

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

P. M. GANDINI, S. BIANCO

Appunti di topologia

Quaderno # 41 - Novembre 2006



Indice

Prefazione	i
Introduzione	iii
Capitolo 1. Nozioni preliminari	1
1. Funzioni e zero-insiemi	1
2. Ideali e z-filtri	5
3. Convergenza di z-filtri e ideali fissi	10
Capitolo 2. C^*-immersione	15
1. La compattizzazione di Stone Čech	15
Bibliografia	27

Prefazione

In questo quaderno sono raccolti gli appunti a qualche parte delle lezioni del corso di Topologia (generale) dedicate alla compattizzazione di Stone Čech, che il primo autore tiene presso l'Università di Torino. Si è deciso di pubblicare questa parte perchè tale argomento, di base nello studio della Topologia, fa parte ogni anno del programma del corso.

Introduzione

In questo quaderno si studia il problema della C^* -immersione di uno spazio completamente regolare X , cioè della possibilità di estendere ogni funzione continua e limitata di X in \mathbb{R} ad un sovraspazio di X , in cui X sia denso.

Ripercorreremo brevemente i momenti storici in cui la teoria ha iniziato a svilupparsi, sino a giungere ai fondamentali risultati della compattizzazione di Stone Čech.

È noto che funzioni continue su uno spazio compatto hanno come immagine un compatto e che i compatti di \mathbb{R}^n sono i chiusi limitati. Alcuni mate-matici del Novecento si sono posti il problema di come immergere uno spazio non compatto in uno compatto in modo da poter estendere ad esso ogni funzione continua limitata.

Nel 1924 Alexandroff definisce la compattizzazione di uno spazio X di Hausdorff localmente compatto: $\omega X = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un punto che non appartiene ad X .

Nel 1930 Tychonoff usa il concetto di spazio completamente regolare, introdotto da Urysohn nel 1925, e definisce il prodotto topologico di un numero arbitrario di intervalli $[0, 1]$, detto cubo di Tychonoff, provando che esso è compatto. Čech nel 1937 si ispira alla tesi di dottorato di Tychonoff (scritta sotto la direzione di Alexandroff), in cui egli dimostra che uno spazio topologico X è sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff se e solo se per ogni chiuso K di X e per ogni $x \in X - K$ esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ che manda x in 0 e K in 1 (questi particolari spazi sono detti completamente regolari), e costruisce un cubo di Tychonoff $P(X)$ come prodotto di tante volte $[0, 1]$ quante sono le funzioni continue e limitate $f : X \rightarrow [0, 1]$. Definita poi su X la funzione e che manda il generico elemento $x \in X$ nell'elemento di $P(X)$ che ha come componente relativa alla funzione f proprio $f(x)$, ossia ponendo $f\{e(x)\}_f = f(x)$, Čech indica con $\beta(X)$ la chiusura dell'iniezione di X nel cubo di Tychonoff. Ne risulta che $e[X]$ è C^* -immerso in βX , ovvero che ogni funzione continua e limitata su $e[X]$ ha una ed una sola estensione continua e limitata su βX . Inoltre βX è compatto ed ogni spazio in cui X è denso e C^* -immerso è un sottospazio di βX . Nel suo lavoro del 1937, *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Stone introduce una topologia sullo spazio $\mathcal{M}(X)$ degli ideali massimali dell'anello $C^*(X)$. Se X è uno spazio

completamente regolare, gli ideali massimali fissi sono tutti della forma $\{f \in C^*(X)/f(x_0) = 0\}$, per $x_0 \in X$ ed il sottospazio formato da essi è omeomorfo ad X . Risulta poi che X è C^* -immerso in $\mathcal{M}(X)$, dal che si deduce che esso è omeomorfo allo spazio βX di Čech.

Nel 1943, su *A problem of set-theoretic topology*, Hewitt scrive: ‘Un celebre teorema, dovuto a Tychonoff e poi esteso da Stone e Čech [...] afferma che ogni spazio completamente regolare può essere immerso come sottoinsieme denso in un appropriato spazio di Hausdorff compatto’.

Nel 1985 Cameron si pose per primo la questione di come chiamare il teorema risultato dei lavori dei due matematici. Qualcuno parla del teorema di ‘Čech Stone’, mentre Hewitt li citava in ordine inverso, forse per dar maggior risalto a Stone, che aveva seguito la tesi di Hewitt ad Harvard. Un’altra ipotesi è quella di citare prima Stone e poi Čech, secondo l’ordine con cui sono arrivati i loro lavori agli *Annals of Math.*.

Gli importanti risultati dei lavori di Stone e di Čech sono sintetizzati da

Sia X uno spazio completamente regolare. Esiste allora uno spazio topologico $\beta(X)$ tale che

- (1) $\beta(X)$ è uno spazio di Hausdorff compatto
- (2) $X \subset \beta(X)$
- (3) X è denso in βX
- (4) Ogni funzione continua e limitata f nel dominio X può essere estesa al dominio $\beta(X)$.

Nel 1937 Cartan presenta un lavoro sulla teoria della convergenza: la sua teoria dei filtri e degli ultrafiltri verrà modificata da Kohls, nel 1957, nella nozione di z -filtri e z -ultrafiltri, che sarà poi ripresa nel 1960 da Gillman e Jerisonnel fondamentale testo *Rings of continuous functions* di questi due grandi matematici.

CAPITOLO 1

Nozioni preliminari

1. Funzioni e zero-insiemi

Sia X uno spazio topologico.

Si consideri l'insieme $C(X) = \{\text{funzioni continue } f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$, dove \mathbb{R} è preso con la topologia standard. Su di essi possiamo definire le operazioni di somma e di prodotto in questo modo:

$$\forall f, g \in C(X), \forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

La somma e il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue, per cui $C(X)$ è chiuso rispetto a tali operazioni. Inoltre queste sono associative e commutative, e vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Le funzioni costanti e_r , che associano ad ogni $x \in X$ la costante $r \in \mathbb{R}$, sono continue e quindi stanno in $C(X)$. Allora e_0 sarà lo zero di $C(X)$, mentre e_1 l'elemento unitario. $\forall f \in C(X)$, l'opposta sarà la funzione $-f$ che associa ad ogni $x \in X$ il valore $-f(x)$, mentre la sua inversa, che esiste solo se $\forall x \in X f(x) \neq 0$, sarà definita da $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Allora $C(X)$, $+$, \cdot è dotato della struttura di anello commutativo con unità.

Per ogni $f, g \in C(X)$ posso definire $k(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ ed $h(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$: esse sono continue, come lo è anche la funzione $|f|$ definita da $|f|(x) = |f(x)|$ (valore assoluto di un numero reale).

Il sottoinsieme $C^*(X)$, formato dalle funzioni limitate di $C(X)$, è stabile rispetto alle stesse operazioni, ed è quindi un suo sottoanello.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $f \in C(X)$. Si dice zero-insieme di f , e si indica con $Z(f)$, l'insieme delle controimmagini di 0 mediante f . In simboli

$$(1) \quad Z(f) = \{x \in X / f(x) = 0\}$$

$Z(f)$ risulta essere un chiuso, in quanto controimmagine mediante una funzione continua del chiuso $\{0\}$ di \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 1.2. L'insieme $C_Z(f) = \{x \in X / f(x) \neq 0\}$ si dice cozero-insieme di f .

Poichè $C_Z(f)$ è il complementare del chiuso $Z(f)$, risulta essere un aperto. Indichiamo con $Z(X)$ l'insieme di tutti gli zero-insiemi di X e con $C_Z(X)$ l'insieme dei cozero-insiemi. Posso inoltre interpretare Z come una funzione $Z : C(X) \rightarrow Z(X)$, che associa ad $f \in C(X)$ lo zero-insieme $Z(f)$.

Risulta evidente che $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$ e che $Z(f^2 + g^2) = Z(f) \cap Z(g)$ e, poichè $\forall f, g \in C(X)$, $f \cdot g$ e $f^2 + g^2 \in C(X)$, $Z(X)$ risulta essere stabile rispetto alle intersezioni ed alle unioni finite.

Si può dimostrare che esso è stabile anche rispetto alle intersezioni numerabili.

Risulta anche ovviamente che $C_Z(f) \cap C_Z(g) = C_Z(fg)$ e $C_Z(f) \cup C_Z(g) = C_Z(f^2 + g^2)$ e che $Z(f) = Z(|f|) = Z(-f) = Z(f^n)$.

PROPRIETÀ 1.3. *Se $r \in \mathbb{R}$ ed $f \in C(X)$, allora $A = \{x/f(x) \geq r\}$ è uno zero-insieme.*

DIMOSTRAZIONE. È facile provare che per $g = \min\{f - r, 0\}$ si ha $A = Z(g)$. \square

Osservazione. Anche l'insieme $A' = \{x/f(x) \leq r\}$ è uno zero-insieme, mentre gli insiemi $\{x/f(x) > r\}$ e $\{x/f(x) < r\}$ sono cozero-insiemi.

DEFINIZIONE 1.4. *Uno spazio topologico di Hausdorff X si dice completamente regolare se, per ogni punto $x \in X$ ed ogni insieme chiuso (non vuoto) C che non contiene x , esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$ e $f[C] = \{0\}$.*

È equivalente dire che esiste una funzione continua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $g(x) = 0$ e $g[C] = \{1\}$: basta infatti considerare $g = 1 - f$.

PROPRIETÀ 1.5. *Uno spazio di Hausdorff X è completamente regolare se e solo se la famiglia $C_Z(X)$ di tutti i cozero-insiemi di X è una base per gli aperti di X .*

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a dimostrare che, se lo spazio X è completamente regolare, allora $C_Z(X)$ è una base per gli aperti di X . Prendiamo un generico aperto A ed un punto $x \in A$, vogliamo trovare una funzione f per la quale valga l'inclusione $x \in C_Z(f) \subseteq A$. Poichè $x \in A$, x non appartiene al chiuso $X - A$. Allora, per ipotesi, esiste una funzione continua f tale che $f(x) = 1$ ed $f[X - A] = \{0\}$, per cui $x \in C_Z(f) \subset A$. Poichè possiamo farlo $\forall x \in A$, l'aperto A è esprimibile come unione di cozero-insiemi. Allora $C_Z(X)$ è una base per gli aperti di A .

Partiamo ora dall'ipotesi che $C_Z(X)$ sia una base per gli aperti di A . Per dimostrare che X è completamente regolare, consideriamo un generico punto $x \in X$ e un chiuso C non contenente x . Allora x è contenuto nell'aperto $X - C$ che, per ipotesi, si può esprimere come unione di cozero-insiemi. Esisterà dunque una funzione continua f tale che $x \in C_Z(f) \subseteq X - C$ e quindi $Z(f) = X - C_Z(f) \supset X - [X - C] = C$. Scopriamo quindi che $f(x) = r \neq 0$ ed $f[C] = 0$.

Prendiamo $h = \min\{1, \max\{0, \frac{f}{r}\}\}$, abbiamo trovato una funzione continua che soddisfa $h[X] \subseteq [0, 1]$, $h(x) = 1$ e $h[C] = \{0\}$. Allora X è completamente regolare. \square

DEFINIZIONE 1.6. *Due sottoinsiemi non vuoti A e B di uno spazio topologico X si dicono completamente separati in X se esiste una funzione $f \in C^*(X)$, per cui $f[A] = \{0\}$ ed $f[B] = \{1\}$.*

Caratterizziamo ora gli insiemi completamente separati tramite la

PROPRIETÀ 1.7. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (a) *A e B sono completamente separati.*
- (b) *A e B sono contenuti in zero-insiemi disgiunti.*
- (c) *A e B sono contenuti in due zero-insiemi disgiunti, intorni rispettivamente di A e B .*

DIMOSTRAZIONE.

(b) \Rightarrow (a)

Per ipotesi A e B sono contenuti in zero-insiemi disgiunti, che indico rispettivamente con $Z(f)$ e $Z(g)$. Considero $h = \frac{f^2}{f^2+g^2} \in C(X)$. $h[A] = \{0\}$ e $h[B] = \{\frac{f^2}{f^2+0}\} = \{1\}$. Allora A e B sono completamente separati.

(a) \Rightarrow (c)

Per ipotesi esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f[A] = \{0\}$ ed $f[B] = \{1\}$.

Poniamo $C = \{x \in X / f(x) \leq \frac{1}{3}\}$ e $D = \{x \in X / f(x) \geq \frac{2}{3}\}$. C e D sono due zero-insiemi disgiunti. C è un intorno di A : infatti l'aperto $\{x \in X / f(x) < \frac{1}{3}\}$ è contenuto in C e contiene A . Analogamente si ha che D è intorno di B considerando l'aperto $\{x \in X / f(x) > \frac{2}{3}\}$

(c) \Rightarrow (b)

Questa implicazione è ovvia. □

COROLLARIO 1.8. *Ogni intorno di un punto, in uno spazio completamente regolare, contiene uno zero-insieme intorno del punto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$ ed U_x un suo intorno. Allora esiste un aperto A tale che $x \in A \subseteq U_x$ e, di conseguenza, x non appartiene al chiuso $X - A$. Poichè X è completamente regolare, esiste una funzione $f \in C(X)$ tale che $f(x) = 1$ e $f[X - A] = \{0\}$. Quindi $\{x\}$ ed $X - A$ sono completamente separati. Per la proprietà (1.7)(c), esistono due funzioni opportune, $h, k \in C(X)$, per cui valgono le inclusioni: $\{x\} \subseteq Z(h)$ e $X - A \subseteq Z(k)$, con $Z(h) \cap Z(k) = \emptyset$ e $Z(h)$ intorno di $\{x\}$. Allora $Z(h)$ è un intorno di x contenuto in A e quindi $x \in Z(h) \subseteq A \subseteq U_x$. □

Diamo ora due definizioni di fondamentale importanza:

DEFINIZIONE 1.9. *Un sottospazio S di uno spazio topologico X si dice C^* -immerso in X se ogni funzione di $C^*(S)$ può essere estesa ad una funzione in $C^*(X)$.*

DEFINIZIONE 1.10. *Un sottospazio S di uno spazio topologico X si dice C -immerso in X se ogni funzione di $C(S)$ può essere estesa ad una funzione in $C(X)$.*

Nel prossimo capitolo caratterizzeremo gli spazi in cui X è denso e C^* -immerso.

2. Ideali e z-filtri

Come abbiamo detto nel paragrafo precedente, gli insiemi $C(X)$ e $C^*(X)$ sono anelli. Ci interesserà studiare dei loro particolari sottoanelli, gli ideali. Ricordiamo che un sottoinsieme proprio I di un anello A si dice ideale se $\forall x \in I$ e $\forall a \in A$ $a \cdot x \in I$. È evidente che, se I contiene l'unità di A , allora coincide con A .

Un ideale è detto massimale se non è contenuto propriamente in nessun ideale proprio di A . Riportiamo, a questo riguardo, la

PROPRIETÀ 2.1. *L'anello quoziente A/I è un campo se e solo se I è un ideale massimale.*

Introduciamo a questo punto il concetto di z-filtro, che sarà di fondamentale importanza per studiare la C^* -immersione.

DEFINIZIONE 2.2. *Uno z-filtro su uno spazio topologico X è una famiglia \mathcal{F} non vuota di zero-insiemi di X che soddisfa le condizioni:*

- (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- (2) Se Z_1 e $Z_2 \in \mathcal{F}$, allora $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$.
- (3) Se $Z \in \mathcal{F}$ e $Z' \in Z(X)$, con $Z \subset Z'$, allora $Z' \in \mathcal{F}$.

Dal punto (3) di questa definizione, risulta evidente che X appartiene a tutti gli z-filtri.

DEFINIZIONE 2.3. *Sia \mathcal{D} una famiglia non vuota di insiemi. \mathcal{D} gode della proprietà dell'intersezione finita (rispettivamente numerabile) se comunque scelto un numero finito (rispettivamente un'infinità numerabile) di elementi di \mathcal{D} , la loro intersezione è diversa dall'insieme vuoto.*

Esiste un legame tra gli ideali di $C(X)$ e gli z-filtri, descritto nel seguente

TEOREMA 2.4.

- (1) Se I è un ideale proprio di $C(X)$, la famiglia $Z[I] = \{Z(f)/f \in I\}$ è uno z-filtro su X .
- (2) Se \mathcal{F} è uno z-filtro su X , la famiglia $Z^{-1}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X)/Z(f) \in \mathcal{F}\}$ è un ideale proprio in $C(X)$.

DIMOSTRAZIONE.

- (1) Vediamo se sono verificate le tre condizioni degli z-filtri:

- (i) Per assurdo sia $\emptyset \in Z[I]$. Allora esiste una funzione $f \in I$ il cui zero-insieme è l'insieme vuoto e quindi f sarebbe un elemento unitario. Ma si tratta di un ideale che contiene un elemento unitario, e quindi deve coincidere con l'anello $C(X)$, il che va contro l'ipotesi che I sia un ideale proprio. Allora $\emptyset \notin Z[I]$.

- (ii) $\forall Z(f_1), Z(f_2) \in Z[I], f_1, f_2 \in I$ e quindi $f_1^2 + f_2^2 \in I$, cioè $Z(f_1^2 + f_2^2) \in Z[I]$. Poichè $f_1^2 + f_2^2$ si annulla solo nei punti in cui si annullano contemporaneamente entrambe le funzioni, $Z(f_1^2 + f_2^2) = Z(f_1) \cap Z(f_2)$ e quindi $Z(f_1) \cap Z(f_2) \in Z[I]$.
- (iii) Siano $Z \in Z[I]$ e $Z' \supseteq Z$. Allora esistono $f \in I$ ed $f' \in C(X)$ tali che $Z = Z(f)$ e $Z' = Z(f')$. Poichè I è un ideale, $f \cdot f' \in I$, quindi $Z(f \cdot f') \in Z[I]$. Poichè $Z(f \cdot f') = Z(f) \cup Z(f') = Z \cup Z' = Z'$ anche $Z' \in Z[I]$.
- (2) Siano $J = Z^{-1}[\mathcal{F}], f, g \in J$ e $h \in C$. Segue che $Z(f), Z(g)$ e quindi $Z(f) \cap Z(g)$ appartengono a \mathcal{F} . Per dimostrare che J è un ideale, uso il criterio e quindi devo provare che $f - g$ e $f \cdot h$ sono in J . $Z(f - g) \supseteq Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$, d'altra parte $Z(f \cdot h) = Z(f) \cup Z(h) \supseteq Z(f) \in \mathcal{F}$. Allora $Z(f - g), Z(f \cdot g) \in \mathcal{F}$ e quindi $f - g, f \cdot g \in J$. Allora J è un ideale e, poichè $\emptyset \notin \mathcal{F}$, J non contiene elementi unitari e quindi è un ideale proprio. □

Tra gli z-filtri assumeranno particolare importanza quelli descritti dalla seguente

DEFINIZIONE 2.5. *Uno z-ultrafiltro è uno z-filtro non contenuto propriamente in nessun altro z-filtro, e quindi massimale rispetto alla relazione di inclusione.*

Enunciamo ora la

PROPRIETÀ 2.6. *Ogni sottofamiglia di $Z(X)$ che gode della proprietà dell'intersezione finita è contenuta in uno z-ultrafiltro.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{F} una famiglia di zero-insiemi che gode della proprietà dell'intersezione finita. Si consideri la famiglia $\mathbf{F}^* = \{Z \in Z(X) / \exists F_1, \dots, F_n \in \mathbf{F} \text{ t.c. } Z \supseteq F_1 \cap \dots \cap F_n\}$.

\mathbf{F}^* è uno z-filtro contenente ovviamente \mathbf{F} . Infatti:

- (1) $\emptyset \notin \mathbf{F}^*$. Se infatti \emptyset appartenesse ad \mathbf{F}^* , risulterebbe $\emptyset = F_1 \cap \dots \cap F_m$ per qualche elemento F_1, \dots, F_m in \mathbf{F} , cosa che contraddirebbe l'ipotesi che \mathbf{F} goda della proprietà dell'intersezione finita.
- (2) Siano F_1, F_2 elementi di \mathbf{F}^* . Allora esistono elementi $G_1, \dots, G_k, H_1, \dots, H_m$ di \mathbf{F} tali che $F_1 \supseteq G_1 \cap \dots \cap G_k$ e $F_2 \supseteq H_1 \cap \dots \cap H_m$. Segue che $F_1 \cap F_2 \supseteq G_1 \cap \dots \cap G_k \cap H_1 \cap \dots \cap H_m$ e pertanto $F_1 \cap F_2 \in \mathbf{F}^*$.
- (3) Se G è uno zero-insieme contenente un elemento F' di \mathbf{F}^* , allora esistono elementi F_1, \dots, F_m in \mathbf{F} tali che $G \supseteq F' \supseteq F_1 \cap \dots \cap F_m$ e quindi $G \in \mathbf{F}^*$. Pertanto F' è uno z-filtro contenente \mathbf{F} .

Proviamo ora che un qualsiasi z-filtro \mathbf{F} è contenuto in uno z-ultrafiltro. Si consideri la famiglia \mathcal{F} composta da tutti gli z-filtri contenenti \mathbf{F} . Tale famiglia non è vuota, poichè contiene lo z-filtro \mathbf{F} , inoltre è parzialmente

ordinata dalla relazione di inclusione. Se $\dots \subseteq F_h \subseteq F_k \subseteq \dots$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di elementi di \mathcal{F} , si verifica facilmente che la loro unione è ancora un elemento di \mathcal{F} . È possibile pertanto applicare ad esso il Lemma di Zorn e concludere che esiste in \mathcal{F} un elemento massimale, che quindi risulta essere uno z-ultrafiltro contenente \mathbf{F} . \square

Esempi:

- (1) $\mathcal{F} = \{\text{zero-insiemi di } \mathbb{R} \text{ il cui complementare è finito}\}$. Ovviamente $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, allora $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, infatti $\mathbb{R} - (F_1 \cap F_2) = (\mathbb{R} - F_1) \cup (\mathbb{R} - F_2)$ che è limitato dato che $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Se inoltre $G \in Z(X)$ contiene F , allora $\mathbb{R} - G \subseteq \mathbb{R} - F$, $\mathbb{R} - G$ è limitato e pertanto \mathcal{F} è uno z-filtro.
- (2) Definiamo $\mathcal{A}_p = \{A \in Z(X) / p \in A\}$. Si può osservare che esso è uno z-ultrafiltro. Innanzitutto $\emptyset \notin \mathcal{A}_p$, perchè non contiene p . $\forall A, B \in \mathcal{A}_p$, la loro intersezione è uno zero-insieme che contiene ancora p , e quindi sta in \mathcal{A}_p . Inoltre, se $A \in \mathcal{A}_p$ e Z è uno zero-insieme che contiene A , sicuramente $p \in Z$ e quindi $Z \in \mathcal{A}_p$. Sappiamo quindi che \mathcal{A}_p è uno z-filtro, ci resta solo da provare che è massimale. Per assurdo sia \mathcal{B} uno z-filtro che contiene propriamente \mathcal{A}_p , allora esiste un elemento $B \in \mathcal{B}$ che non sta in \mathcal{A}_p , e quindi che non contiene p . Poichè X è completamente regolare, esiste una funzione $f \in C^*(X)$ che vale 0 su p e 1 sul chiuso B , che non contiene p . Allora $B \cap Z(f) = \emptyset$ e $Z(f) \in \mathcal{A}_p \subset \mathcal{B}$. Quindi, poichè anche $B \in \mathcal{B}$, risulta $\emptyset \in \mathcal{B}$, il che è in contraddizione col fatto che \mathcal{B} sia uno z-filtro. Quindi \mathcal{A}_p è uno z-ultrafiltro.
- (3) Se invece di considerare gli zero-insiemi di X contenenti un punto $p \in X$ si considerano gli zero-insiemi di X contenenti un sottoinsieme A di X si ottiene un esempio di z-filtro \mathcal{F}_A , in generale non massimale relativamente all'inclusione: infatti $\forall p \in A, \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{A}_p$.

L'operatore Z che ad ogni ideale I di $C(X)$ associa lo z-filtro $Z[I]$ può essere interpretato come una funzione fra l'insieme degli ideali di $C(X)$ e l'insieme degli z-filtri su X . Poichè, come subito si verifica, risulta $ZZ^{-1}[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$ per ogni z-filtro \mathcal{F} su X , si ha che $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ è controimmagine di \mathcal{F} mediante Z , pertanto Z è un'applicazione suriettiva. Risulta inoltre che $Z^{-1}Z[I] \supseteq I$ per ogni ideale I di $C(X)$.

Proviamo con un controesempio che non vale l'inclusione inversa. Si consideri $C(\mathbb{R})$ ed in esso l'ideale principale generato dall'identità i su \mathbb{R} . Esso è formato da tutte le funzioni f di $C(\mathbb{R})$ tali che $f(x) = xg(x)$ per un opportuno elemento g di $C(\mathbb{R})$. Poichè per ogni f di questo tipo risulta $f(0) = 0$, allora $0 \in Z[I]$ e dal momento che $Z(i) = \{0\}$, $Z[I]$ coincide con l'insieme degli zero-insiemi che contengono 0. Pertanto $Z^{-1}Z[I]$ coincide con l'insieme delle funzioni continue che si annullano in 0. Tuttavia esso è diverso da I . Consideriamo la funzione $i^{\frac{1}{3}} \in Z^{-1}Z[I]$. Se questa appartenesse ad I esisterebbe un funzione continua g tale che $i^{\frac{1}{3}} = gi$. Ma in questo

caso dovrei avere $g = i^{-\frac{2}{3}}$, che non è continua in 0. Allora I non contiene $Z^{-1}Z[I]$ e abbiamo dunque trovato un controesempio.

Possiamo ampliare il Teorema 2.4, focalizzando il caso particolare di ideali massimali col

TEOREMA 2.7.

- (1) Se M è un ideale massimale in $C(X)$, $Z[M]$ è uno z -ultrafiltro su X .
- (2) Se \mathcal{A} è uno z -ultrafiltro su X , $Z^{-1}[\mathcal{A}]$ è un ideale massimale in $C(X)$.

DIMOSTRAZIONE.

- (1) Per il Teorema 2.4, $Z[M]$ è uno z -filtro. Per assurdo esista uno z -filtro \mathcal{B} che lo contenga propriamente. Allora esisterebbe una funzione $f \in C(X)$ tale che $A = Z(f) \in \mathcal{B} - Z[M]$. Inoltre $M \subseteq Z^{-1}[Z[M]] \subseteq Z^{-1}[\mathcal{B}]$ e $f \in Z^{-1}[\mathcal{B}]$, ma $f \notin Z^{-1}[Z[M]]$ perchè $Z(f) \notin Z[M]$. $Z^{-1}[\mathcal{B}]$ è un ideale proprio che contiene M ed $f \notin M$, quindi M non può essere massimale.
- (2) Per assurdo $Z^{-1}[\mathcal{A}]$ non sia massimale, allora esisterebbe un ideale J tale che $Z^{-1}[\mathcal{A}] \subset J$ e quindi esiste una funzione continua f tale che $f \in J - Z^{-1}[\mathcal{A}]$ e quindi $Z(f) \notin \mathcal{A}$ e $Z(f) \in Z[J]$. Allora $\mathcal{A} = Z[Z^{-1}[\mathcal{A}]] \subseteq Z[J]$ e, poichè $Z[J]$ contiene lo zero-insieme $Z(f) \notin \mathcal{A}$, $Z[J]$ sarebbe uno z -filtro che contiene propriamente uno z -ultrafiltro, ma questo è assurdo. Quindi $Z^{-1}[\mathcal{A}]$ è massimale. □

Osserviamo che se I è un ideale massimale risulta ovviamente $Z^{-1}Z[I] = I$, pertanto Z è in biiezione fra l'insieme degli ideali massimali di $C(X)$ e l'insieme degli z -ultrafiltri su X .

Concludiamo ora con l'importante

TEOREMA 2.8.

- (a) Sia \mathcal{A} uno z -ultrafiltro su X . Se uno zero-insieme Z interseca ogni elemento di \mathcal{A} , allora $Z \in \mathcal{A}$.
- (b) Sia M un ideale massimale in $C(X)$. Se $Z(f)$ è uno zero-insieme che interseca ogni elemento di $Z[M]$, allora $f \in M$.
- (c) Se l'unione di due zero-insiemi appartiene ad uno z -ultrafiltro \mathcal{B} , allora almeno uno di essi appartiene a \mathcal{B} .
- (d) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due z -ultrafiltri distinti, allora esistono due zero-insiemi, appartenenti uno ad \mathcal{A} e l'altro a \mathcal{B} , la cui intersezione è vuota.

DIMOSTRAZIONE.

- (a) Sia Z uno zero-insieme che interseca ogni elemento di \mathcal{A} . Consideriamo la famiglia $\{Z \cap Z'/Z' \in \mathcal{A}\}$. Questa gode della

Università di Torino

proprietà dell'intersezione finita in quanto, preso un numero finito n di elementi della famiglia,

$$\bigcap_{j=1}^n (Z \cap Z'_j) = Z \cap \left(\bigcap_{j=1}^n Z'_j \right) \neq \emptyset$$

perchè $\left(\bigcap_{j=1}^n Z'_j \right) \in \mathcal{A}$ e Z interseca ogni elemento di \mathcal{A} .

Allora la famiglia $\{Z \cap Z'\}$ è contenuta in uno z -ultrafiltro \mathcal{B} . Poichè $Z' \supseteq Z \cap Z' \in \mathcal{B}$, necessariamente $Z' \in \mathcal{B} \forall Z' \in \mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e, poichè \mathcal{A} è uno z -ultrafiltro, devo avere $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Sappiamo anche che $Z \supseteq Z \cap Z' \in \mathcal{A}$ e quindi $Z \in \mathcal{A}$.

- (b) Per il Teorema 2.7, se M è un ideale massimale in $C(X)$, $Z[M]$ è uno z -ultrafiltro. Se lo zero-insieme $Z(f)$ interseca ogni elemento di $Z[M]$, per la dimostrazione precedente, $Z(f) \in Z[M]$. Ora, M è contenuto nell'ideale $Z^{-1}[Z[M]]$, che è massimale in $C(X)$, per cui deve coincidere con esso. Poichè $Z(f) \in Z[M]$, $f \in Z^{-1}[Z[M]] = M$ e quindi è soddisfatta la tesi.
- (c) Siano A e B due zero-insiemi la cui unione è contenuta nello z -ultrafiltro \mathcal{B} e, per assurdo, nessuno dei due appartenga a \mathcal{B} . Allora, per il punto (a) di questo teorema, dovrebbero esistere due zero-insiemi C e D in \mathcal{B} , tali che $A \cap C = \emptyset$ e $B \cap D = \emptyset$. Avremmo quindi $C \cap D, A \cup B \in \mathcal{B}$, cosa assurda perchè $(C \cap D) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Allora almeno uno tra A e B deve appartenere a \mathcal{B} .
- (d) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due z -ultrafiltri diversi tra loro. Allora esisterà un elemento $A \in \mathcal{A}$ che non appartiene a \mathcal{B} . Per il primo punto di questo teorema, sappiamo che se $A \notin \mathcal{B}$ deve esistere un $B \in \mathcal{B}$ disgiunto da A , e quindi abbiamo trovato i due zero-insiemi $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ la cui intersezione è vuota.

□

Osservazione. Lo z -filtro \mathcal{F} dell'esempio 1 non è uno z -ultrafiltro. Infatti $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$ sono due zero-insiemi la cui unione è \mathbb{R} . Ora $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, ma nessuno dei precedenti zero-insiemi ne fa parte.

3. Convergenza di z-filtri e ideali fissi

Assumiamo, d'ora in poi, che lo spazio X sia completamente regolare. Introduciamo quindi alcune importanti definizioni:

DEFINIZIONE 3.1. *Un punto p di uno spazio topologico X si dice punto di aderenza di uno z-filtro \mathcal{F} se ogni intorno di p ha intersezione non vuota con ogni elemento di \mathcal{F} .*

Poichè gli elementi di \mathcal{F} sono chiusi, p è un punto di aderenza per \mathcal{F} se e solo se $p \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

DEFINIZIONE 3.2. *Si dice che uno z-filtro \mathcal{F} converge al punto limite p se ogni intorno di p contiene un elemento di \mathcal{F} .*

Se \mathcal{F} è uno z-filtro convergente a p , ogni intorno di p contiene un elemento di \mathcal{F} , e quindi ha intersezione non vuota con ogni altro elemento dello z-filtro: risulta evidente che p è un punto di aderenza per \mathcal{F} .

Vediamo ora la

PROPRIETÀ 3.3. *Se uno z-filtro \mathcal{F} su X converge ad un punto p , allora $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{p\}$. Pertanto i punti di convergenza sono unici.*

DIMOSTRAZIONE. p è un punto di aderenza per \mathcal{F} e quindi $p \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Vogliamo dimostrare che l'intersezione si riduce a quell'unico punto. Per ogni $q \neq p$, poichè X è uno spazio di Hausdorff, esistono due intorni, U_p di p ed U_q di q , disgiunti tra loro. Se \mathcal{F} converge a p , esiste uno zero-insieme $Z \in \mathcal{F}$, contenuto in U_p . Risulterà quindi $Z \cap U_q \subseteq U_p \cap U_q = \emptyset$, ovvero $Z \cap U_q = \emptyset$. Quindi $q \notin Z \in \mathcal{F}$, per cui $q \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. \square

DEFINIZIONE 3.4. *Uno z-filtro \mathcal{F} è primo se, per ogni coppia F, G di zero-insiemi la cui unione appartiene ad \mathcal{F} , almeno uno tra F e G appartiene ad \mathcal{F} .*

Per il punto (c) del Teorema 2.8, gli z-ultrafiltri sono primi.

TEOREMA 3.5. *Siano X uno spazio topologico, x un punto di X ed \mathcal{F} uno z-filtro primo su X . Sono equivalenti:*

- (a) x è un punto di aderenza per \mathcal{F} ,
- (b) \mathcal{F} converge ad x ,
- (c) $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{x\}$

DIMOSTRAZIONE.

(a) \Rightarrow (b)

Prendiamo un generico intorno di x , U_x . Per il corollario 1.8, questo intorno contiene uno zero-insieme V intorno di x che, poichè X è completamente regolare, contiene un cozero-insieme intorno di x della forma $X - Z$, dove Z è uno zero-insieme. Poichè $X - Z \subset V$, $V \cup Z = X \in \mathcal{F}$. Allora o V o Z appartengono ad \mathcal{F} , perchè è uno z-filtro primo. Poichè $x \notin Z$, Z non può appartenere allo z-filtro, e quindi $V \in \mathcal{F}$. Allora \mathcal{F} converge ad x .

(b) \Rightarrow (c)

Vale per la proprietà 3.3.

(c) \Rightarrow (a)

Questa implicazione è ovvia. \square

PROPRIETÀ 3.6. *p è un punto di aderenza per uno z -filtro \mathcal{F} se e soltanto se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_p$. Inoltre \mathcal{A}_p è l'unico z -ultrafiltro convergente a p e se $p \neq q$ risulta $\mathcal{A}_p \neq \mathcal{A}_q$. Esiste cioè una biiezione fra X e l'insieme $\{\mathcal{A}_x\}_{x \in X}$ degli z -ultrafiltri convergenti.*

DIMOSTRAZIONE. p è un punto di aderenza per \mathcal{F} se e solo se $p \in F, \forall F \in \mathcal{F}$, ovvero se e solo se $F \in \mathcal{A}_p, \forall F \in \mathcal{F}$.

Per il corollario 1.8, \mathcal{A}_p converge a p , perchè ogni intorno di p contiene un elemento di \mathcal{A}_p . Sia \mathcal{F} uno z -ultrafiltro convergente a p , allora p è un suo punto di aderenza, per cui $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_p$ e, per la massimalità di \mathcal{F} , devo avere necessariamente $\mathcal{F} = \mathcal{A}_p$.

Se $p \neq q$ risulta $\mathcal{A}_p \neq \mathcal{A}_q$ perchè se si avesse $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$, tale z -ultrafiltro convergerebbe a due punti distinti contro la Proprietà 3.3. \square

DEFINIZIONE 3.7. *Sia I un ideale di $C(X)$. Se $\bigcap_{f \in I} Z(f) \neq \emptyset$, diciamo che I è un ideale fisso. Se invece $\bigcap_{f \in I} Z(f) = \emptyset$, chiamiamo I libero.*

Ci interesserà studiare gli ideali fissi massimali degli anelli $C(X)$.

TEOREMA 3.8. *Gli ideali fissi massimali in $C(X)$ sono tutti gli insiemi*

$$(2) \quad M_p = \{f \in C(X) / f(p) = 0\} \quad \text{dove } p \in X$$

Per ciascun punto $p \in X$, il quoziente $C(X)|_{M_p}$ è isomorfo al campo dei reali, \mathbb{R} , in più esiste una biiezione tra X e l'insieme $\{M_p\}_{p \in X}$.

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo il generico $p \in X$ e consideriamo la funzione $\phi : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, che associa ad f $\phi(f) = f(p)$. ϕ è un omomorfismo di anelli perchè:

- (i) $\phi(f + g) = (f + g)(p) = f(p) + g(p) = \phi(f) + \phi(g)$
- (ii) $\phi(f \cdot g) = (f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p) = \phi(f) \cdot \phi(g)$

Il nucleo di ϕ è $\ker \phi = \{f \in C(X) / \phi(f) = 0\} = \{f \in C(X) / f(p) = 0\} = M_p$ e quindi M_p è un ideale. Inoltre ϕ è suriettiva, perchè $\forall r \in \mathbb{R}$, esiste la funzione costante e_r tale che $\phi(e_r) = e_r(p) = r$.

Per il teorema fondamentale degli anelli, il quoziente $C(X)|_{\ker \phi} = C(X)|_{M_p}$ è isomorfo all'immagine di $C(X)$ mediante ϕ , cioè ad \mathbb{R} . Allora, per la proprietà 2.1, M_p è un ideale massimale.

Viceversa, se è M un ideale massimale fisso in $C(X)$, per sua definizione esiste un elemento $p \in \bigcap_{g \in M} Z(g)$, e quindi $M \subseteq M_p$ perchè $\forall f \in M, f(p) = 0$. Ma, per la massimalità di M , devo avere la coincidenza $M = M_p$. Poichè X è uno spazio completamente regolare, presi due punti $p \neq q$ in esso, $\{q\}$ è un chiuso che non contiene p e quindi esiste una funzione

$f \in C^*(X)$ tale che $f(p) = 1$ e $f(\{q\}) = \{0\}$. Allora $\{p\}$ e $\{q\}$ sono completamente separati, per cui esistono due zero-insiemi disgiunti, $Z(h)$ e $Z(k)$, tali che $p \in Z(h)$ e $q \in Z(k)$. Poichè $p \in Z(h)$ e $p \notin Z(k)$, $h \in M_p$ ed $h \notin M_q$, analogamente $k \in M_q$ e $k \notin M_p$, per cui $M_p \neq M_q$. Posso quindi stabilire una biiezione tra $\{M_p\}_{p \in X}$ ed X , che associa univocamente ad ogni $p \in M_p$. \square

Introduciamo ora un'altra

DEFINIZIONE 3.9. *Uno z-filtro si dice fisso se l'intersezione dei suoi elementi è non vuota, libero se è vuota.*

\mathcal{A}_p è uno di z-ultrafiltro fisso, perchè converge al punto p .

Diamo ora un esempio di z-filtro libero. Sia \mathbb{N} con la topologia discreta. Prendiamo $\mathcal{F} = \{\mathbb{N} \text{ meno un numero finito di punti}\}$: si tratta di una famiglia di zero-insiemi perchè per ogni suo elemento si può prendere una funzione che vale 0 su di esso ed 1 altrove, questa risulta continua perchè tutte le funzioni su uno spazio discreto sono continue. Inoltre questa famiglia gode della proprietà dell'intersezione finita e per la 2.6 è contenuta in uno z-ultrafiltro, che indichiamo con \mathcal{U} . Per assurdo questo sia fisso e quindi abbia un punto di convergenza u , allora $u \in U \forall U \in \mathcal{U}$, ma $u \notin \mathbb{N} - \{u\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, il che è assurdo. Allora \mathcal{U} è libero.

Possiamo osservare che un ideale I in $C(X)$ è fisso se e solo se $Z[I]$ è fisso.

Dalla definizione di punto di aderenza data all'inizio del paragrafo, deriva la

PROPRIETÀ 3.10. *Uno z-filtro \mathcal{F} è fisso se e solo se ha almeno un punto di aderenza.*

Dimosteremo ora il teorema più importante di questo primo capitolo

TEOREMA 3.11. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*

- (a) X è compatto.
- (b) Ogni famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.
- (c) Ogni famiglia di zero-insiemi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.
- (d) Ogni z-filtro ammette un punto di aderenza.
- (e) Ogni z-ultrafiltro è convergente.

DIMOSTRAZIONE.

(a) \Rightarrow (b)

Sia $\mathcal{F} = \{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita. Per assurdo sia $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, allora $X = X - \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X - C_i)$: abbiamo un ricoprimento aperto di X e, per la compattezza,

possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $\{X - C_{i_j}\}_{j=1..n}$, $n \in \mathbb{N}$. Risulta dunque $X = \bigcup_{i \in I, j=1..n} (X - C_{i_j}) = X - \bigcap_{i \in I, j=1..n} C_{i_j}$ ma, poichè \mathcal{F} gode della proprietà dell'intersezione finita, $\bigcap_{i \in I, j=1..n} C_{i_j} \neq \emptyset$ ed $X = X - \bigcap_{i \in I, j=1..n} C_{i_j}$ sarebbe strettamente contenuto in X , il che è assurdo.

(b) \Rightarrow (c)

Vale perchè gli zero-insiemi sono dei chiusi.

(c) \Rightarrow (d)

Ogni z-filtro \mathcal{F} gode della proprietà dell'intersezione finita quindi, per ipotesi, esiste un punto $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, che sarà punto di aderenza per \mathcal{F} .

(d) \Rightarrow (e)

Uno z-ultrafiltro è uno z-filtro, quindi ammette un punto di aderenza per ipotesi. Poichè gli z-ultrafiltri convergono ai propri punti di aderenza, ogni z-ultrafiltro risulta essere convergente sotto l'ipotesi del punto (d).

(e) \Rightarrow (d)

Uno z-filtro \mathcal{A} è sempre contenuto in uno z-ultrafiltro \mathcal{B} . \mathcal{B} converge ad un punto p per ipotesi, allora p è un punto di aderenza per \mathcal{B} e quindi per \mathcal{A} in quanto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

(d) \Rightarrow (c)

Sia \mathcal{B} una famiglia di zero-insiemi che gode della proprietà dell'intersezione finita, per la proprietà 2.6, \mathcal{B} è contenuta in uno z-ultrafiltro \mathcal{F} , che è uno z-filtro e quindi, per ipotesi, ammette un punto di aderenza. Esiste quindi un punto $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, che soddisfa anche $y \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ in quanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

(c) \Rightarrow (b)

Sia $C = \{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita. Poichè i cozero-insiemi formano una base per gli aperti, ogni C_i si può scrivere come intersezione di zero-insiemi, ovvero $C_i = \bigcap_{j \in J} Z_{i_j}$. Consideriamo la famiglia $Z = \{Z_{i_j}\}$: essa gode della proprietà dell'intersezione finita in quanto ne gode la famiglia C , i cui elementi si ottengono per intersezione degli elementi di Z . Allora, per il punto (c), esiste un punto $x \in \bigcap Z_{i_j}$ e quindi $x \in \bigcap C_i$, poichè $\bigcap C_i = \bigcap Z_{i_j}$.

(b) \Rightarrow (a)

Per assurdo esista un ricoprimento aperto di X , $R = \{A_j\}_{j \in J}$, privo di sottoricoprimenti finiti. $\{X - A_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di chiusi. Prendendone un numero finito n , $\{X - A_{j_i}\}_{i=1..n}$, troviamo che $(X - A_{j_1}) \cap \dots \cap (X - A_{j_n}) = X - (A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n}) \neq \emptyset$ perchè, se così non fosse, $A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_n} = X$ e quindi avremmo estratto un sottoricoprimento finito da R , cosa che negherebbe l'ipotesi di assurdo.

Allora $\{X - A_j\}$ è una famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita, e quindi ha intersezione non vuota. Perciò $\emptyset \neq \bigcap_{j \in J} (X - A_j) = X - \bigcup_{j \in J} A_j$ e quindi R non può essere un ricoprimento di X . \square

Abbiamo trovato che, se X è compatto, ogni z-ultrafiltro converge e
 Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica

quindi, per il Teorema 3.5, esso è fisso. Allora anche tutti gli ideali massimali in $C(X)$ sono fissi.

Esiste dunque una corrispondenza biunivoca tra i punti di X e l'insieme degli ideali massimali in $C(X)$ per il Teorema 3.8.

CAPITOLO 2

C^* -immersione

1. La compattizzazione di Stone Čech

Consideriamo uno spazio topologico X completamente regolare. Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare gli spazi T in cui X è denso e C^* -immerso.

Di fondamentale importanza sarà la seguente

DEFINIZIONE 1.1. *Una compattizzazione di uno spazio topologico X è uno spazio compatto T , con un'immersione $e : X \rightarrow T$, per cui $e[X]$ è denso in T .*

Definiremo più avanti uno spazio βX , detto 'Compattizzazione di Stone Čech', che scopriremo poi essere il più grande spazio in cui X è denso e C^* -immerso. Inoltre questo spazio è compatto.

Per prima cosa generalizziamo alcune delle definizioni date nel paragrafo 1.3 ad uno spazio T in cui X sia denso.

DEFINIZIONE 1.2. *Siano X un sottospazio denso in uno spazio topologico T e \mathcal{F} uno z -filtro su X . Un punto $p \in T$ è un punto di aderenza per \mathcal{F} se ogni intorno di p in T interseca ogni elemento di \mathcal{F} .*

DEFINIZIONE 1.3. *Siano X un sottospazio denso in uno spazio topologico T e \mathcal{F} uno z -filtro su X . Si dice che \mathcal{F} converge al punto limite $p \in T$ se ogni intorno di p contiene un elemento di \mathcal{F} .*

Ovviamente anche in questo caso un punto di convergenza è un punto di aderenza.

PROPRIETÀ 1.4. *Sia X un sottospazio denso in uno spazio topologico T , sia Z uno zero-insieme di X ed $x \in cl_T Z$. Allora esiste uno z -ultrafiltro \mathcal{F} su X tale che x è punto limite per \mathcal{F} e $Z \in \mathcal{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la famiglia $\{U_x\}$ degli intorni di x in T che sono anche zero-insiemi in T . Tale famiglia non è vuota perchè ogni intorno di x contiene uno zero-insieme intorno di x . Ogni $U_x \cap X$ è ovviamente uno zero-insieme su X , non vuoto in quanto X è denso in T .

La famiglia $\{U_x \cap X, Z\}$ è una famiglia di zero-insiemi in X che gode della proprietà dell'intersezione finita. Si osservi infatti che $U_x \cap X \cap Z = U_x \cap Z \neq \emptyset$ dato che x appartiene alla chiusura di Z in T . Per lo stesso motivo anche $(U_x \cap X) \cap (V_x \cap X) = U_x \cap V_x \cap X$ è non vuoto. La precedente famiglia è

allora contenuta in uno z -ultrafiltro \mathbf{F} che quindi contiene Z e converge ad x . Infatti ogni intorno V_x di x in T contiene uno zero-insieme W_x intorno di x in T . Pertanto $V_x \supseteq W_x \supseteq W_x \cap X$, che è un elemento di \mathbf{F} \square

Poichè X è uno zero-insieme, prendendo $Z = X$ segue il

COROLLARIO 1.5. *Se X è denso in T , ogni punto di T è punto limite di uno z -ultrafiltro di X .*

Indichiamo ora con βX l'insieme di tutti gli z -ultrafiltri su X e consideriamo l'applicazione di X in βX così definita:

$$(3) \quad \begin{aligned} e : X &\rightarrow \beta X \\ x &\rightarrow e(x) = \mathcal{A}_x = \{A \in Z(X) / x \in A\} \end{aligned}$$

TEOREMA 1.6. *βX ed e soddisfano le seguenti proprietà:*

- (a) $\mathcal{B} = \{\{p \in \beta X / A \notin p\}, A \in Z(X)\}$ è base di una topologia su βX .
- (b) βX è uno spazio di Hausdorff
- (c) βX è compatto
- (d) e è iniettiva
- (e) $\forall A \in Z(X)$ si ha $e[X - A] = e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\}$
- (f) L'applicazione e è un'immersione topologica di X in βX
- (g) $cl_{\beta X} e[A] = \{p \in \beta X / A \in p\}$ $A \in Z(X)$
- (h) $cl_{\beta X} e[X] = \beta X$
- (i) $p = \{A \in Z(X) / p \in cl_{\beta X} e[A]\}$ $p \in \beta X$
- (l) $cl_{\beta X} e[A \cap B] = cl_{\beta X} e[A] \cap cl_{\beta X} e[B]$ $\forall A, B \in Z(X)$

DIMOSTRAZIONE.

- (a) Dati due zero-insiemi A_1 ed A_2 in X , consideriamo gli elementi $\{p \in \beta X / A_1 \notin p\}$ e $\{p \in \beta X / A_2 \notin p\}$ di \mathcal{B} . Allora

$$\begin{aligned} \{p \in \beta X / A_1 \notin p\} \cap \{p \in \beta X / A_2 \notin p\} &= \{p \in \beta X / A_1 \notin p \text{ e } A_2 \notin p\} \\ &= \{p \in \beta X / A_1 \cup A_2 \notin p\} \end{aligned}$$

perchè p è uno z -ultrafiltro e, se l'unione di due zero-insiemi sta in p , almeno uno dei due deve stare in p per il Teorema 2.8.c.

Poichè $A_1 \cup A_2$ è ancora uno zero-insieme, $\{p \in \beta X / A_1 \cup A_2 \notin p\}$ appartiene a \mathcal{B} e quindi troviamo che l'intersezione di due elementi di \mathcal{B} è unione di elementi di \mathcal{B} , e quindi \mathcal{B} è base di una topologia su βX .

- (b) Siano p e q due elementi distinti in βX . Per il Teorema 2.8.b esistono due zero-insiemi disgiunti, $A = Z(f)$ e $B = Z(g)$ appartenenti rispettivamente agli z -ultrafiltri p e q .

Voglio dimostrare che esistono due zero-insiemi $C, D \in Z(X)$ tali

che $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ e $C \cup D = X$. Considero ora le funzioni h e k così definite:

$$h = \sup\left\{\frac{g^2}{g^2 + f^2}, \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad k = \sup\left\{\frac{f^2}{g^2 + f^2}, \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$$

Poichè $A \cap B = \emptyset$, f e g non si annullano mai contemporaneamente, quindi $Z(f^2 + g^2) = \emptyset$ ed h e k risultano essere ben definite su X . Poniamo $C = Z(h)$ e $D = Z(k)$.

Se $x \in A$, allora $f(x) = 0$ e quindi $h = \frac{1}{2}$ e $x \notin C$, analogamente si trova che, se $x \in B$, $x \notin D$.

Inoltre sappiamo che $C \cup D \subseteq X$: ci resta quindi da dimostrare che vale l'inclusione inversa.

$\forall x \in X$ possiamo avere $f^2(x) \geq g^2(x)$ oppure $f^2(x) \leq g^2(x)$: nel primo caso avremmo $h(x) = 0$, e quindi $x \in C$, mentre nel secondo $k(x) = 0$ e quindi $x \in D$. Allora vale anche l'inclusione $X \subseteq C \cup D$ e quindi $X = C \cup D$.

Prendendo a questo punto i due insiemi $\{l \in \beta X / C \notin l\}$ e $\{l \in \beta X / D \notin l\}$, che sono aperti per la topologia su βX descritta nel punto precedente, si ha che $p \in \{l \in \beta X / C \notin l\}$ perchè, se C appartenesse a p risulterebbe $A \cap C \neq \emptyset$, il che abbiamo visto essere falso. Analogamente osserviamo che $q \in \{l \in \beta X / D \notin l\}$.

Inoltre questi aperti sono disgiunti perchè:

$$\begin{aligned} \{l \in \beta X / C \notin l\} \cap \{l \in \beta X / D \notin l\} &= \\ &= \{l \in \beta X / C \cup D \notin l\} = \{l \in \beta X / X \notin l\} = \emptyset \end{aligned}$$

perchè X appartiene ad ogni z -filtro, e quindi ad ogni z -ultrafiltro.

- (c) Per dimostrare che βX è compatto, usiamo l'equivalenza tra i punti (a) e (b) del Teorema 3.11: se ogni famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota, allora X è compatto.

Ci basta considerare una famiglia di chiusi complementari di aperti della base, perchè possiamo ottenere da questi tutti gli altri chiusi per intersezione.

Consideriamo quindi la famiglia $\mathcal{F} = \{\{p \in \beta X / A_i \in p\} / i \in I \text{ ed } A_i \in Z(X)\}$ che gode della proprietà dell'intersezione finita e proviamo che la famiglia $\{A_i / i \in I\}$ gode della proprietà dell'intersezione finita. Siano A_{i_1}, \dots, A_{i_n} n suoi elementi: poichè \mathcal{F} gode della proprietà dell'intersezione finita, esisterà uno z -ultrafiltro $t \in \{p \in \beta X / A_{i_1} \in p\} \cap \dots \cap \{p \in \beta X / A_{i_n} \in p\}$ e quindi avremo che $A_{i_1} \in t, \dots, A_{i_n} \in t$ e, per definizione di z -filtro, $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \in t$ e quindi $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$.

Allora la famiglia $\{A_i / i \in I\}$ gode della proprietà dell'intersezione finita e, per la proprietà 2.6, è contenuta in uno z -ultrafiltro q .

Allora $q \in \bigcap_{B \in \mathcal{q}} \{p \in \beta X / B \in p\} \subseteq \bigcap_{i \in I} \{p \in \beta X / A_i \in p\} \neq \emptyset$, e quindi βX risulta essere compatto.

- (d) Siano x ed y due punti distinti dello spazio X . Poichè X è T_1 , $\{y\}$ è un chiuso che non contiene x e, poichè X è completamente regolare, esiste $f \in C^*(X)$ tale che $f(x) = 0$ e $f(\{y\}) = \{1\}$. Allora $\{x\}$ ed $\{y\}$ sono completamente separati e, per la proprietà 1.7, esistono due zero-insiemi $Z(h)$ e $Z(k)$ disgiunti tali che $x \in Z(h)$ ed $y \in Z(k)$.

Allora $Z(h) \in \mathcal{A}_x$ e $Z(k) \in \mathcal{A}_y$ con $Z(h) \notin \mathcal{A}_y$. Abbiamo quindi $e(x) \neq e(y)$ e quindi e risulta essere iniettiva.

- (e) Sia $A \in Z(X)$, consideriamo $e[X - A]$. Per ogni $r \in e[X - A]$ esiste un y appartenente ad X ma non ad A per cui $r = e(y)$. Poichè $y \notin A$ segue che $A \notin r = \mathcal{A}_y$ e quindi $r \in \{p \in \beta X / A \notin p\}$.

Quindi $r \in e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\} \forall r \in e[X - A]$ da cui $e[X - A] \subseteq e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\}$.

Ci resta da dimostrare l'inclusione inversa.

Se $z \in e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\}$, allora $z = e(x)$ per un opportuno $x \in X$ ed $A \notin z$. Quindi $x \notin A$ e $z \in e[X - A]$, per cui è verificata la doppia inclusione.

- (f) Poichè sappiamo che e è iniettiva per il punto (d) di questo teorema, $e : X \rightarrow e[X]$ è una biiezione.

Definiamo su $e[X]$ la topologia in cui gli aperti sono le immagini degli aperti di X mediante e . In questo modo $e[X]$ è omeomorfo ad X : infatti e è aperta e, per l'iniettività, abbiamo che, per ogni aperto $e[A]$ di $e[X]$, immagine di un opportuno aperto A di X , $e^{-1}(e(A)) = A$ e quindi sappiamo che e è anche continua: poichè è una biiezione continua ed aperta, si tratta di un omeomorfismo. Abbiamo quindi in $e[X]$ la topologia trasportata da e e quella indotta da βX . Vogliamo dimostrare che queste due coincidono. Prendendo

$A \in Z(X)$, $X - A \in C_z(X)$. Per il Teorema 1.5, i cozero-insiemi sono una base per gli aperti di X , e quindi gli insiemi $e[X - A]$ descrivono una base per la topologia di $e[X]$, in quanto essa è omeomorfa a quella di X .

Nella topologia indotta da βX su $e[X]$, invece, gli aperti della base sono gli insiemi del tipo $e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\}$. Per il punto (e) di questo teorema sappiamo che $e[X] \cap \{p \in \beta X / A \notin p\} = e[X - A]$, perciò le basi delle due topologie coincidono e quindi anche le due topologie. Quindi e è un omeomorfismo che trasporta su $e[X]$ la stessa topologia indotta da βX e quindi e è un'immersione topologica di X in βX .

- (g) Sia $A \in Z(X)$. Per ogni $r \in e[A]$, $r = e(a)$ per un $a \in A$ opportuno. Poichè $r = e(a) = \{Z \in Z(X) / a \in Z\}$, risulta che $A \in r$

e quindi che $r \in \{p \in \beta X/A \in p\}$. $\{p \in \beta X/A \in p\}$ è chiuso perchè complementare di un aperto della base di βX e quindi $cl_{\beta X}e[A] \subseteq \{p \in \beta X/A \in p\}$ perchè la chiusura di un insieme è il più piccolo chiuso che contiene l'insieme stesso. Vogliamo ora verificare l'inclusione inversa.

Per assurdo esista un $\bar{p} \in \{p \in \beta X/A \in p\}$ che non sta nella chiusura di $e[A]$ in βX . Allora esiste un intorno $U_{\bar{p}}^{\beta X}$ di \bar{p} in βX che ha intersezione vuota con $e[A]$. Quindi esisterà un aperto della base contenente \bar{p} e contenuto in $U_{\bar{p}}^{\beta X}$ del tipo $\{t \in \beta X/B \notin t\}$, che ovviamente sarà disgiunto da $e[A]$.

Avremo quindi $\bar{p} \in \{t \in \beta X/B \notin t\}$ con $\{t \in \beta X/B \notin t\} \cap e[A] = \emptyset$, perciò $e[A]$ è contenuto nel complementare di $\{t \in \beta X/B \notin t\}$. Poichè $A \subseteq X$, $e[A] \subseteq e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\}$. Dimostriamo ora che $e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\} = e[B]$, usando la doppia inclusione.

Sia s un punto dell'intersezione $e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\}$, allora esiste un $x \in X$ tale che $s = e(x) = \{C \in Z(X)/x \in C\}$ ed $s \in \{t \in \beta X/B \in t\}$.

Allora $B \in s = e(x)$ e quindi $x \in B$. Ne risulta che $s \in e[B]$ e quindi vale l'inclusione $e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\} \subseteq e[B]$.

Sia ora $\mathcal{A}_p \in e[B]$ una generica immagine di un punto $p \in B$, \mathcal{A}_p è uno z -ultrafiltro formato dagli zero-insiemi che contengono p . Allora $B \in \mathcal{A}_p$, perciò $\mathcal{A}_p \in \{t \in \beta X/B \in t\}$ e quindi $e[B] \subseteq e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\}$, da cui risulta l'uguaglianza $e[X] \cap \{t \in \beta X/B \in t\} = e[B]$.

Allora $e[A] \subseteq e[B]$ e, per la biettività di e tra X ed $e[X]$, dobbiamo avere $A \subseteq B$ ma, poichè $A \in \bar{p}$, dobbiamo avere che $B \in \bar{p}$ perchè \bar{p} è uno z -ultrafiltro, il che è assurdo perchè abbiamo detto prima che $\bar{p} \in \{t \in \beta X/B \notin t\}$.

Allora vale l'inclusione inversa e $cl_{\beta X}e[A] = \{p \in \beta X/A \in p\}$.

(h) Per il punto precedente, $cl_{\beta X}e[X] = \{p \in \beta X/X \in p\} = \beta X$ perchè X è contenuto in tutti gli z -filtri e quindi anche in tutti gli z -ultrafiltri. Segue che X è denso in βX

(i) Poichè per ogni $A \in Z(X)$ $cl_{\beta X}e[A] = \{p \in \beta X/A \in p\}$, se A è uno zero-insieme contenuto in p , $p \in cl_{\beta X}e[A]$ e quindi $\forall p \in \beta X$ vale l'inclusione $p \supseteq \{A \in Z(X)/p \in cl_{\beta X}e[A]\}$.

Inoltre, se A è uno zero-insieme tale che $p \in cl_{\beta X}e[A]$, A deve stare in p per il punto (g). Vale così la doppia inclusione e quindi l'uguaglianza.

(l) Siano $A, B \in Z(X)$ due zero-insiemi qualunque.

$p \in cl_{\beta X}[A \cap B]$ se e solo se $A \cap B \in p$ ma, poichè p è uno z -filtro, $A \cap B \in p$ se e solo se $A \in p$ e $B \in p$, il che vale se e solo se $p \in cl_{\beta X}e[A]$ e $p \in cl_{\beta X}e[B]$, ovvero se $p \in cl_{\beta X}e[A] \cap cl_{\beta X}e[B]$.

□

Poichè X è immerso topologicamente in βX mediante e e $cl_{\beta X}e[X] = \beta X$, allora X è denso in βX (a meno di omeomorfismo con $e[X]$).

Per semplicità di notazione, continueremo ad indicare con X la sua immersione $e[X]$ in βX .

Per dimostrare che X è C^* -immerso in βX ci serviamo dell'importante

TEOREMA 1.7. *Siano X e T due spazi topologici completamente regolari con X denso in T . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (a) *Ogni funzione continua f da X in uno spazio compatto Y ammette un'estensione g , anch'essa continua, da T in Y .*
- (b) *X è C^* -immerso in T .*
- (c) *Ogni coppia di zero-insiemi di X disgiunti ha chiusure disgiunte in T , ovvero $\forall Z_1, Z_2 \in Z(X)$ con $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, risulta $cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2 = \emptyset$*
- (d) *Per ogni coppia Z_1, Z_2 di zero-insiemi in X risulta $cl_T(Z_1 \cap Z_2) = cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$*
- (e) *Ogni punto di T è punto limite per un unico z -ultrafiltro su X*

DIMOSTRAZIONE.

(a) \Rightarrow (b)

Sia f una generica funzione in $C^*(X)$, essa è continua ed ha immagine $f[X]$ contenuta in un intervallo chiuso $[a, b]$, che è un compatto di \mathbb{R} . Per il punto (a), ammette un'estensione continua g da T in $[a, b]$ e quindi $g \in C^*(T)$. Questo vale $\forall f \in C^*(X)$ e quindi X è C^* -immerso in T .

(b) \Rightarrow (c)

Siano Z_1 e Z_2 due zero-insiemi di X disgiunti. Per la proprietà 1.7, Z_1 e Z_2 sono completamente separati. Allora esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f[Z_1] = \{0\}$ ed $f[Z_2] = \{1\}$. Per ipotesi vale il punto (b) e quindi esiste una funzione $g \in C^*(T)$ che estende f . Allora $Z_1 \subseteq f^{-1}(\{0\})$ e quindi $cl_T Z_1 \subseteq cl_T[f^{-1}(\{0\})] \subseteq cl_T[g^{-1}(\{0\})] = g^{-1}(\{0\})$. Analogamente, poichè $Z_2 \subseteq f^{-1}(\{1\})$, troviamo che $cl_T Z_2 \subseteq g^{-1}(\{1\})$, da cui deduciamo che $cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2 = \emptyset$.

(c) \Rightarrow (d)

È sempre vero che $cl_T(Z_1 \cap Z_2) \subseteq cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$. Dobbiamo dimostrare che $x \notin cl_T(Z_1 \cap Z_2)$ implica $x \notin cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$. Poichè $x \notin cl_T(Z_1 \cap Z_2)$ esiste un intorno C di x in T disgiunto da $Z_1 \cap Z_2$. Per il corollario 1.8 possiamo supporre che C sia uno zero-insieme in T . Pertanto $C \cap X$ è uno zero-insieme su X . Allora $C \cap X \cap Z_1 = C \cap Z_1$ e $C \cap X \cap Z_2 = C \cap Z_2$ sono due zero-insiemi disgiunti su X , quindi per il punto (c) anche $cl_T(C \cap Z_1) \cap cl_T(C \cap Z_2) = \emptyset$ e quindi $x \notin cl_T(C \cap Z_1) \cap cl_T(C \cap Z_2)$. Pertanto x non appartiene ad almeno uno dei due insiemi. Sia $x \notin cl_T(C \cap Z_1)$ (per $x \notin cl_T(C \cap Z_2)$ il discorso è analogo). Allora deve esistere un intorno di x in T , U_x^T , per cui $U_x^T \cap C \cap Z_1 = \emptyset$. Ma $U_x^T \cap C$ è un intorno di x in T e quindi $x \notin cl_T Z_1$, e quindi $x \notin cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$.

(d) \Rightarrow (e)

Per il corollario 1.5 sappiamo che ogni punto di T è punto limite per almeno uno z-ultrafiltro su X . Vogliamo dimostrare che questo è unico. Per assurdo esista un punto x a cui convergono due z-ultrafiltri distinti \mathcal{A} e \mathcal{B} , allora per il Teorema 2.8 possiamo trovare uno zero-insieme $Z_1 \in \mathcal{A}$ ed uno $Z_2 \in \mathcal{B}$ disgiunti tra loro. Per la condizione (d) sappiamo che $cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2 = cl_T(Z_1 \cap Z_2) = cl_T \emptyset = \emptyset$. Ma, poichè \mathcal{A} converge a x , $x \in cl_T A, \forall A \in \mathcal{A}$ e, poichè \mathcal{B} converge ad x , $x \in cl_T B, \forall B \in \mathcal{B}$, allora $x \in cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$, il che è assurdo. Allora ogni $x \in T$ è punto limite di un solo z-ultrafiltro su X .

(e) \Rightarrow (a)

Sia f una funzione continua da X allo spazio compatto Y , vogliamo trovare una funzione continua $g : T \rightarrow Y$ tale che la sua restrizione ad X sia $g|_X = f$. Sia $x \in T$. Per ipotesi, esiste uno ed un solo z-ultrafiltro \mathcal{A} su X convergente ad x .

Definiamo la famiglia di zero-insiemi: $f^\#(\mathcal{A}) = \{E \in Z(Y) / f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Per prima cosa osserviamo che $f^\#(\mathcal{A})$ è uno z-filtro primo su Y .

- i) Se $\emptyset \in f^\#(\mathcal{A})$, allora $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$, cosa impossibile perchè \mathcal{A} è uno z-filtro: quindi $\emptyset \notin f^\#(\mathcal{A})$.
- ii) Siano $E, F \in f^\#(\mathcal{A})$, allora $E, F \in Z(Y)$ con $f^{-1}(E), f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$. Poichè $E \cap F \in Z(Y)$ e $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, anche $E \cap F \in f^\#(\mathcal{A})$.
- iii) Siano $H \in f^\#(\mathcal{A})$ e G due zero-insiemi di Y con $H \subseteq G$. Poichè $f^{-1}(H) \in \mathcal{A}$ e $f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G)$, basta dimostrare che $f^{-1}(G)$ sia uno zero-insieme di X per provare che $G \in f^\#(\mathcal{A})$. $G \in Z(Y)$, quindi esiste una funzione $h \in C(Y)$ tale che $Z(h) = G$. Inoltre $y \in f^{-1}(G)$ se e solo se $f(y) \in G$, ovvero se e solo se $h(f(y)) = 0$. Allora $f^{-1}(G) = Z(h \circ f)$ e quindi è uno zero-insieme.
- iv) Siano E ed F due zero-insiemi tali che $E \cup F \in f^\#(\mathcal{A})$. Allora $f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) = f^{-1}(E \cup F) \in \mathcal{A}$. Poichè \mathcal{A} è uno z-ultrafiltro, $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ oppure $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, ovvero o $E \in f^\#(\mathcal{A})$ o $F \in f^\#(\mathcal{A})$ e quindi $f^\#(\mathcal{A})$ è primo.

Poichè Y è compatto, per l'equivalenza 3.11.d, $f^\#(\mathcal{A})$ ammette un unico punto di aderenza che, per il Teorema 3.5, è l'unico punto in comune ai suoi elementi.

Definiamo quindi la funzione g associando ad ogni $x \in T$

$$(4) \quad \{g(x)\} = \bigcap_{A \in f^\#(\mathcal{A})} A$$

dove \mathcal{A} è lo z-ultrafiltro convergente ad x .

Vogliamo dimostrare che la g così definita estende la funzione f di partenza. $\forall x \in X$, x è punto di aderenza per il solo z-ultrafiltro \mathcal{A} , e quindi ogni intorno U_x^T di x ha intersezione non vuota con ogni elemento $A \in \mathcal{A}$. Allora

Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica

$\forall U_x^T, \forall A \in \mathcal{A}, U_x^T \cap X \cap A \neq \emptyset$, ma $U_x^T \cap X$ è un intorno di x in X , che indico con U_x^X . Dunque $U_x^X \cap A \neq \emptyset$ per ogni intorno U_x^X di x in X e quindi $x \in cl_X A \forall A \in \mathcal{A}$ e $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. $\forall E \in f^\#(\mathcal{A}), f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, di conseguenza sappiamo che $x \in f^{-1}(E)$ e $f(x) \in E$. Allora $\forall E \in f^\#(\mathcal{A}), f(x) \in \bigcap_{E \in f^\#(\mathcal{A})} E = \{g(x)\}$ da cui necessariamente $f(x) = g(x)$.

Ci resta ora solo da dimostrare che g è un'estensione continua, ovvero che $\forall x \in T$, comunque preso un intorno $U_{g(x)}^Y$ di $g(x)$ in Y , esiste un intorno di x la cui immagine è tutta contenuta in $U_{g(x)}^Y$.

Poichè Y è completamente regolare, ogni intorno $U_{g(x)}^Y$ di un suo punto x contiene uno zero-insieme $F \in Z(Y)$ intorno di x (per il corollario 1.8) che a sua volta contiene un cozero-insieme $C_Z(h)$ intorno del punto ($h \in C(Y)$), in quanto i cozero-insiemi formano una base per gli aperti dello spazio. Allora $g(x) \in C_Z(h) \subset F \subset U_{g(x)}^Y$. Poichè $C_Z(h)$ è un cozero-insieme, $C_Z(h) = Y - F'$, con $F' \in Z(Y)$.

Segue che $F' \cup C_Z(h) = Y$ e quindi che $F' \cup F = Y$, perchè $C_Z(h) \subset F$.

$X = f^{-1}(F \cup F') = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(F') = Z \cup Z'$, dove $Z = f^{-1}(F)$ e $Z' = f^{-1}(F')$. Poichè X è denso in T , $T = cl_T X = cl_T(Z \cup Z') = cl_T Z \cup cl_T Z'$.

$T - cl_T Z'$ è un aperto di T . Se $y \in T - cl_T Z'$, poichè $y \notin cl_T Z'$, $y \in cl_T Z$. Per la proprietà 1.4 esiste uno z-ultrafiltro su X , che indichiamo con \mathcal{B} , che ha y come unico punto limite e che contiene $f^{-1}(F) = Z$. Per la condizione (e) dobbiamo avere $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, pertanto $F \in f^\#(\mathcal{A})$ e $g(y) \in \bigcap_{A \in f^\#(\mathcal{A})} A$. Segue che $g(y) \in F$, e quindi $g(y) \in U_{g(x)}^Y$. Pertanto $g(T - cl_T Z') \subseteq U_{g(x)}^Y$.

Se dimostriamo che $x \in T - cl_T Z'$, abbiamo che $T - cl_T Z'$ è un intorno di x la cui immagine è tutta contenuta in $U_{g(x)}^Y$, e quindi che g è continua. Per assurdo sia $x \in cl_T Z'$, allora in maniera analoga alla precedente, troviamo che $g(x) \in F'$ e quindi che $g(x) \notin C_Z(h)$, il che è in contraddizione con la definizione di $C_Z(h)$. Allora $x \in T - cl_T Z'$ e g è continua \square

Vogliamo ora dimostrare che ogni funzione $f \in C(X)$ si estende in maniera unica ad una funzione $g \in C(T)$. Ci serviremo del seguente

LEMMA 1.8. *Sia X un sottospazio denso di uno spazio topologico T ed Y uno spazio di Hausdorff. Se f e g sono due funzioni continue su T a valori in Y che coincidono su X , allora $f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo esista $t \in T$ per cui $f(t) \neq g(t)$. Poichè Y è uno spazio di Hausdorff, esistono due intorni disgiunti di $f(t)$ e $g(t)$, che indichiamo rispettivamente con $U_{f(t)}^Y$ e $U_{g(t)}^Y$. Per la continuità di f esisterà un intorno U_t^Y di t per cui $f(U_t^Y) \subseteq U_{f(t)}^Y$ e, per la continuità di g esisterà un intorno V_t^Y tale che $g(V_t^Y) \subseteq U_{g(t)}^Y$.

Poichè X è denso in T , $U_t^Y \cap V_t^Y \cap X \neq \emptyset$, e quindi esisterà un punto $y \in U_t^Y \cap V_t^Y \cap X$. Poichè $y \in X$, risulterà $f(y) = g(y)$, ma in tal caso

dovremmo avere $f(y) \in U_{f(t)}^Y$ ed $f(y) = g(y) \in U_{g(t)}^Y$, e quindi $f(y) \in U_{f(t)}^Y \cap U_{g(t)}^Y$, cosa assurda perchè i due intorni sono disgiunti per ipotesi. \square

Quindi, come conseguenza del lemma, possiamo affermare che se due funzioni in $C^*(T)$ estendono una stessa funzione in $C^*(X)$, con X denso in T , esse coincidono su T .

TEOREMA 1.9. *βX soddisfa le condizioni del Teorema 1.7 e, se T è uno spazio compatto che contiene X come sottospazio denso che soddisfa le stesse condizioni, allora esiste un omeomorfismo tra βX e T che lascia fissi i punti di X .*

DIMOSTRAZIONE. Poichè βX è uno spazio di Hausdorff compatto, per un noto Teorema, esso è completamente regolare.

Il punto (1) del Teorema 1.6, coincide con la condizione (c) del Teorema 1.7. Sia ora T un altro spazio compatto, in cui X è denso, che soddisfi le stesse condizioni. Allora vale la condizione (a) del Teorema 1.7, che ci assicura l'esistenza di una funzione continua $h : \beta X \rightarrow T$ che estende l'iniezione canonica di X in T ed un'altra, sempre continua, $k : T \rightarrow \beta X$, che estende l'iniezione e definita dalla formula 3.

Otteniamo quindi il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta X & \xrightarrow{h} & T & \xrightarrow{k} & \beta X \\
 e \uparrow & \nearrow i & e \uparrow & \nearrow e & e \uparrow \\
 X & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

Consideriamo a questo punto le funzioni composte $k \circ h : \beta X \rightarrow \beta X$ e $h \circ k : T \rightarrow T$ e la funzione identità su βX , $i_{\beta X}$, che estende l'identità i su X . $k \circ h$ e $i_{\beta X}$ sono funzioni continue che coincidono su X e, poichè questo è denso su βX , per il lemma 1.8 devono coincidere, ovvero $i_{\beta X} = k \circ h$. In modo analogo si dimostra che l'identità i_T su T coincide con $h \circ k$. h e k sono dunque biiezioni continue, l'una l'inversa dell'altra, quindi h è un omeomorfismo tra βX e T . \square

Allora possiamo affermare che, a meno di omeomorfismi, βX è l'unico spazio compatto in cui X è denso e C^* -immerso.

Caratterizziamo ora gli spazi in cui X è C^* -immerso col

TEOREMA 1.10. *Sia X uno spazio topologico denso nello spazio T . Le seguenti condizioni sono equivalenti alle condizioni (a),..., (e) del Teorema 1.7:*

- (f) $\beta T = \beta X$
- (g) $X \subset T \subset \beta X$

DIMOSTRAZIONE. Verificheremo l'equivalenza di queste alla condizione (b) del Teorema 1.7: X è C^* -immerso in T .

(b) \Rightarrow (f)

Sia A un aperto di βT , allora $A \cap T$ è un aperto di T , non vuoto perchè T è denso in βT . Poichè X è denso in T , $A \cap T \cap X$ è un aperto non vuoto di X . Ma $A \cap T \cap X = A \cap X$ e quindi ogni aperto non vuoto di βX interseca X in un aperto non vuoto, ovvero X è denso in βT . Inoltre ogni funzione $f \in C^*(X)$ si estende ad una funzione $g \in C^*(T)$, in quanto X è C^* -immerso in T , mentre g si estende ad una funzione $h \in C^*(\beta T)$, perchè T è C^* -immerso in βT e quindi anche X risulta essere C^* -immerso in βT . Infine, poichè βX e βT sono entrambi spazi compatti in cui X è denso e C^* -immerso, per il lemma 1.9 devono essere omeomorfi.

(f) \Rightarrow (g)

Risulta immediata l'inclusione $X \subseteq T \subseteq \beta T = \beta X$

(g) \Rightarrow (b)

Poichè X è C^* -immerso in βX , come dimostrato nel Teorema 1.9, X è C^* -immerso anche in ogni sottospazio $T \subseteq \beta X$. □

Abbiamo risolto così il problema della C^* -immersione: gli spazi T nei quali X è C^* -immerso sono tutti e soli gli spazi compresi fra X e βX .

Per la proprietà 3.6 sappiamo che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli z -ultrafiltri fissi \mathcal{A}_p e i punti di X .

Uno z -ultrafiltro su X è anche un punto di βX . Se p è questo punto, indicheremo con \mathcal{A}^p il corrispondente z -ultrafiltro su X .

Il punto (i) del Teorema 1.6 può essere così riscritto

$$\mathcal{A}^p = \{Z \in Z(X) / p \in cl_{\beta X} e[Z]\}$$

o anche

$$(5) \quad p \in cl_{\beta X} e[Z] \text{ se e solo se } Z \in \mathcal{A}^p$$

Osserviamo ora che se \mathcal{F} è uno z -filtro su X e p , appartenente a βX , è un punto di aderenza per \mathcal{F} , allora $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^p$. Infatti se $Z \in \mathcal{F}$ $p \in cl_{\beta X} Z$ e quindi $Z \in \mathcal{A}^p$. A questo punto, se $p \in \beta X$, esiste un unico z -ultrafiltro \mathcal{F} su X convergente a p (per il punto (e) del Teorema 1.7). Dato che p è anche punto di aderenza per \mathcal{F} , si ha che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^p$ ma, essendo z -ultrafiltri, $\mathcal{F} = \mathcal{A}^p$. Allora \mathcal{A}^p è l'unico z -ultrafiltro su X convergente a p .

Se $p \in X$, si ha $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}_p$.

PROPRIETÀ 1.11. *La funzione*

$$\begin{aligned} \varphi : C^*(X) &\rightarrow C(\beta X) \\ f &\rightarrow f^\beta \end{aligned}$$

dove con f^β indichiamo l'estensione a βX della funzione $f \in C^*(X)$, è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto si vede che φ è un omomorfismo di anelli: infatti $\forall f, g \in C^*(X)$ $\varphi(f + g) = (f + g)^\beta = f^\beta + g^\beta$, perchè le due funzioni coincidono su X , e quindi $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, analogamente si trova che $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.

Per l'iniettività consideriamo due funzioni $f \neq g$, ovviamente $f^\beta \neq g^\beta$, perchè non coincidono su X .

Sia ora f' una funzione continua di βX in \mathbb{R} , allora la restrizione $f'|_X$ è una funzione continua di X in \mathbb{R} , limitata perchè f' è una funzione continua su un compatto. Necessariamente $(f'|_X)^\beta = f'$, in quanto coincidono su X , quindi φ è anche suriettiva.

Allora φ è un isomorfismo tra i due anelli. □

Poichè βX è compatto, $C(\beta X) = C^*(\beta X)$ e quindi $C^*(X)$ e $C^*(\beta X)$ risultano essere isomorfi.

Osservazione. Nella dimostrazione del Teorema 1.7 ((e) \Rightarrow (a)) si è provato che dato uno z -ultrafiltro \mathcal{A} su X la famiglia $f^\#(\mathcal{A})$ è uno z -filtro primo. Diamo un esempio di uno z -ultrafiltro \mathcal{A} tale che $f^\#(\mathcal{A})$ non è uno z -ultrafiltro. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ della retta reale. Indichiamo con X questo intervallo dotato della topologia discreta, mentre con Y lo stesso con la topologia standard. Sia poi l'identità $i : X \rightarrow Y$ che è una funzione continua.

Poichè X non è compatto, esiste su X uno z -ultrafiltro \mathcal{A} che non è fisso. $i^\#(\mathcal{A}) = \{Z \in Z(Y) / i^{-1}(Z) = Z \in \mathcal{A}\}$. Se questo fosse uno z -ultrafiltro, dovrebbe essere fisso in quanto Y è compatto. Allora $i^\#(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_x$ (per un opportuno $x \in X$) sarebbe formato da tutti gli zero-insiemi contenenti x . In particolare $\{x\}$ apparterebbe ad \mathcal{A}_x e quindi anche ad \mathcal{A} . Ma allora ogni elemento di \mathcal{A} conterrebbe $\{x\}$ e pertanto \mathcal{A} sarebbe uno z -filtro fisso, assurdo.

$i^\#(\mathcal{A})$ è anche un esempio di uno z -filtro non z -ultrafiltro convergente.

Da questo esempio si vede anche che non necessariamente l'immagine di uno zero-insieme è uno zero-insieme: infatti $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è uno zero-insieme su X ma non su Y .

PROPRIETÀ 1.12. $\text{card}\beta\mathbb{N} = \text{card}\beta\mathbb{Q} = \text{card}\beta\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che uno zero-insieme su \mathbb{N} è anche zero-insieme su \mathbb{Q} e su \mathbb{R} . Proviamo ora che $\text{card}\beta\mathbb{N} \leq \text{card}\beta\mathbb{R}$. Se $\mathcal{A} \in \beta\mathbb{N}$, allora \mathcal{A} è anche una famiglia di zero-insiemi di \mathbb{R} che gode della proprietà dell'intersezione finita. Pertanto esiste uno z -ultrafiltro \mathcal{B} contenente \mathcal{A} . Ad ogni elemento di $\beta\mathbb{N}$ si è così associato un elemento di $\beta\mathbb{R}$. Tale corrispondenza è iniettiva. Infatti se $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$ esistono $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Ora sia \mathcal{B}_i l'immagine di \mathcal{A}_i in $\beta\mathbb{R}$ (per $i = 1, 2$), allora $A_1 \in \mathcal{B}_1$, $A_2 \in \mathcal{B}_2$ e $A_2 \notin \mathcal{B}_1$, altrimenti avrei $\emptyset \in \mathcal{B}_1$,

quindi $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$. Essendo la corrispondenza iniettiva, $\text{card}\beta\mathbb{N} \leq \text{card}\beta\mathbb{R}$. Analogamente si prova che $\text{card}\beta\mathbb{N} \leq \text{card}\beta\mathbb{Q}$.

Proviamo ora che $\text{card}\beta\mathbb{Q} \leq \text{card}\beta\mathbb{N}$. Sia f una biiezione fra \mathbb{N} e \mathbb{Q} . Tale biiezione esiste perchè \mathbb{N} e \mathbb{Q} hanno la stessa cardinalità. Poichè in \mathbb{N} vi è la topologia discreta, f è una funzione continua tra \mathbb{N} e il compatto $\beta\mathbb{Q}$, che contiene \mathbb{Q} come sottospazio denso. Per la condizione (a) del Teorema 1.7 esiste una funzione continua f' di $\beta\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{Q}$ che estende f . $f'[\beta\mathbb{N}]$ è un compatto di $\beta\mathbb{Q}$. Essendo questo spazio T_2 , si ha che $f'[\beta\mathbb{N}]$ è un chiuso di $\beta\mathbb{Q}$ che contiene \mathbb{Q} . Allora $f'[\beta\mathbb{N}] = \beta\mathbb{Q}$. Essendo f' suriettiva si ha la tesi. La dimostrazione che $\text{card}\beta\mathbb{R} \leq \text{card}\beta\mathbb{N}$ è analoga osservando che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \beta\mathbb{R}$, che \mathbb{Q} è denso in $\beta\mathbb{R}$ e che f è una funzione continua di \mathbb{N} nel compatto $\beta\mathbb{R}$. \square

Usando la compattizzazione di Stone Čech si può dare un'altra dimostrazione del seguente teorema.

TEOREMA 1.13. *Il prodotto di spazi compatti è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{X_i/i \in J\}$ una famiglia di spazi compatti e $\prod_i X_i$ il loro spazio prodotto. Per ogni indice i sia π_i la proiezione canonica di $\prod_i X_i$ in X_i . Essa può essere vista come una suriezione continua dello spazio $\prod_i X_i$ nello spazio compatto X_i , pertanto per la condizione (a) del Teorema 1.7 ammette un'estensione continua $\sigma_i : \beta(\prod_i X_i) \rightarrow X_i$. Si consideri ora la funzione $\delta : \beta(\prod_i X_i) \rightarrow \prod_i X_i$ definita ponendo per $x = \{x_i\}_{i \in J} \in \prod_i X_i$ $\delta(x) = \{\sigma_i(x_i)\}_{i \in J}$. Poichè δ è una funzione continua e suriettiva e $\beta(\prod_i X_i)$ è compatto, anche $\prod_i X_i$ è compatto. \square

Bibliografia

- [1] W. W. Comfort, S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 211, Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1974.
- [2] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Princeton, Van Nostrand, 1960.
- [3] R. C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Berlin - Heidelberg - New York, Springer - Verlag, 1974.
- [4] Melvin Henriksen, *Rings of Continuous Functions in the 1950s*, pp. 243-253, *Handbook of the History of General Topology*, volume 1, ed. Aull and Lowen, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] R. E. Chandler, G. D. Faulkner, *Hausdorff Compactifications: A Retrospective*, pp. 631-667, *Handbook of the History of General Topology*, volume 2, ed. Aull and Lowen, Kluwer Academic Publishers, 1998.

Nella bibliografia precedente, ci siamo limitati a segnalare alcuni testi di approfondimento.