \leq f_h + g_h \leq \chi_{[a,y[}$. Pertanto

$$\mu(]x,y[) \geq \mu([x+h,y[) = F(y) - F(x+h) \geq L(f_h + g_h) - F(x+h) \geq$$

$$\geq L(g_h) - \varepsilon \geq L(g) - ||L||\varepsilon - \varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha, come preannunciato, $\mu(O) \geq L(g)$.
Per ottenere una rappresentazione in forma integrale di L basta verificare che per ogni $f \in C$

$$L(f) \leq \int_{[a,b]} f(x)dF(x) \ ,$$

perché in tal caso si ha anche

$$-L(f) = L(-f) \leq \int_{[a,b]} (-f(x))dF(x) = -\int_{[a,b]} f(x)dF(x)$$

e dunque vale il segno di uguaglianza.
Ricordiamo che per la funzione continua f l'integrale di Lebesgue-Stieltjes $\int_{[a,b[} fd\mu$, coincide con quello di Riemann-Stieltjes, limite di somme integrali.
Sia allora: $\varepsilon > 0$, $|f(y)-f(z)| < \varepsilon$ per $|y-z| < 3h$, $[a,b[= \cup_{j=1}^n I_j$, $I_j = [x_{j-1}, x_j[$ per $1 \leq j \leq n$, $x_j = a + jh$, $nh = b - a$, $t_j \in I_j$, $y_j = f(t_j)$ e

$$|\int_{[a,b[} f(x)d\mu(x) - \sum_j y_j(F(x_j) - F(x_{j-1}))| < \varepsilon \ .$$

La misura μ è regolare sui Boreliani e quindi possiamo considerare degli aperti di $[a,b[$ $O_j \supset I_j$ tali che $\mu(O_j - I_j) < \varepsilon/n$. Possiamo prendere $O_j =]x_{j-1} - \delta, x_j[$ per $1 < j \leq n$, $O_1 = I_1 = [x_0, x_1[$, con $\delta < h$, sufficientemente piccolo, e tale che si abbia anche $F(b) - F(b-\delta) < \varepsilon$.
Sia, per $1 < j \leq n$, g_j la funzione continua, uguale a 1 su $]x_{j-1}, x_j - \delta[$, lineare a tratti in O_j e nulla fuori di O_j. Sia inoltre: g_1 continua, uguale a 1 su $[x_0, x_1 - \delta]$, lineare in $[x_1 - \delta, x_1]$ e nulla oltre x_1; e g_{n+1} continua, nulla fino a $b - \delta$, tale che $g_{n+1}(b) = 1$ e lineare in $[b - \delta, b]$.
Si verifica immediatamente (basta tracciare i grafici delle g_j) che $\sum_j g_j \equiv 1$. Dunque $\sum_j g_j f = f$ e $g_j f \leq (y_j + \varepsilon)g_j$. In particolare $g_{n+1} = 1 - \sigma$, con

$$\sigma = \sum_{k=1}^n g_k \ , \quad \text{e} \quad L(g_{n+1}) = L(1) - L(\sigma) \leq F(b+0) - F(b-\delta) \leq F(b+0) - F(b) + \varepsilon \ ,$$

perché $\chi_{[a,b-\delta[} \leq \sigma$.
Possiamo allora concludere, ponendo $s = F(b+0) - F(b)$:

$$L(f) = \sum_j L(g_j f) \leq \sum_j (y_j + \varepsilon)L(g_j) \leq \sum_{j=1}^n y_j \mu(O_j) + y_n(s+\varepsilon) + \varepsilon L(1) \leq$$

$$\leq \sum_j y_j \mu(I_j) + \sum_j y_j \frac{\varepsilon}{n} + y_n(s+\varepsilon) + \varepsilon L(1) \leq \sum_j y_j \mu(I_j) + y_n s + (2||f|| + L(1))\varepsilon =$$

$$= \sum_j y_j(F(x_j) - F(x_{j-1})) + y_n(F(b+0) - F(b)) + (2||f|| + L(1))\varepsilon \leq$$

$$\leq \int_{[a,b[} f(x)d\mu(x) + f(b)(F(b+0) - F(b)) + (1 + s + 2||f|| + L(1))\varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε, si trova

$$L(f) = \int_a^b f(x)dF(x) = \int_{[a,b]} f d\mu \ .$$

Infine, per ogni $f \in C$,

$$|L(f)| \leq ||f||(F(b+0) - F(a)) = \mu([a,b])||f||$$

e dunque $||L|| \leq \mu([a,b])$. Ma per $f \equiv 1$ si ha $L(1) = \mu([a,b])$ e quindi

$$||L|| = L(1) = \mu([a,b]) = (F(b+0) - F(a)) \ .$$

q.e.d.

* * *

Il risultato precente riguarda un intervallo compatto dell'asse reale, ma può essere esteso a qualunque spazio localmente compatto (quindi separato). Proponiamo,senza dimostrazione, per la quale si rimanda per esempio a Rudin[10], il segeuente teorema. Ricordiamo che $C_0(X)$ indica lo spazio delle funzioni continue (che ci limiteremo a considerare a valori reali) in tutto X e a supporto compatto. Naturalmente se X è compatto $C_0(X) = C(X)$.

Teorema. *Sia Sia X uno spazio topologico localmente compatto (ogni punto di X ammette un intorno compatto) e σ-compatto (X è unione numerabile di insiemi compatti; si dice anche che X è numerabile all'infinito). Sia L un funzionale lineare e positivo su $C_0(X)$. Allora esiste una σ-algebra $\mathcal{A}$ contenente la famiglia $\mathcal{B}$ dei Boreliani ed esiste un'unica misura positiva μ su $\mathcal{A}$ tali che:*

1) per ogni compatto K si ha $\mu(K) < +\infty$;
2) μ è regolare, nel senso che per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto O ed un chiuso F tali che

$$F \subseteq A \subseteq O \ \text{ e } \ \mu(O - F) < \varepsilon \ ;$$

3) per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \inf\{ \ \mu(O) \mid A \subseteq O \ , \ O \ \text{ aperto } \ \} \ ;$$

4) per ogni $A \in \mathcal{A}$, se $\mu(A) < +\infty$ o, anche se, pur non avendo misura finita, A è un Boreliano

$$\mu(A) = \sup\{ \ \mu(K) \mid A \supseteq K \ , \ K \ \text{ compatto } \ \} \ ;$$

(le proprietà 3) e 4) sono conseguenza della regolarità; alcuni autori dicono regolare una misura se per essa le proprietà 3) e 4) valgono per tutti i Boreliani);
5) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura completo;
6) L si rappresenta mediante μ, nel senso che

$$\forall f \in C_0(X) \ \ L(f) = \int_X f d\mu \ .$$

Osservazioni. Un risultato lievemente meno forte si ottiene anche se X non è σ-compatto. Se invece si suppone che, non soltanto X sia σ-compatto, ma che ogni suo sottoinsieme aperto sia σ-compatto, allora si può dimostrare che ogni misura positiva su $\mathcal{B}$ è regolare, risultato analogo a quello visto per misure finite in spazi metrici.
Ovviamente ogni spazio compatto è σ-compatto. Invece uno spazio σ-compatto potrebbe non essere localmente compatto, come potrebbe ammettere dei sottoinsiemi aperti non σ-compatti.

Cenni relativi alla costruzione di $\mathcal{A}$ e μ. Per semplicità consideriamo uno spazio X compatto. In primo luogo si definisce μ per ogni aperto O di X nel modo seguente:

$$\mu(O) = \sup_{0 \leq f \leq \chi_O,\ f \in C(X)} L(f) \ .$$

Si introduce quindi la corrispondente misura esterna, ponendo per ogni sottoinsieme S di X

$$\mu^*(S) = \inf_{A \subseteq O} \mu(O) \ ,$$

dove O è un arbtrario insieme aperto. Si constata che effettivamente μ^* è σ-subadditiva. Risulta σ-additiva sulla famiglia dei compatti e più in generale sulla famiglia $\mathcal{A}$ degli insiemi A per i quali

$$\mu^*(A) = \sup_{K \subseteq A} \mu^*(K) \ ,$$

dove K è un arbitrario insieme compatto. Tutti gli aperti O sono in $\mathcal{A}$ e per essi $\mu(O) = \mu^*(O)$. Si verifica che $\mathcal{A}$ è una *sigma*-algebra e che la restrizione μ di μ^* ad $\mathcal{A}$ è *sigma*-additiva. Lo spazio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ha tutte le proprietà elencate nella tesi del teorema.

Ricordiamo la seguente definizione (Federer[5]).

Definizione. *Una misura (o una misura esterna) μ su uno spazio X localmente compatto e separato si dice* **misura di Radon** *se e solo se valgono le proprietà seguenti:*
1) $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto di X,
2) per ogni aperto O di X si ha

$$\mu(O) = \sup\{\ \mu(K) \mid K \ \text{ è compatto e } \ K \subseteq O\ \} \ ,$$

3) per ogni insieme A misurabile (o per ogni sottoinsieme A di X) si ha

$$\mu(A) = \inf\{\ \mu(O) \mid O \ \text{ è aperto e } \ A \subseteq O\ \} \ .$$

Le misure sopra associate a funzionali lineari positivi sono dunque misure di Radon.

& & &

Lo spazio $C = C([a,b])$ è parzialmente ordinato dalla relazione $f \leq g$ (ovvero per ogni x di $[a,b]$ $f(x) \leq g(x)$). Più precisamente esso è uno spazio di **Riesz** (Bourbaki[2]).

Definizione. *Uno spazio vettoriale X su* **R è uno spazio di Riesz** *se e solo se:*
1) X è munito di una relazione d'ordine (parziale) compatibile con la struttura di spazio vettoriale, cioè:
i) qualsiansi $x, y, z \in X$ si ha $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
ii) qualsiansi $x, y \in X$ e $\lambda > 0$ si ha $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$;
2) qualsiansi $x, y \in X$ esistono in X $x \vee y = \sup(x, y)$ e $x \wedge y = \inf(x, y)$. ($\sup(x, y)$ è definito come (unico) elemento che maggiora x e y ed è $\leq$ di ogni maggiorante di x e y; $\inf(x, y)$ è definito analogamente.)

In uno spazio di Riesz si pone, come usuale:

$$x^+ = x \vee 0 \ , \ x^- = -(x \wedge 0) \ , \ |x| = x^+ + x^-$$

e quindi ogni elemento x si può presentare come differenza di due elementi positivi, essendo canonica la presentazione:

$$x = x^+ - x^- \ , \ x^+ \geq 0 \ , \ x^- \geq 0 \ .$$

Ogni funzionale L lineare e continuo su C si può scrivere come differenza di due funzionali positivi.
Infatti, poniamo per $f \geq 0$

$$L^+(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} L(g) \ .$$

Allora si ha
1) $|L^+(f)| \leq ||L|| ||f||$, perché $|L(g)| \leq ||L|| ||g||$ e $0 \leq g \leq f \Rightarrow ||g|| \leq ||f||$;
2) per $\lambda \geq 0$ risulta $L^+(\lambda f) = \lambda f$;
3) $L^+(f + f') = L^+(f) + L^+(f')$, perché

$$\sup_{0 \leq h \leq f+f'} = \sup_{0 \leq g \leq f} \sup_{0 \leq g' \leq f'} (L(g) + L(g')) \ ,$$

in quanto per ogni h tale che $0 \leq h \leq f + f'$ si ha $h = f \wedge h + (h - f) \vee 0$ con $0 \leq f \wedge h \leq f$ e $0 \leq (h - f) \vee 0 \leq f'$.
Estendendo poi L^+ mediante la formula

$$L^+(f) = L^+(f^+) - L^+(f^-) \ ,$$

si ottiene un funzionale lineare e positivo.
Inoltre, posto, per $f \geq 0$:

$$L^-(f) = -\inf_{0 \leq g \leq f} L(g) \ ,$$

e $L^-(f) = L^-(f^+) - L^-(f^-)$ per f generica, si vede in modo analogo che L^- è un funzionale lineare e positivo. Vale allora la decomposizione

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \ ,$$

che basta verificare per $f \geq 0$:

$$L^+(f) - L(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} (L(g) - L(f)) = \sup_{0 \leq g \leq f} -L(f - g) =$$

$$= - \inf_{0 \le h \le f} L(h) = L^-(f) \; .$$

Siamo ora in grado di precisare e giustificare l'enunciato presentato all'inizio della sezione sul duale di $C([a,b])$.

Teoema. *I funzionali lineari e continui L su $C = C([a,b])$ (a valori reali), cioè gli elementi del duale topologico C' di C sono in corrispondenza biunivoca con le misure di Lebesgue-Stieltjes su $[a,b]$. Se μ è la misura corrispondente a L, si ha*

$$\forall f \in C \;\; L(f) = \int_{[a,b]} f(x) d\mu(x)$$

e la norma di L è uguale alla variazione totale di μ: $||L|| = |\mu|([a,b])$.
Essendo ogni misura di Lebesgue-Stieltjes generata da un'unica funzione a variazione limitata F continua a sinistra e nulla in (ad esempio) a, e da un unico valore $F(b+0)$, le formule precedenti si possono scrivere nella forma

$$\forall f \in C \;\; L(f) = \int_{[a,b]} f(x) dF(x) \; , \; ||L|| = V(F, [a, b+0]) \; .$$

*(*La funzione F, e quindi la sua variazione totale, è continua a sinistra: abbiamo allora posto, come nella sezione 2 del capitolo 5, $V(F,[a,b+0]) = V(F,[a,b]) + |F(b+0) - F(b)|$.)
Dimostrazione. Se F è a variazione limitata e continua a sinistra (con $F(a) = 0$) ed associata al valore $F(b+0)$, allora, come si è visto al capitolo 5, per ogni funzione continua f:

$$|\int_{[a,b[} f(x)dF(x) + f(b)(F(b+0 - F(b))| \le ||f|| V(F, [a, b+0])$$

e dunque $L(f) = \int_{[a,b]} f(x)dF(x)$ è un funzionale lineare e continuo con $||L|| \le V(F,[a,b+0])$. In effetti vale il segno di uguaglianza. L'integrale, per la continuità di f, si può vedere come integrale di Riemann-Stieltjes e dunque come limite di somme integrali. Ricordando che la variazione totale è continua a sinistra, sia P una partizione di $[a,z]$, z sufficientemente prossimo a b, con N punti di suddivisione x_k ($x_N = z$), tale che

$$S(F,P) = \sum_k |F(x_k) - F(x_{k-1})| \ge V(F,[a,b]) - \varepsilon$$

e per ogni x_k sia $y_k < x_k$ tale che

$$S(F,P') = \sum_k |F(y_k) - F(x_{k-1})| \ge S(F,P) - \varepsilon \quad \text{e}$$

$$V(F,[y_k,x_k]), \; V(F,[z,b]) \le \varepsilon/(N+1) \; ;$$

e sia infine $f(t) = \mathrm{segn}(F(y_k) - F(x_{k-1}))$, per $x_{k-1} \le t \le y_k$, $f(b) = \mathrm{segn}(F(b+0) - F(b))$, e $f(t)$ lineare in $[y_k, x_k]$ e $[z,b]$, dunque $||f|| = 1$. Allora

$$\int_{[a,b]} f dF = \sum_k (\int_{[x_{k-1},y_k[} + \int_{[y_k,x_k[} + \int_{[z,b[}) f dF + f(b)(F(b+0) - F(b))$$

$$\geq S(F,P') - (N+1)||f||\varepsilon/(N+1) + |F(b+0) - F(b)| \ .$$

Pertanto

$$\int_{[a,b]} f dF \geq V(F, [a, b+0]) - 3\varepsilon \ ,$$

e infine

$$||L||||f|| = ||L|| \geq \int_{[a,b]} f dF = V(F, [a, b+0]) \ .$$

Viceversa ogni funzionale lineare e continuo si scrive come differenza di due funzionali L^+ e L^- positivi, ai quali il teorema di Riesz associa due funzioni F^+ e F^- nondecrescenti, continue a sinistra e nulle in a, e due valori $F^+(b+0)$ e $F^-(b+0)$. La differenza $F = F^+ - F^-$ è a variazione limitata, continua a sinistra e nulla in a, ed è associata al valore $F(b+0) = F^+(b+0) - F^-(b+0)$, in modo tale che

$$L(f) = \int_{[a,b]} f(x) dF(x) \ .$$

La corrispondenza tra misure di Lebesgue-Stieltjes e funzionali lineari e continui è dunque isometrica e suriettiva, dunque biunivoca. *q.e.d.*

Bibliografia

[1] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of Probability Measures.* John Wiley $ Sons, New York, 1968.

[2] BOURBAKI, N.: *Intégration.* Chapitres 1,2,3 et 4. Hermann, Paris 1963.

[3] BOURBAKI, N.: . *Topologie Générale.* Chapitre 9. Hermann, Paris 1958.

[4] DOOB J.L.: *Measure Theory.* Springer-Verlag, New York 1993.

[5] FEDERER, H.: *Geometric Measure Theory.* Grundlehren math. Wissen, 153. Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[6] HALMOS, P.R.: *Measure Theory.* Van Nostrand, New York, 1950.

[7] HEWITT, E. and STRONGBERG, K.: *Real and Abstract Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[8] KOLMOGOROV, A.N. and FOMIN, S.: *Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle.* Éditions Mir, Moscou, 1974.

[9] NEGRO, A.: *Analisi Matematica I,* Levrotto & Bella, Torino, 1992.

[10] RUDIN, W.: *Analisi Reale e Complessa,* Boringhieri, Torino, 1974.

[11] YOSIDA, K.: *Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1971.