

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

A. DRIVET, L. ORIO

Napoleone, Steiner  
& Cabri

Quaderno # 35 - Luglio 2005





## NAPOLEONE, STEINER & Cabri

### Introduzione.

Il presente lavoro si propone di evidenziare la potenzialità di CABRI nel verificare “dinamicamente” vari teoremi (di geometria specialmente, ma anche di altre branche della matematica e della ricerca operativa) e di “ispirarne” altri.

L’ausilio del software CABRI può rendere altresì la didattica della matematica più efficace e stimolare gli studenti alla ricerca.

In questa presentazione, come si evince dal titolo, si tratteranno il teorema di Napoleone (che ultimamente si è molto pubblicizzato in alcuni seminari matematici) e il problema di Steiner, in particolare la sua generalizzazione.

Il primo verrà presentato in modo abbastanza sintetico e con un’aggiunta alla tesi originaria. Il secondo darà lo spunto per capire come CABRI possa stimolare la ricerca di soluzioni sintetico-dinamiche a problemi di difficile soluzione dal punto di vista tecnico.

Nella fattispecie qui si darà una “regola” originale per individuare con ottima approssimazione il punto S per il quale è minima la somma delle distanze da  $n$  punti complanari (punto di Steiner generalizzato) evitando di ricorrere a complesse formule di analisi, le quali sarebbero molto difficoltose da trattare tecnicamente. Si confronteranno le proprietà del baricentro (del poligono formato dagli  $n$  punti dati con il relativo punto di Steiner) e del punto S stesso.

Si utilizzerà CABRI per costruire un modello del problema e si giustificherà il fatto di ricorrere ad una somma di vettori per ottenere la soluzione.

Verrà evidenziato il fatto che l’ “ispirazione” che ha fatto individuare la caratteristica geometrica del punto S è nata dall’aver costruito e adoperato un modello analogico del problema di Steiner. CABRI è servito a verificare la congettura. Infatti la realizzazione di questo lavoro deve il suo input alle attività che si fanno nei corsi e laboratori presso la SIS Piemonte, soprattutto, nella fattispecie, nei laboratori di matematica applicata .

Per il teorema di Napoleone, invece, CABRI ha contribuito immediatamente a verificarne la tesi. Per l’ampliamento del teorema (cioè relativamente al fatto che i baricentri del triangolo iniziale dato e il triangolo equilatero ottenuto coincidono !) si è fatto ricorso all’intuizione.

L’utilità, specialmente in campo didattico, di CABRI è risaputa. Da questo lavoro si dovrebbe percepire l’utilità anche nei confronti di una ricerca dell’ottimo in vari problemi.

## Teorema di NAPOLEONE

Il teorema di Napoleone (o il teorema ad Egli attribuito) afferma che: **“Dato un triangolo qualunque e, costruiti i triangoli equilateri esterni sui suoi tre lati, congiungendo i centri dei tre triangoli così ottenuti, si trova ancora un triangolo equilatero”.**

Una dimostrazione del suddetto teorema si può ricavare, come qui si è fatto, utilizzando la trigonometria dopo aver riferito il triangolo di partenza ad un opportuno riferimento cartesiano. Il suddetto procedimento comporta calcoli un pochino laboriosi, ma è efficace.

Utilizzando CABRI si può far muovere uno dei vertici del triangolo di partenza e costatare dinamicamente l’asserto del teorema. Ecco una realizzazione qui sotto, col suddetto software, della figura (fig. 1) richiamata dal teorema in questione.

FIG. 1



### Dimostrazione

Consideriamo il generico triangolo ABC con il lato AB sull’asse x e con il vertice A nell’origine.

Siano:  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BC} = a$  le misure dei lati.

F,E,D sono i centri dei triangoli equilateri costruiti come vuole il teorema (tratteggiati in figura).

$$\text{Avremo: } \overline{AF} = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad , \quad \overline{AD} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad , \quad \overline{CE} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad .$$

$$\text{Si ponga : } \hat{CAB} = \alpha \quad , \quad \hat{ABC} = \beta \quad , \quad \hat{ACB} = \gamma \quad .$$

Avremo:

$$\overline{FD}^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ + \alpha)}{3}$$

$$\overline{FE}^2 = \frac{b^2 + a^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma)}{3}$$

$$\overline{ED}^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ + \beta)}{3}$$

Vogliamo dimostrare che  $FD = FE = ED$  , cioè che  $3\overline{FD}^2 = 3\overline{FE}^2 = 3\overline{ED}^2$  .

Per brevità si ponga  $3\overline{FD}^2 = x$  ,  $3\overline{FE}^2 = y$  ,  $3\overline{ED}^2 = z$  .

Avremo:

$$x = b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ + \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \alpha \right)$$

$$y = b^2 + a^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma)$$

$$z = a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ + \beta)$$

Utilizzando il teorema delle proiezioni:

$$y = b^2 + (b \cos \gamma + c \cos \beta)^2 - 2b(b \cos \gamma + c \cos \beta) \cos(60^\circ + \gamma) =$$

$$= \boxed{b^2 + c^2 \cos^2 \beta + bc \cos \gamma \cos \beta + \sqrt{3} b^2 \cos \gamma \text{sen} \gamma + \sqrt{3} bc \cos \beta \text{sen} \gamma}$$

Analogamente:

$$z = \boxed{c^2 + b^2 \cos^2 \gamma + bc \cos \gamma \cos \beta + \sqrt{3} c^2 \cos \beta \text{sen} \beta + \sqrt{3} bc \cos \gamma \text{sen} \beta}$$

Essendo:  $x = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3} bc \text{sen} \alpha$  e  $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ , avremo:

$$x = \boxed{b^2 + c^2 + bc \cos \gamma \cos \beta - bc \text{sen} \gamma \text{sen} \beta + \sqrt{3} bc \cos \gamma \text{sen} \beta + \sqrt{3} bc \cos \beta \text{sen} \gamma}$$

Basterà dimostrare che:

$$\overline{x} = c^2 - bc \text{sen} \gamma \text{sen} \beta + \sqrt{3} bc \cos \beta \text{sen} \gamma = c^2 \cos^2 \beta + \sqrt{3} b^2 \cos \gamma \text{sen} \gamma = \overline{y} \quad \text{per ottenere } x = y.$$

Sappiamo che:  $a = 2R \text{sen} \alpha$  ,  $b = 2R \text{sen} \beta$  ,  $c = 2R \text{sen} \gamma$  , essendo  $R$  la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

$$\bar{x} = c^2 + bc \operatorname{sen} \beta (\sqrt{3} c \cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma) = c^2 + bc \frac{b}{2R} \left( \sqrt{3} \cos \gamma - \frac{c}{2R} \right) = c^2 + \frac{b^2 c}{2R} \sqrt{3} \cos \gamma - \frac{b^2 c^2}{4R^2}$$

$$\bar{y} = \sqrt{3} b^2 \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma - c^2 \operatorname{sen}^2 \beta + c^2 = \sqrt{3} b^2 \cos \gamma \frac{c}{2R} - c^2 \frac{b^2}{4R^2} + c^2$$

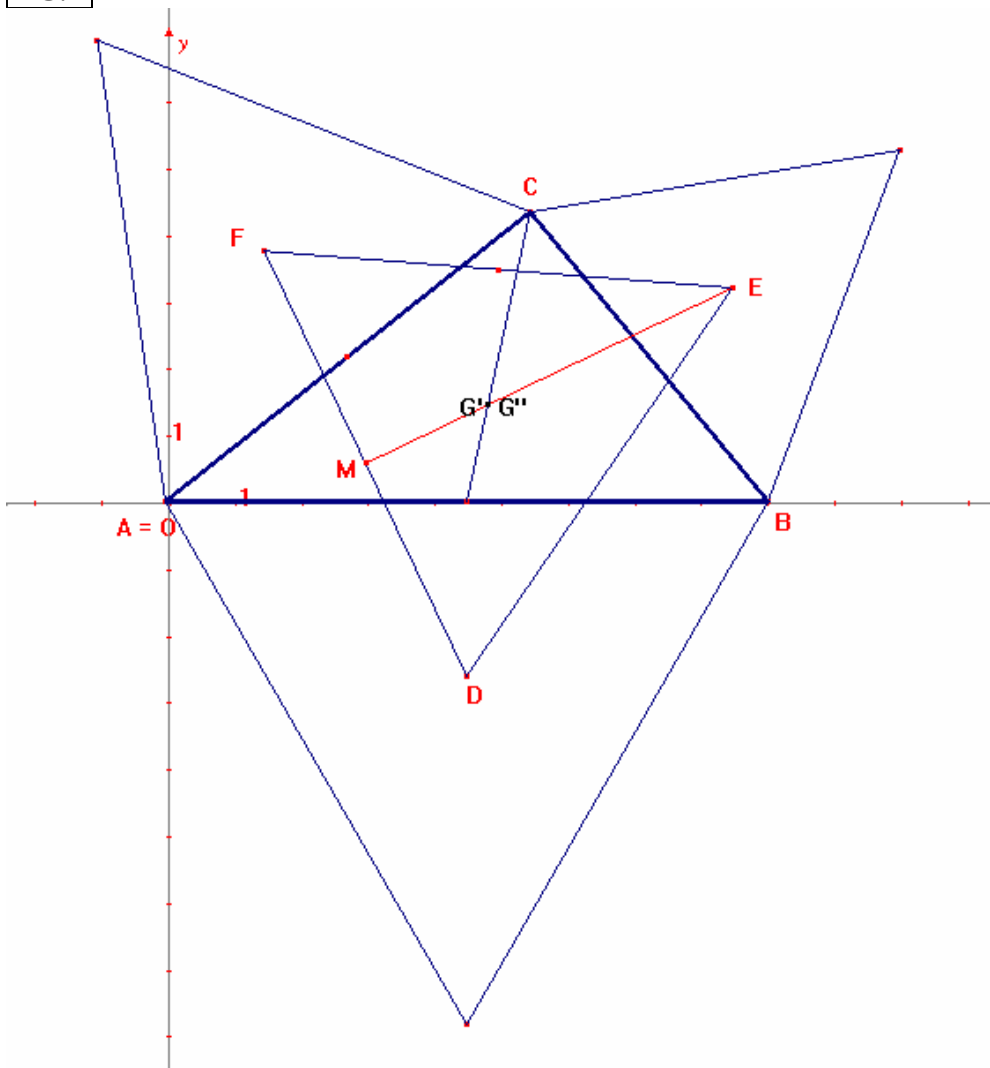
Quindi  $x = y$

Analogamente si prova che  $x = z$ .

*Il teorema è dimostrato.*

Dimostriamo ora un altro teorema, strettamente connesso al precedente. Si può far vedere, infatti, che, nelle stesse ipotesi del teorema di Napoleone, [i baricentri del triangolo di partenza e del triangolo equilatero trovato coincidono](#). Vedi fig.2.

FIG. 2



Riferiamoci ad un sistema di assi cartesiani come nella dimostrazione precedente. Mantenendo la nomenclatura precedente, avremo:

A (0,0) , B (c, 0) , C (bcos $\alpha$ , bsen $\alpha$ )

$$F \left[ \frac{b\sqrt{3}}{3} \cos(\alpha + 30^\circ) , \frac{b\sqrt{3}}{3} \sin(\alpha + 30^\circ) \right] , \quad D \left( \frac{c}{2} , -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$G' \left( \frac{c + b \cos \alpha}{3} , \frac{b \sin \alpha}{3} \right)$$

Vogliamo far vedere che G', baricentro di ABC coincide con G'', baricentro di FDE (equilatero).

Per evidenti ragioni di simmetria basterebbe provare che G' si trova sulla perpendicolare EM di FD (EM asse di FD).

$$x_F = \frac{b\sqrt{3}}{3} \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{b\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$y_F = \frac{b\sqrt{3}}{3} \sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{b\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha)$$

Coefficiente angolare retta di FD:

$$m(FD) = \frac{\frac{b\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) + \frac{c\sqrt{3}}{6}}{\frac{b\sqrt{3}}{6} (\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha) - \frac{c}{2}} = \frac{b(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) + c}{b(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha) - \sqrt{3}c}$$

Se M è il punto medio di FD, avremo:

$$x_M = \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha) + 3c}{12} , \quad y_M = \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) - c\sqrt{3}}{12}$$

Equazione della retta per M e perpendicolare a FD:

$$y - \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) - c\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}c - b(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)}{b(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) + c} \left( x - \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha) + 3c}{12} \right)$$

Semplificando:

$$y(3b \sin \alpha + \sqrt{3}b \cos \alpha + \sqrt{3}c) = x(3c - 3b \cos \alpha + \sqrt{3}b \sin \alpha) + b^2 - c^2$$

Verifichiamo che G' appartiene alla suddetta retta:

$$\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{3} (3b \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{3}b \cos \alpha + \sqrt{3}c) = \frac{c + b \cos \alpha}{3} (3c - 3b \cos \alpha + \sqrt{3}b \operatorname{sen} \alpha) + b^2 - c^2 .$$

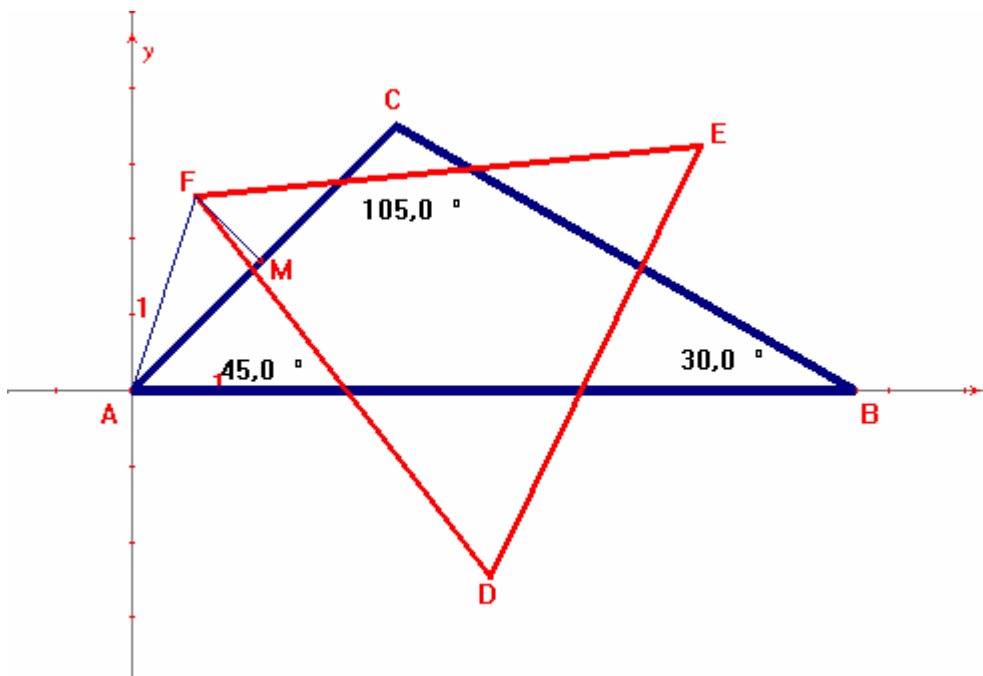
Semplificando i termini simili otteniamo  $0 = 0$ , quindi l'uguaglianza è verificata, c.v.d.

NOTA BENE. I due teoremi di cui sopra valgono anche se i triangoli equilateri vengono costruiti "internamente" al triangolo dato.

Un esempio in cui si può verificare facilmente il secondo teorema.

Consideriamo un triangolo ABC di angoli  $\hat{C} \hat{A} B = 45^\circ$ ,  $\hat{C} \hat{B} A = 30^\circ$  e  $\hat{A} \hat{C} B = 105^\circ$  sempre riferito agli assi nel modo consueto (vedi fig. 3).

FIG. 3



Abbiamo qui, ponendo  $C(h,h)$  :

$A(0,0)$ ,  $B(h+h\sqrt{3}, 0)$ ,  $M(h/2, h/2)$ , retta di MF :  $y = -x + h$

retta di AF :  $y = (2 + \sqrt{3})x$

Quindi intersecando le due rette:  $F \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{6}h, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}h \right)$

Si trova pure D  $\left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}h, -\frac{3 + \sqrt{3}}{6}h \right)$  e il punto medio K di FD:  $K \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{6}h, 0 \right)$

Asse di FD :  $y = (\sqrt{3} - 1)x - \frac{\sqrt{3}}{3}h$ .

Basta ora verificare che G, baricentro di ABC, appartiene alla suddetta retta.

$$G \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{3}h, \frac{h}{3} \right)$$

Sostituendo le coordinate di G nell'equazione della retta si ha proprio una identità:

$$\frac{h}{3} = (\sqrt{3} - 1) \frac{2 + \sqrt{3}}{3}h - \frac{\sqrt{3}}{3}h, \quad 1 = 2\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}, \quad 1 = 1 \quad \text{c.v.d.}$$

(Si sono qui naturalmente tralasciati i calcoli e le semplificazioni più elementari !)

---

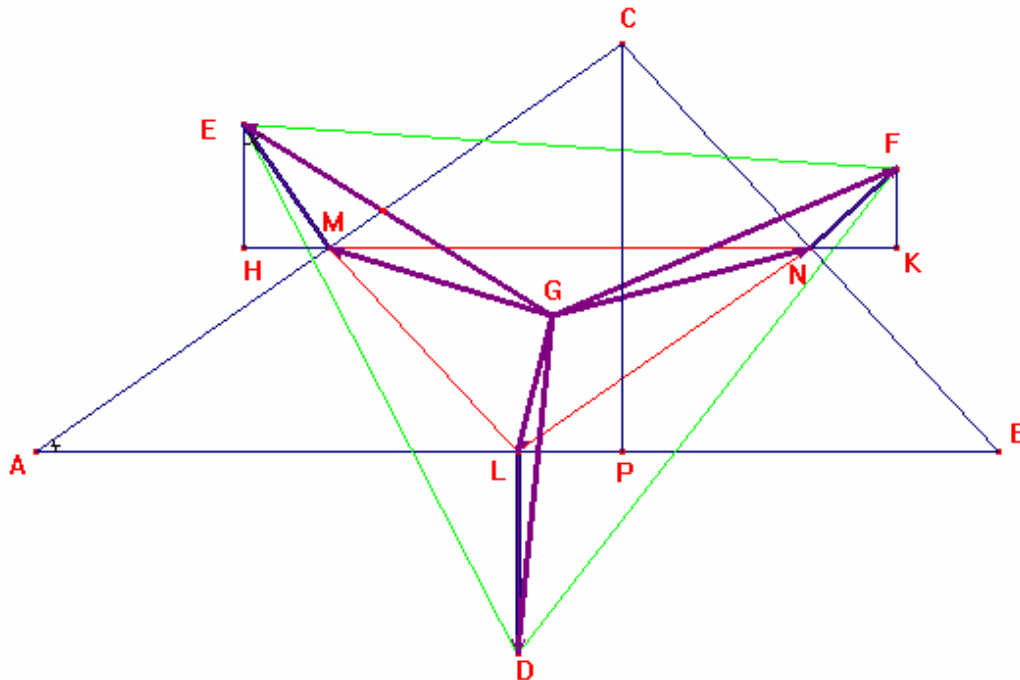
Il teorema si presta ad una generalizzazione.

**“Dato un triangolo qualunque, se si prendono (esternamente o internamente al triangolo stesso) sugli assi dei lati segmenti direttamente proporzionali ai lati corrispondenti, a partire**

**dal punto medio di ogni lato, il triangolo che ha per vertici i rispettivi altri estremi di questi segmenti ha lo stesso baricentro del triangolo dato”.**

Vedi figura 4.

**FIG. 4**



**Dimostrazione**

Si consideri la figura 4. Si immagini il triangolo ABC riferito ad un sistema di assi cartesiani ortonormali con la base AB parallela all’asse *x*. L, M, N sono i punti medi del triangolo ABC, quindi il triangolo LMN ha lo stesso baricentro G di ABC, come si può facilmente provare.

Il baricentro, come si può dimostrare (in maniera semplice nel caso di triangoli), minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo ABC.

La proprietà del baricentro più importante, però per noi, è quella per cui è **nulla la somma dei vettori applicati nel baricentro e con “punta” nei punti del piano considerati.**

Infatti il baricentro di un sistema di particelle è il centro di un qualunque sistema di vettori paralleli, concordi e di moduli proporzionali alle masse, applicati nei punti (materiali) del sistema.

Sia O un qualunque punto di riferimento e G il baricentro. Avremo:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i} \quad (\text{con } M = \text{massa totale})$$

$$\text{da cui} \quad x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad ; \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$\text{Se } m_i = 1, \forall i \text{ avremo proprio} \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} .$$

$$\text{Se portiamo O in G otteniamo : } \overrightarrow{GG} = \vec{0} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GP_i} \quad , \text{ c.v.d.}$$

Quindi è nulla la somma dei vettori applicati in G diretti verso i vari punti  $P_i$  e di modulo uguale alla distanza  $\overrightarrow{GP_i}$ .

Sappiamo pure che per trovare le coordinate del baricentro di un poligono basta fare la media aritmetica delle coordinate dei vertici del poligono stesso.

Torniamo ora alla figura 4. Si considerino i vettori  $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}, \overrightarrow{GL}$ . La loro somma è nulla, per quanto si è detto precedentemente. Proveremo che è pure nulla la somma dei vettori  $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}$ .

Infatti la loro risultante è uguale alla somma  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GL}$  con la risultante di  $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{NF}$ .

Detto  $r$  il rapporto  $\frac{\overline{EM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{NF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{AB}}$ ,  $\hat{BAC} = \alpha$ ,  $\hat{ABC} = \beta$ , avremo, da considerazioni di carattere trigonometrico:

$$\overline{HM} = \overline{EM} \text{sen} \alpha = r \overline{AC} \text{sen} \alpha \quad , \quad \overline{NK} = \overline{FN} \text{sen} \beta = r \overline{CB} \text{sen} \beta$$

componenti “orizzontali” dei vettori  $\overrightarrow{ME}$  e  $\overrightarrow{FN}$ , di cui una positiva e l’altra negativa.

Dal fatto che la componente orizzontale di  $\overrightarrow{LD}$  è nulla ed in considerazione che  $\overline{AC} \text{sen} \alpha = \overline{CB} \text{sen} \beta$ , si ha che è nulla pure la componente corrispondente della risultante di  $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{NF}$ .

Analogamente si ha:  $r \overline{AC} \cos \alpha + r \overline{BC} \cos \beta = r \overline{AB}$ .

Tenendo conto dei versi delle componenti “verticali” dei vettori  $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{LD}, \overrightarrow{NF}$ , si conclude che la loro somma è il vettore nullo come pure quella dei vettori  $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}$ , c. v. d.

Con CABRI si può facilmente controllare che la precedente proprietà vale anche per un qualsiasi poligono. Vedi figg. 5 (caso di un quadrilatero) e 6 (pentagono).

**FIG. 5**

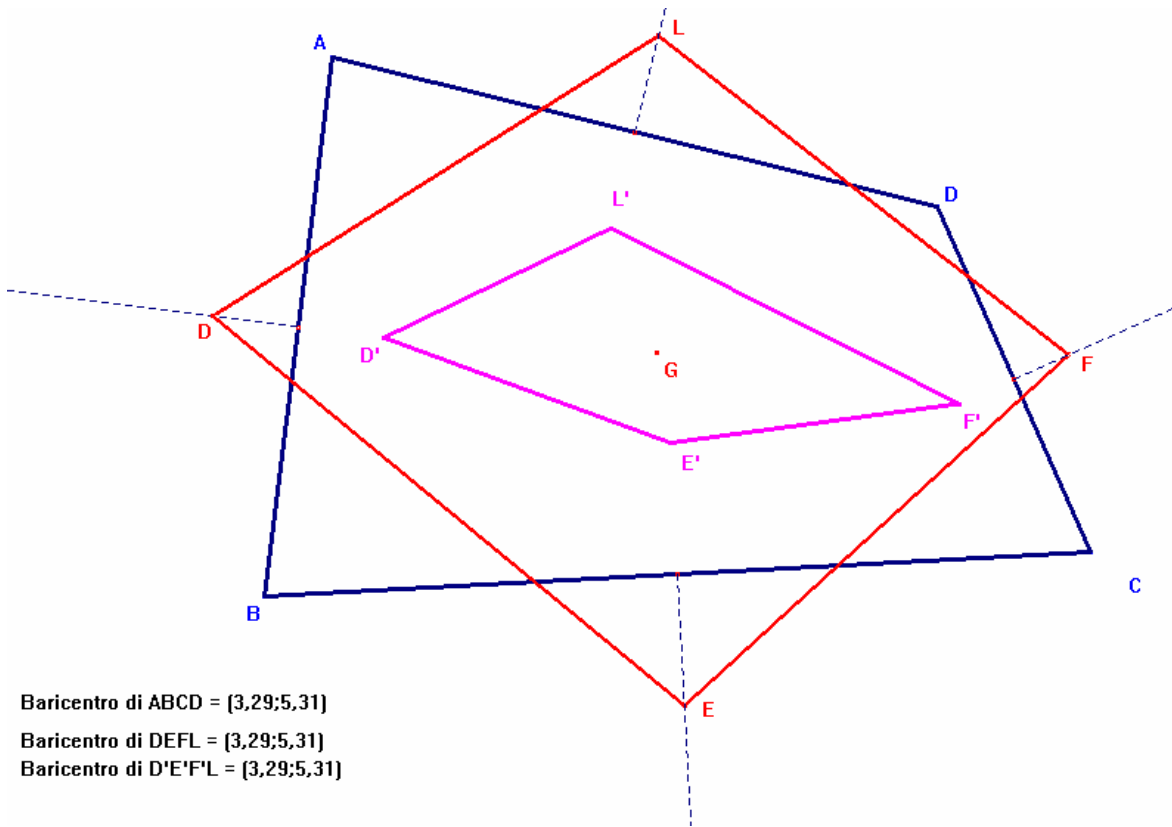
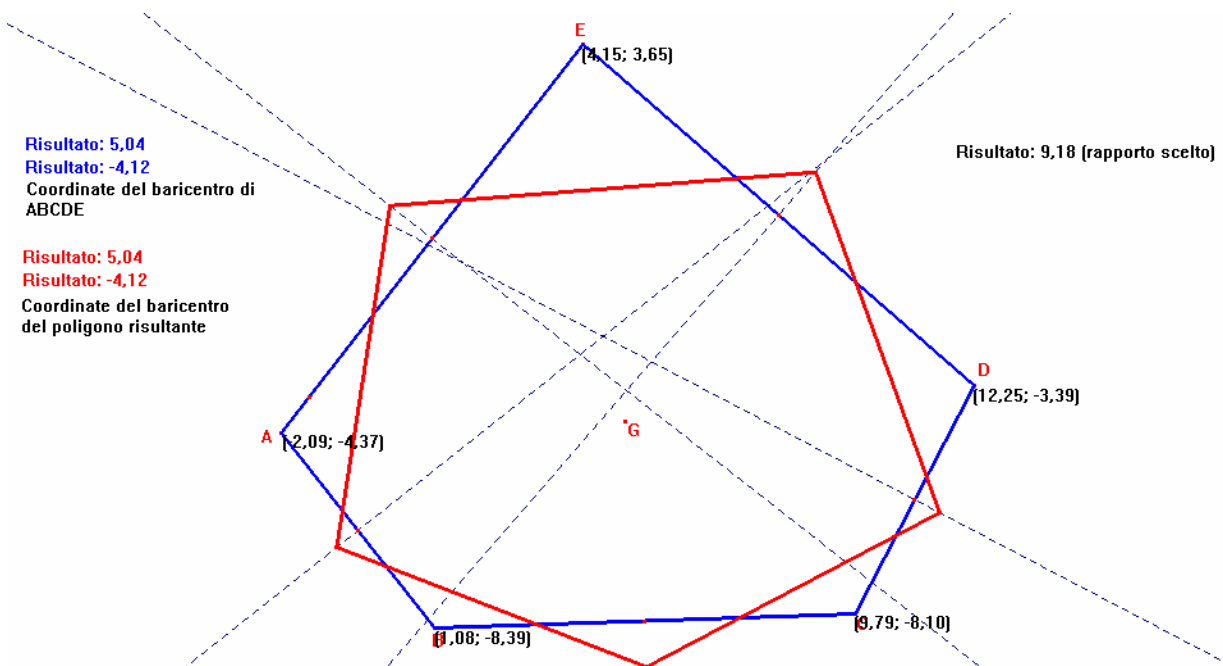


FIG. 6



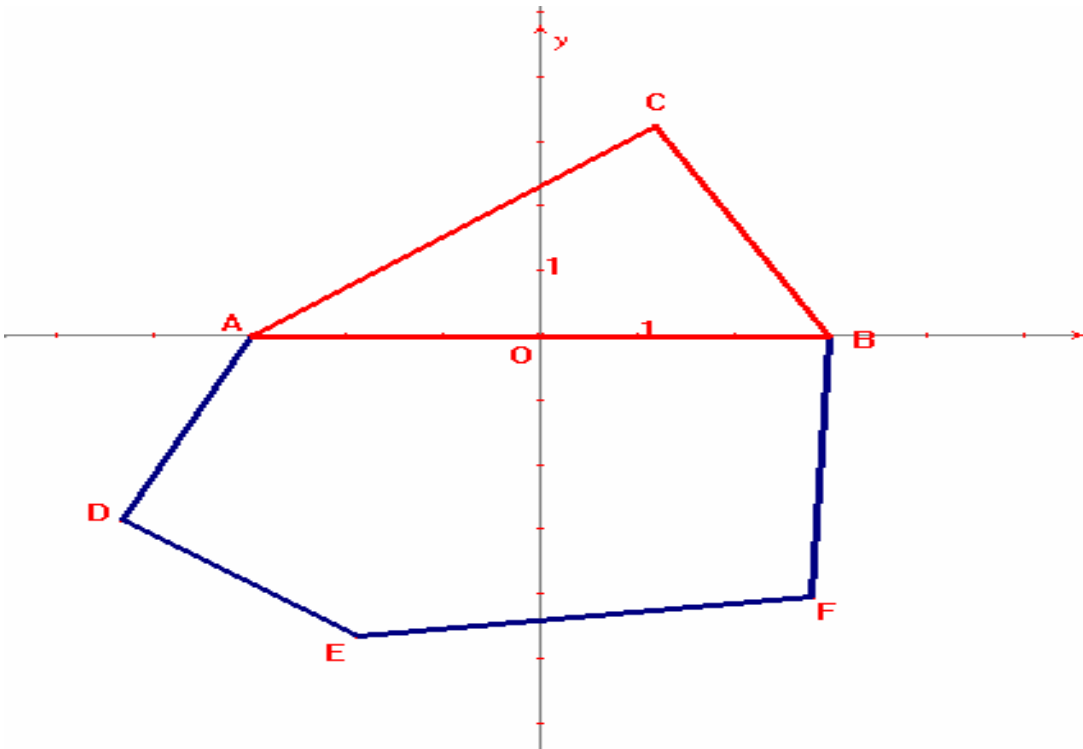
Veniamo quindi alla dimostrazione per il caso del tutto generale, che così si potrebbe formulare.

**“Dato un poligono qualunque, se si prendono (esternamente o internamente al poligono stesso) sugli assi dei lati segmenti direttamente proporzionali ai lati corrispondenti, a partire**

**dal punto medio di ogni lato, il poligono che ha per vertici i rispettivi altri estremi di questi segmenti ha lo stesso baricentro del poligono dato”.**

Usiamo il metodo di induzione. Per un triangolo si è dimostrato che il teorema vale. Prendiamo un poligono di  $n$  lati ( $n > 3$ ), supponiamo che il teorema valga per esso e dimostriamo quindi che vale anche per un poligono di  $n+1$  lati, ricavato da questo. Si può costruire infatti, a partire da un poligono di  $n$  lati, un altro poligono con un vertice in più costruendo un triangolo con la base su uno dei lati del poligono di partenza (vedi fig. 7).

FIG. 7



Riferiamo il tutto ad un sistema di assi cartesiani in modo che l'asse delle ordinate sia perpendicolare nel punto medio (O) del lato in comune (fra poligono e triangolo), come in figura 7 appunto.

Chiamiamo con  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  i vertici del triangolo, con  $P_i(x_i, y_i)$  gli altri  $n-2$  (in figura D, E, F) vertici del poligono risultante di cui vogliamo provare la proprietà.

Chiameremo con  $A'(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ,  $B'(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ ,  $C'(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$  i vertici del triangolo associato ad ABC, cioè quello che, secondo la costruzione del teorema, ha lo stesso baricentro di ABC.

Analogamente per il poligono iniziale, chiameremo con  $\bar{P}(x_i, y_i)$  i punti del suo associato.

Si sa che le coordinate del baricentro di un poligono sono la media aritmetica delle coordinate dei suoi vertici. Basterà quindi dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=4}^n \bar{x}_i + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad (\text{e analogamente per le ordinate}).$$

(la cosa sarà più chiara con un esempio finale, a partire da un triangolo che “diventa” un quadrilatero)

Dall’ipotesi si ha:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \quad \text{e}$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + \dots + x_{n+1} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \dots + \bar{x}_n$$

Si trova: 
$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \sum_{i=1}^n \bar{x}_i - x_1 - x_2 \quad \text{ed ancora:}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - x_1 - x_2 + \sum_{i=4}^n \bar{x}_i$$

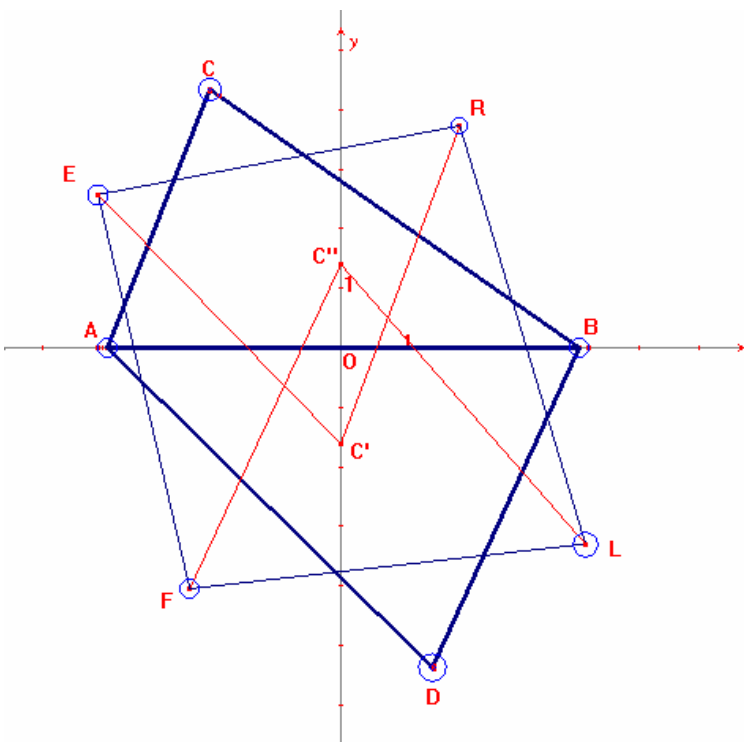
Ma  $\bar{x}_3 = \bar{x}_3$  e  $2\bar{x}_3 - x_1 - x_2 = 0$ , quindi si ha la tesi.

Analogamente per le ordinate, c.v.d.

Esempio finale (a chiarimento dell’algoritmo dimostrativo).

Si abbia un quadrilatero ABCD, come in figura 8. Esso si può immaginare come composizione (nel senso sopra dichiarato) dei due triangoli ABC e ABD.

FIG. 8



ERC' e FLC'' sono i corrispondenti, secondo il teorema, di ABC e ABD rispettivamente. Si ha  $\overline{AO} = \overline{OB}$  e  $\overline{C''O} = \overline{OC'}$ . EFLR, sul quale si dimostrerà il teorema, è infine il corrispondente di ADBC.

Avremo, secondo la fig. 8:

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3), \quad R(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \quad E(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \quad C'(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$$

$$D(x_4, y_4), \quad L(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \quad F(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \quad C''(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$$

Ipotesi:  $x_1 + x_2 + x_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$   
 $x_1 + x_2 + x_4 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

Tesi:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

Si ha, infatti:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - x_1 - x_2$ ,

ma  $2x_3 - x_1 - x_2 = 0$  (poiché  $\bar{x}_3 = x_3$  e  $\bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ) e quindi la tesi.

Analogamente per le ordinate, c.v.d.

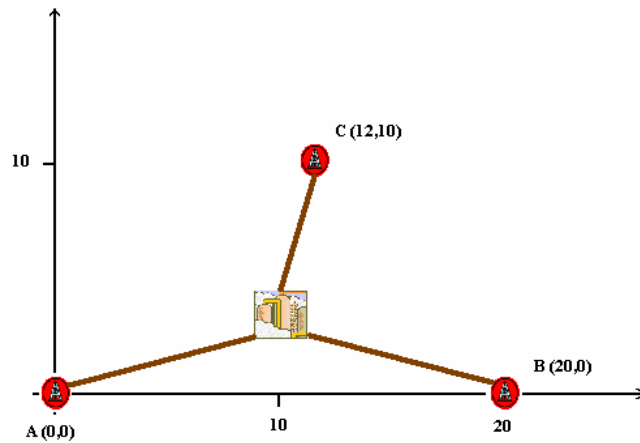
## IL PROBLEMA DI STEINER E LA SUA GENERALIZZAZIONE

Esaminiamo il seguente problema.

Università degli Studi di Torino

“Una società petrolifera riceve il greggio estratto da tre zone nelle quali si trovano numerosi pozzi, situate rispettivamente nei punti A, B e C della fig. 9. Il punto A è stato assunto per comodità come origine del sistema di assi cartesiani; le coordinate sono espresse in Km. (Fig. 9).

FIG. 9



La società petrolifera vuole costruire una raffineria e deve decidere dove localizzarla in modo da minimizzare i costi di costruzione degli oleodotti. Tali costi risultano proporzionali ai quadrati delle distanze dagli oleodotti. Supponendo la zona pianeggiante, in modo che gli oleodotti possano essere costruiti in linea retta, qual è la localizzazione migliore della raffineria?”

Il problema può essere risolto con DERIVE, operando la semplificazione consistente nel considerare solo i radicandi, come un problema di minimo della funzione costituita dalla somma dei quadrati delle distanze della raffineria dai pozzi (distanze al quadrato = costi):

$$z = (x^2 + y^2) + ((x - 20)^2 + y^2) + ((x - 12)^2 + (y - 10)^2) = 3x^2 + 3y^2 - 64x - 20y + 644$$

La soluzione sarà  $x = 32/3$ ,  $y = 10/3$ , che sono le coordinate del **baricentro** del triangolo ABC (come spiegheremo) e la rappresentazione della funzione è mostrata nella figura 10.

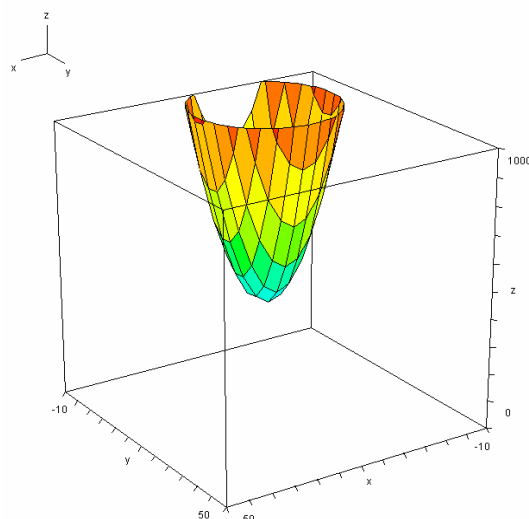


FIG. 10

Un problema molto simile fu trattato da Jacob Steiner, il famoso geometra dell’università di Berlino, all’inizio del XIX secolo.

Tre villaggi A, B, C, debbono essere congiunti da un sistema di strade di minima lunghezza totale. **Matematicamente, sono dati in un piano tre punti A, B, C e si cerca un quarto punto S (punto di Steiner) dello stesso piano, tale che sia minima la somma delle tre distanze di S da A, B, C rispettivamente.**

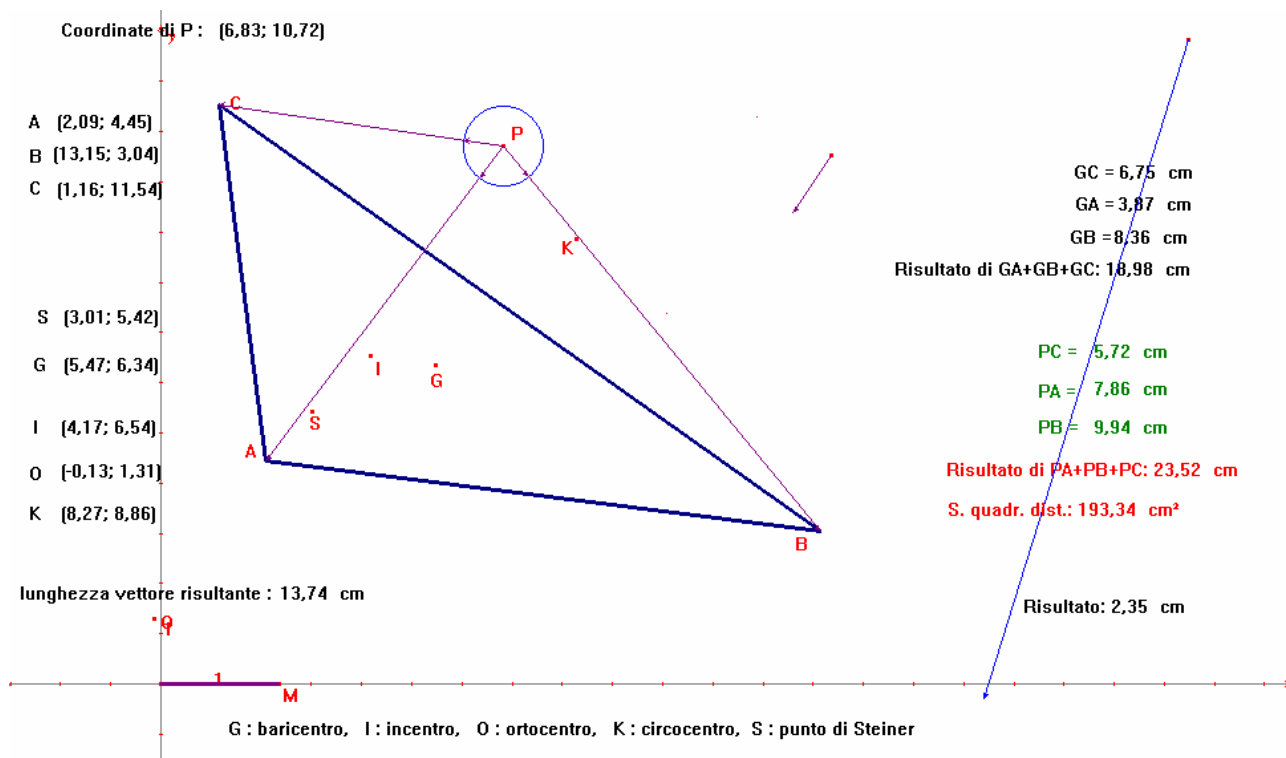
La risposta al problema è la seguente:

**Se nel triangolo ABC tutti gli angoli sono minori di  $120^\circ$ , S è il punto che proietta ciascuno dei tre lati, AB, BC, CA, secondo un angolo di  $120^\circ$ . Se però un angolo di ABC, per esempio l'angolo in C, è maggiore di  $120^\circ$ , il punto S coincide con il vertice C.**

[Vedasi una dim. ad esempio su "Che cos'è la matematica?", Richard Courant e Herbert Robbins, ed. Universale scientifica Boringhieri]

Ecco una "simulazione" in CABRI della risoluzione del problema (fig. 11) e la costruzione geometrica che porta ad individuare S (fig. 12).

FIG. 11



Si nota subito che il punto di Steiner non coincide (in generale) col baricentro, come verrebbe istintivamente, di primo acchito, da pensare. **Il baricentro, come già si è visto e come sarà ribadito, minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo ABC.**

La dinamicità di CABRI permette di "muovere" il punto P fino a farlo coincidere con S e controllare la tesi del teorema.

In figura 11 ci sono due vettori i quali rappresentano nell'ordine (da sinistra a destra in figura) la **somma dei vettori  $\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{PB}$ , la quale è nulla se P coincide con G (baricentro), e la somma**

dei vettori di modulo uguale di origine P e direzione (e verso) PC, PA, PB, la quale è nulla se P coincide con S.

Quest'ultima "scoperta", come vedremo, è stata verificata proprio lavorando con CABRI dopo aver utilizzato (o almeno immaginato di utilizzare) un modello analogico-fisico.

FIG. 12

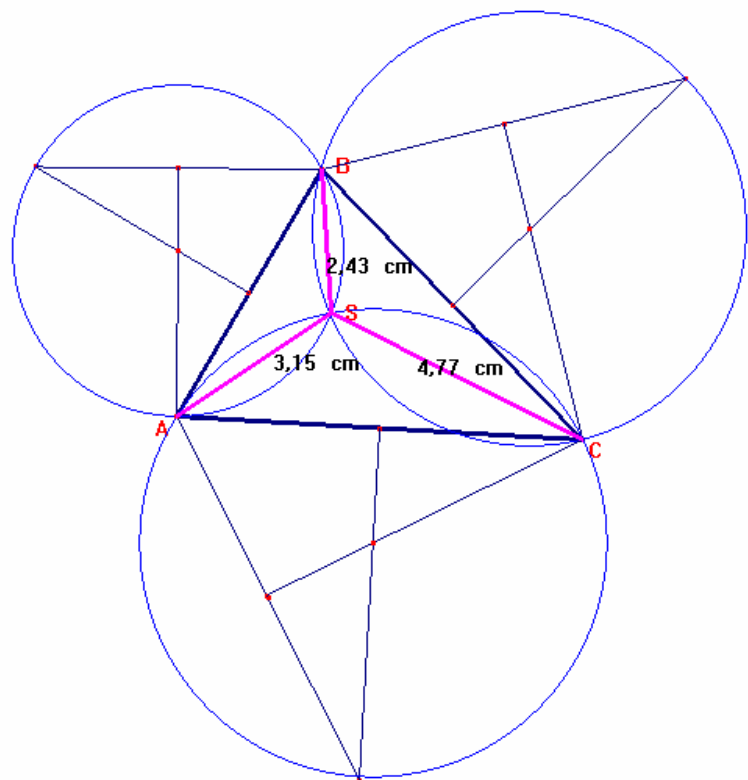
**Punto di Steiner :** punto per il quale è minima la somma delle distanze dai vertici di un triangolo.

E' il punto dal quale si "vedono" i vertici sotto un angolo di 120°.

Si costruisce come intersezione di almeno due circonferenze con centro nei punti centrali dei triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo di partenza.

N.B. Se il triangolo è ottusangolo con un angolo maggiore o uguale a 120°, il punto di Steiner è quello del vertice corrispondente all'angolo ottuso.

Risultato: 10,36 cm

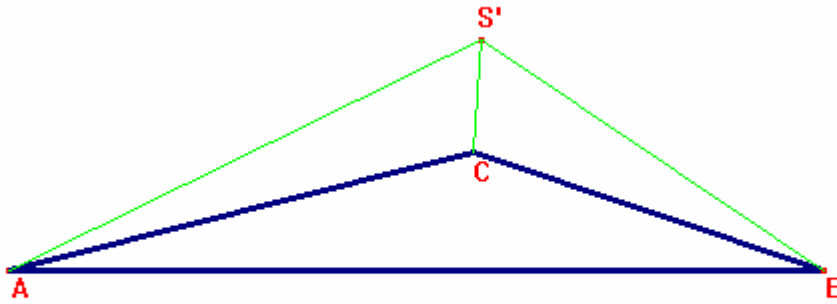


**Osservazione.**

I metodi formali della matematica talvolta raggiungono dei risultati che oltrepassano le intenzioni di chi li usa. Per esempio, se l'angolo in C è maggiore di 120° il procedimento seguito per la costruzione geometrica fornisce, invece della soluzione S (che in questo caso è il punto C stesso) [vedi figura 13], un altro punto S', da cui il lato maggiore del triangolo ABC è proiettato secondo un angolo di 120° e i due lati minori sono proiettati secondo angoli di 60°. S' non risolve il nostro problema di minimo, ma ne risolve un altro (!): S' è il punto per cui è minima l'espressione  $\overline{S'A} + \overline{S'B} - \overline{S'C}$ .

[Vedasi una dim. su "Che cos'è la matematica ?", Richard Courant e Herbert Robbins, ed. Universale scientifica Boringhieri]

FIG. 13



Vediamo ora, come promesso, una dimostrazione del fatto che il baricentro di  $n$  punti (pensati pure come punti materiali di massa uguale) complanari è il punto che minimizza la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti stessi.

Consideriamo  $n$  punti di coordinate rispettivamente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Sia  $P(x, y)$  un punto generico.

Sia  $z = f(x, y)$  la somma dei quadrati delle distanze di  $P$  dai punti dati. Si ha:

$$z = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2$$

con derivate parziali prime:

$$z'_x = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \dots + 2(x - x_n)$$

$$z'_y = 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + \dots + 2(y - y_n)$$

le quali si annullano per  $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ , che sono proprio le coordinate del baricentro degli  $n$  punti dati.

E' facile rendersi conto che è un "punto di minimo", infatti:

$$z''_{xx} = z''_{yy} = 2n > 0 \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0 \quad H = \begin{vmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{vmatrix} = 4n^2 > 0. \quad (\text{c.v.d.})$$

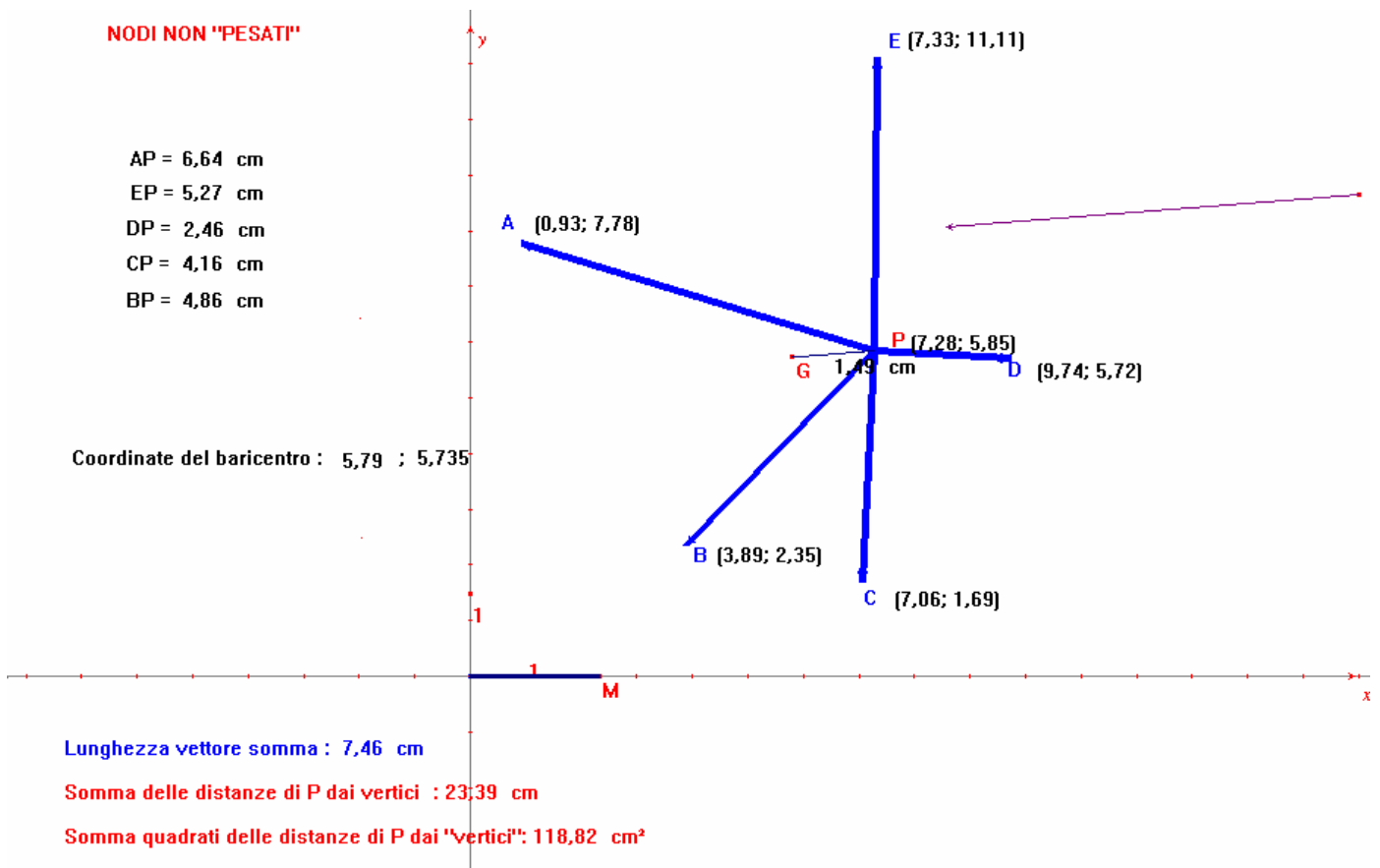
La proprietà del baricentro più importante, che qui utilizzeremo, è quella per cui è **nulla la somma dei vettori applicati nel baricentro e con "punta" nei punti del piano considerati**, come si è già visto.

Con CABRI si può individuare in modo abbastanza preciso la posizione di  $G$  costruendo, come in fig. 9, i vari vettori uscenti da un certo punto  $P$  generico e che "terminano" sui punti assegnati.

Trascinando P si può fare in modo di rendere nulla la somma dei suddetti vettori, trovando così la posizione di G.

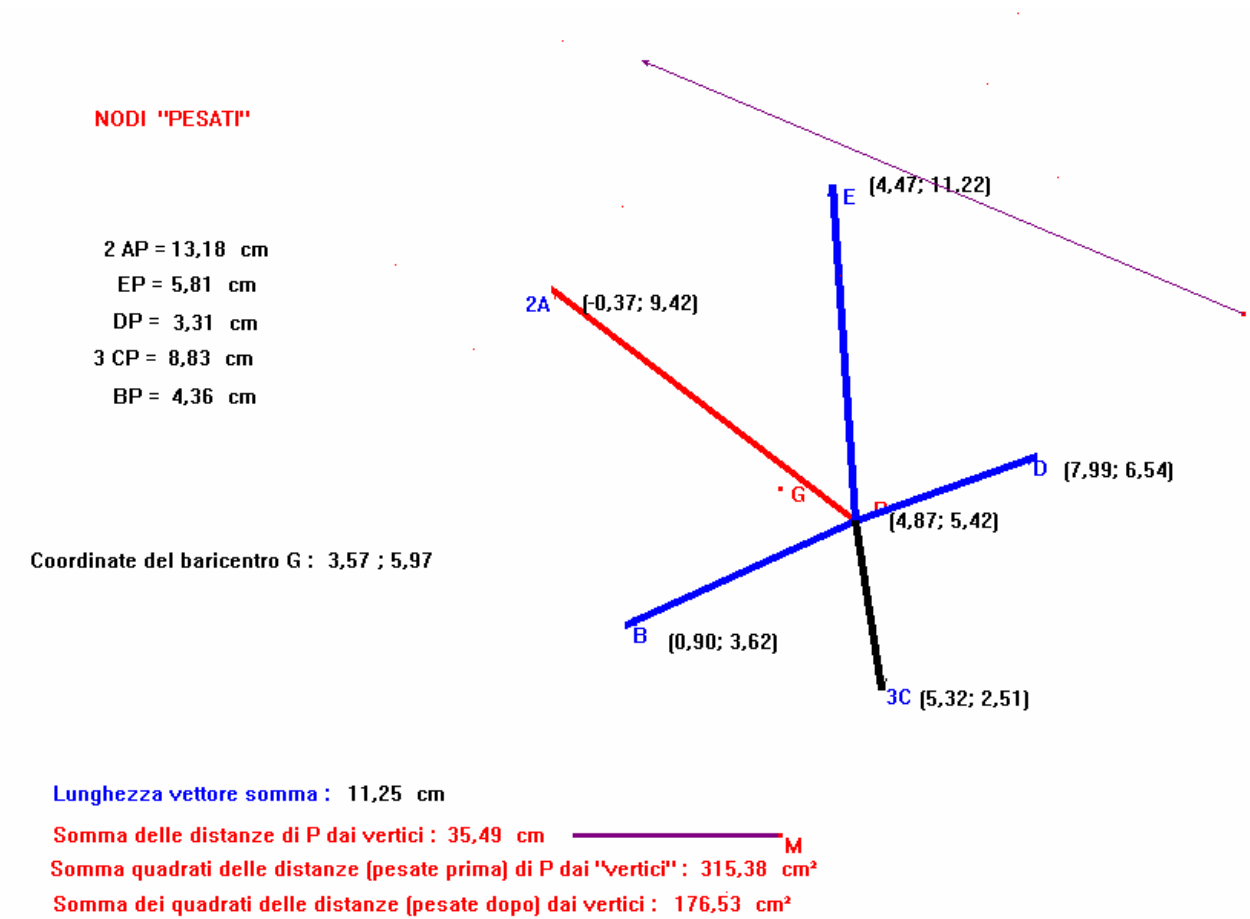
A chiarimento di ciò si veda la figura seguente (fig. 14):

FIG. 14



Si possono considerare anche punti di diversa “massa” (immaginati magari come città più popolose di altre) e trovarne il baricentro dando dei pesi ai vari vettori di cui sopra. Vedi fig. 15.

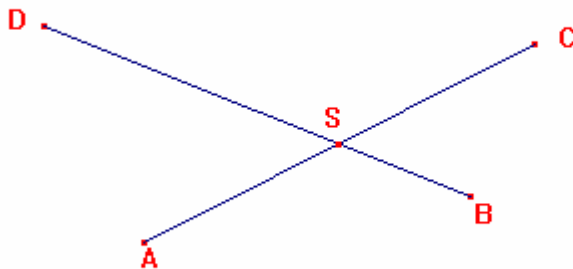
FIG. 15



Torniamo al problema di Steiner. La sua generalizzazione, secondo alcuni, non condurrebbe a risultati interessanti. Si proverà a dimostrare il contrario con l'ausilio di CABRI.

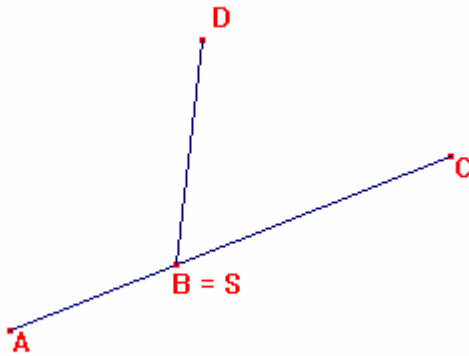
Se abbiamo 4 punti nel piano, come in figura 16, il punto S è il punto di intersezione delle diagonali del quadrilatero ABCD. Ciò si può dimostrare considerando il fatto che, fra due punti, ad es. A e C, il punto S è uno qualunque del segmento AC. Analogamente per BD, quindi S è l'intersezione delle diagonali AC e BD, c.v.d.

FIG. 16



Se tre dei quattro punti fossero allineati S coinciderebbe con il punto intermedio di quelli allineati. Infatti esso si potrebbe considerare come l'incontro delle diagonali del quadrilatero degenero ABCD come in figura 17.

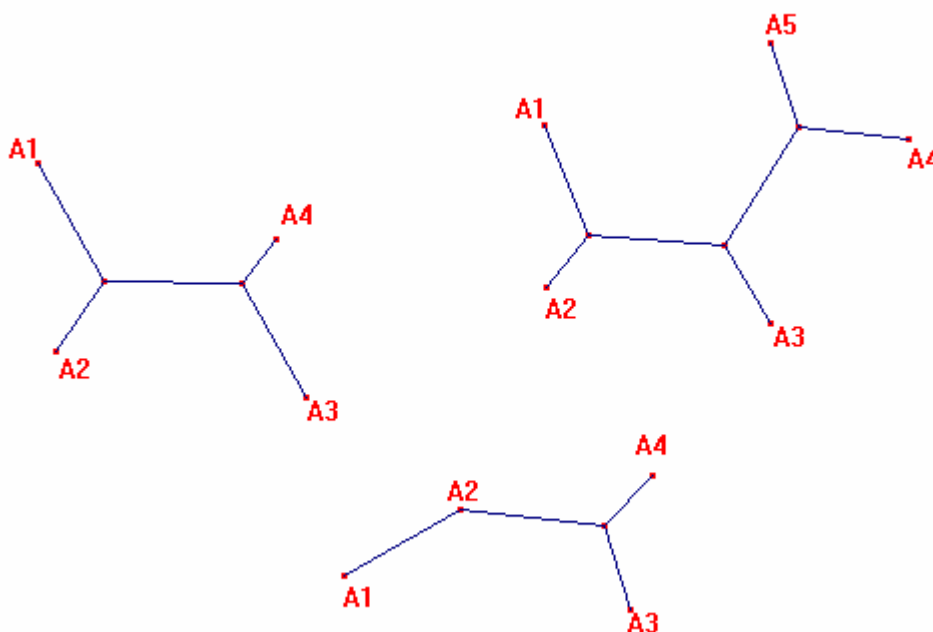
FIG. 17



La generalizzazione del problema di Steiner, nella letteratura matematica, abbandona la ricerca di un solo punto S e si propone invece la determinazione di un “reticolato” di minima lunghezza che colleghi gli  $n$  punti. Si potrebbe enunciare così: *Dati  $n$  punti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , trovare un sistema connesso di segmenti, di minima lunghezza totale, tale che ogni coppia di punti possa essere collegata con un poligono formato da segmenti del sistema.*

L'evidenza della soluzione dipenderà, ovviamente, dalla disposizione, sul piano, dei punti dati. Verrà indicata qui la risposta nei casi specifici mostrati dalla figura 18.

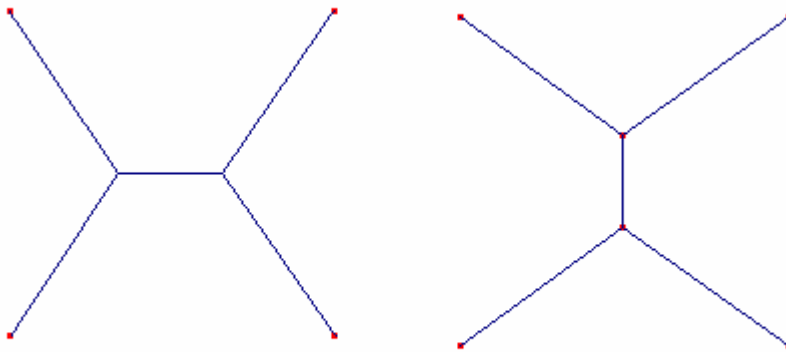
FIG. 18



Nel primo caso la soluzione è data da cinque segmenti con due intersezioni multiple in cui si incontrano tre segmenti formando angoli di  $120^\circ$ . Nel secondo caso la soluzione contiene tre intersezioni multiple. Se i punti fossero posti in maniera diversa, figure come queste potrebbero non essere possibili. Una o più intersezioni multiple possono degenerare ed essere sostituite da uno o più dei punti dati, come nel terzo caso.

La soluzione del problema non è sempre univocamente determinata. Per quattro punti ai vertici di un quadrato si hanno le due soluzioni equivalenti che si vedono in figura 19. Se i punti  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sono vertici di un poligono semplice con angoli sufficientemente grandi, il poligono stesso sarà il minimo.

FIG. 19



Torniamo a noi. L'intenzione era (ed è) quella di generalizzare comunque il problema di Steiner, ricercando **il punto che minimizzi la somma delle sue distanze da  $n$  ( $n > 4$ ) punti dati complanari.**

È un problema che si può risolvere utilizzando l'analisi matematica. Basta indicare con  $P(x,y)$  un punto generico e calcolare le distanze (funzioni di due variabili:  $x$  e  $y$ ) di  $P$  dai punti dati. Si ottiene una funzione  $z = f(x,y)$  sommando le distanze di cui sopra. Si considerano poi, come è noto, le derivate parziali di  $f$  e si otterranno informazioni sulla soluzione.

La difficoltà maggiore è di tipo tecnico: è piuttosto complicato trattare equazioni contenenti radicali quadratici in più denominatori anche utilizzando programmi come DERIVE.

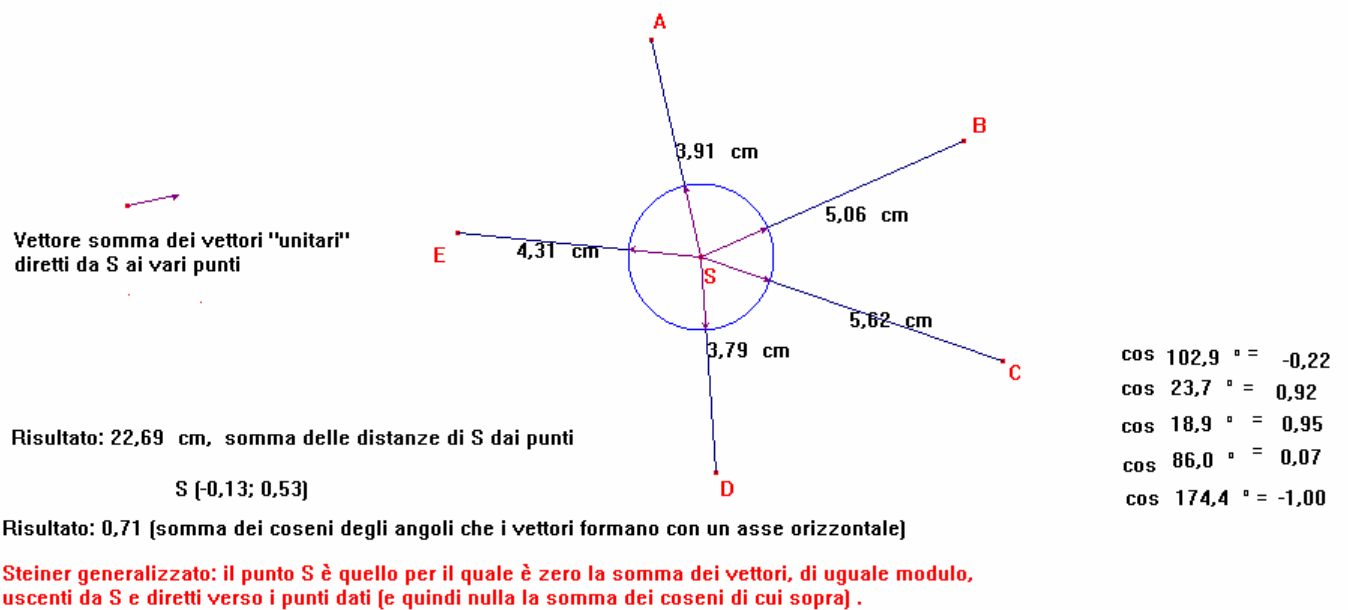
Ecco quindi l'idea di usare CABRI per avere almeno un'indicazione approssimativa della posizione del punto  $S$ , ma anche **riuscendo a ricavare una caratteristica geometrica del punto  $S$**  stesso.

La caratteristica è la seguente e vale nel caso generale. Illustreremo poi alcuni casi particolari.

**Affinché, nel caso generale, un punto S sia di Steiner per n punti complanari dovrà essere nullo il vettore somma di n vettori di uguale intensità uscenti da S e con direzioni da S ai punti dati.**

La figura seguente (Fig. 20) cerca di chiarire l'affermazione. (In figura i vettori di cui si parla sono stati costruiti utilizzando una circonferenza al fine di mantenerne costante il modulo).

FIG. 20



Per trovare S, con CABRI, si consiglia di trascinare, col mouse, il punto (nella figura già indicato con S) in direzione parallela e verso opposto al vettore somma (segnato in alto a sinistra).

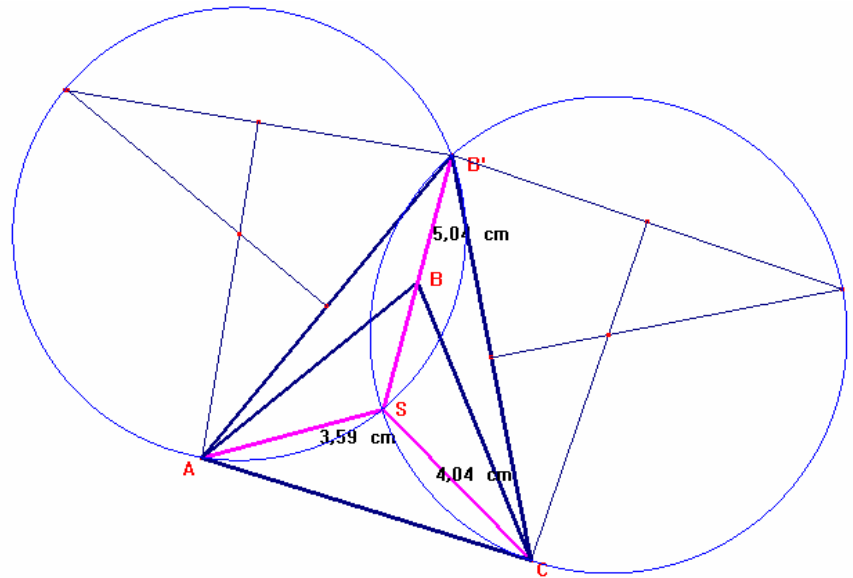
Caso particolare.

Tutti i punti sono su una stessa retta ⇒ Se sono in numero pari va bene qualunque punto compreso fra i due centrali. Infatti, pensati i punti a coppie come estremi di intervalli incapsulati, per ogni coppia va bene un punto compreso fra gli estremi, quindi andrà bene un punto compreso fra i due centrali, cioè nell'intervallo comune a d ogni coppia. Se sono in numero dispari S coincide col valore centrale (ragionando come sopra).

Si noti che la regola proposta funziona (anzi ne è ispirata) nel caso del triangolo con angoli tutti minori di 120°. Infatti tre vettori di uguale intensità uscenti da S e formanti a coppie angoli di 120° (vettori consecutivi) hanno somma zero (o, meglio, il vettore nullo). Ancora: se S è di Steiner per un triangolo, lo è pure per un altro triangolo con vertici sul prolungamento (o la riduzione) del segmento che parte da S e va ad uno dei vertici. Quindi non conta tanto la distanza da S quanto, per così dire, l'angolazione. Vedi figura 21.

FIG. 21

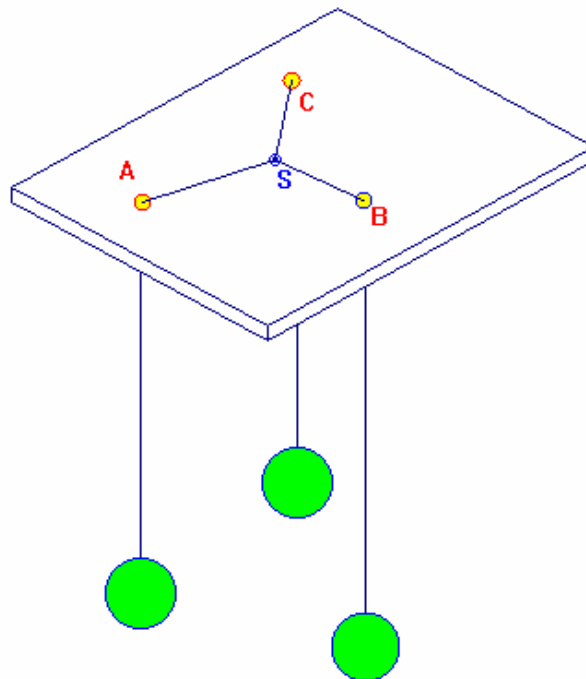
Osservazione interessante: se si "allontana" (o si avvicina) un vertice (ad es B) del doppio rispetto a S lungo la direzione SB il punto di Steiner non cambia !



Ancora più evidente è il caso del quadrilatero in cui S coincide con l'incontro delle diagonali. Da S partono 4 vettori a due a due opposti: somma zero.

Ma l'intuizione di questa particolarità di S ha avuto origine adoperando un modello analogico che si proponeva di individuare proprio il punto di Steiner. Eccone una descrizione ed una rappresentazione grafica (figura 22).

FIG. 22



Si consideri una superficie rettangolare indeformabile (nei suoi limiti !), ad esempio di legno compensato. Si pratichino alcuni fori a caso (ognuno rappresentante un punto sul piano). Si leghino dei pesetti uguali a dei fili abbastanza lunghi. Si facciano passare i fili da sotto nei fori e si colleghino tra loro in un solo nodo. Si posizioni la superficie parallelamente al suolo e si lascino liberi i pesetti. La forza di gravità farà tendere i fili (pensiamo che l'attrito sia trascurabile !) ed il nodo si posizionerà nel punto S.

Di primo acchito si potrebbe pensare che il nodo individui il baricentro, ma ciò si esclude considerando che le forze applicate al nodo sono tutte di uguale intensità, mentre abbiamo osservato che il baricentro è individuato da vettori di intensità proporzionale alla distanza di esso dai punti, distanza che, in generale, è diversa per ogni punto. Le suddette forze, poi, si annullano nell'insieme, poiché il nodo si posiziona (la fisica insegna) nel punto di equilibrio.

Con l'aiuto di CABRI, come si è detto, si è potuto verificare (nei casi generali) la caratteristica di S come descritto precedentemente.

E' chiaro che CABRI non "dimostra" nulla (semmai confuta), ma è un ottimo strumento di verifica dinamica e può aiutare a scoprire delle soluzioni a varie problematiche.