Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

Pier Mario Gandini - Andreana Zucco

Convessità e Programmazione lineare

a.a. 2000/2001

Quaderno # 6 - Giugno 2001

PREFAZIONE

In questo quaderno sono raccolte quelle lezioni del corso di Istituzioni di Geometria Superiore per l'indirizzo didattico ed applicativo (anni accademici 2000/01 e seguenti) ove la teoria della convessità, importante capitolo della geometria, trova nella programmazione lineare e in particolare nel metodo del simplesso un'interessante applicazione all'economia.
Il primo capitolo è dedicato all'esposizione delle nozioni di convessità successivamente usate. Il secondo capitolo, parte centrale del quaderno, è dedicato alla programmazione lineare. Viene prima proposto il teorema del punto estremo e poi il metodo del simplesso. Alla teoria della dualità è dedicato il terzo capitolo.

INDICE

CAPITOLO PRIMO

ALCUNE NOZIONI DI CONVESSITA'

In questo capitolo si introducono alcuni concetti base di convessità allo scopo di dare un'interpretazione geometrica al classico problema di programmazione lineare.

1.-Rappresentazione dei punti di un segmento

Nella definizione di insieme convesso interviene il concetto di segmento di una retta, per cui ricordiamo anzitutto l'equazione vettoriale parametrica della retta per due punti.
Siano a, b i punti per cui passa la retta e sia p il punto generico della retta. Il vettore p - a deve essere parallelo al vettore b - a per cui l'equazione vettoriale della retta è:

$$p - a = t\,(b - a) \qquad t \in \mathbf{R}$$

Al variare di t in **R** il punto p descrive la retta (a,b).

Se invece si ha

$$p - a = t\,(b - a) \qquad t \geq 0$$

il punto p descrive la semiretta chiusa di origine a e contenente b.

Infine se

$$p - a = t\,(b - a) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

si ha l'equazione del segmento chiuso di estremi a e b indicato con [a,b].

Scelto come origine il punto o l'espressione precedente diventa

$$p - o - (a - o) = t\,(b - o) - t(a - o) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

ossia anche

$$p - o = \lambda\,(b - o) + \mu(a - o) \qquad \text{ove } \lambda = t\,,\ \mu = 1 - t$$

e quindi con le condizioni

$$\lambda, \mu \geq 0 \qquad \lambda + \mu = 1.$$

L'insieme dei vettori p – o dell'espressione precedente dipende dai vettori a – o e b – o e il valore di tali vettori dipende dal particolare punto scelto come origine. Tuttavia tale insieme non cambia scegliendo un nuovo punto o' come facilmente si verifica:

$$p' - o' = \lambda\,(b - o') + \mu(a - o') = \lambda\,(b - o) + \mu(a - o) + \lambda\,(o - o') + \mu(o - o') =$$
$$= \lambda\,(b - o) + \mu(a - o) + (\lambda + \mu)(o - o') = (p - o) + (o - o') = p - o'$$

quindi p' = p.

In tale dimostrazione è essenziale l'ipotesi $\lambda + \mu = 1$.

In particolare scelto a come origine si ricava l'espressione precedente

$$p - a = \lambda (b - a) \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Nel seguito verrà utilizzata la scrittura

$$p = \lambda b + \mu a \quad \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1$$

in cui i punti verranno trattati come vettori.

2.-Definizione di insieme convesso ed esempi.

DEFINIZIONE 1/1.- *Un insieme* X *di punti dello spazio affine* R^n *è detto* convess*o se contenendo due punti* x_1, x_2 *contiene anche il segmento che li congiunge.*
Per quanto visto prima X è convesso se presi comunque due punti x_1, x_2 appartenenti ad X, allora tutti i punti della forma

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \qquad \lambda \geq 0 \;\; \mu \geq 0 \quad \lambda + \mu = 1$$

appartengono ad X.
Sono esempi di insiemi convessi un punto, un segmento (aperto o chiuso), una semiretta (aperta o chiusa), una retta, un poligono regolare, i poliedri regolari, tutto $\mathbf{R}^d$. Anche l'insieme vuoto si suppone convesso per convenzione. E' facile provare che i punti, i segmenti, le semirette sono gli unici sottoinsiemi convessi di **R .**

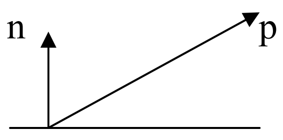
Valgono le seguenti
PROPRIETÀ 1/1.-*L'intersezione di un'arbitraria famiglia di insiemi convessi è un insieme convesso*.
Infatti se un segmento è contenuto in ogni insieme della famiglia è anche contenuto nella loro intersezione.

PROPRIETÀ 1/2 . - *Il semipiano e il semispazio sono convessi.*
Nel piano affine l'equazione vettoriale di una retta per un punto p_0 ed ortogonale ad un vettore n è data da

$$n \,.\, (p - p_0) = 0$$

dove il simbolo . sta ad indicare il prodotto scalare.
Questa equazione rende evidente la rappresentazione dei due semipiani di origine la retta r. Sia H^+ il semipiano verso il quale è rivolto il vettore n. Se il punto p appartiene ad H^+ per definizione di prodotto scalare

$$n \,.\, (p - p_0) \geq 0$$



p_0

Se invece n . $(p - p_0) \leq 0$ significa che il punto appartiene all'altro semipiano diciamolo H^-.

Nel caso in cui la dimensione d dello spazio è $d \geq 3$ l'equazione vettoriale

$$n \,.\, (p - p_0) = 0$$

caratterizza l'appartenenza di p all'iperpiano V_{d-1} che passa per p_0 ed n è un vettore della retta vettoriale complemento ortogonale di V_{d-1} .
Anche in questo caso

$$n \,.\, (p - p_0) \geq 0$$

rappresenta il semispazio chiuso verso cui è rivolto il vettore n, mentre $n \,.\, (p - p_0) \leq 0$ rappresenta l'altro semispazio.
Dimostriamo ora che un semipiano o un semispazio (aperto o chiuso) è un insieme convesso.

Consideriamo il semispazio chiuso

$$H^+ = \{p \in \mathbf{R}^d : n \,.\, (p - p_0) \geq 0 \}$$

e siano a e b due suoi punti ossia

$$(1) \qquad n \,.\, (a - p_0) \geq 0$$

$$(2) \qquad n \,.\, (b - p_0) \geq 0$$

vogliamo provare che il generico punto p del segmento [a,b] appartiene ad H^+
Esprimiamo p nella forma

$$p - p_0 = t\,(b - p_0) + (1-t)(a - p_0) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

e sostituiamo tale espressione in H^+ ,si ha utilizzando proprietà del prodotto scalare :

$$n \,.\, (p - p_0) = t\, n \,.\, (b - p_0) + (1-t) n \,.\, (a - p_0)$$

e poiché si ha che $0 \leq t \leq 1$ e valgono le disuguaglianze (1) e (2), la precedente quantità è non negativa.

PROPRIETÀ 1/3 .- *La boccia è un convesso*
Un altro esempio notevole di insieme convesso è dato dalla boccia chiusa (o aperta), ossia dall'insieme

$$B = \{ p \in \mathbf{R}^n : (p - c)^2 \leq r^2\}$$

ove c è il centro ed r il raggio della boccia.
Proviamo che se a e b sono punti di B, ossia

$$(a - c)^2 \leq r^2$$

$$(b - c)^2 \leq r^2$$

anche il generico punto p del segmento [a,b] appartiene a B.
Esprimiamo p nella forma

$$p - c = (1-t)(a - c) + t(b - c) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

ed ora calcoliamo $(p - c)^2$ tenendo conto delle proprietà del prodotto scalare:

$$(p - c)^2 = (p - c) \,.\, (p - c) = (1 - t)^2(a - c)^2 + 2t(1-t)(a - c) \,.\, (b - c) + t^2(b - c)^2 \leq$$
$$\leq (1 - t)^2 r^2 + 2t(1-t)\, r^2 + t^2 r^2 = r^2$$

quindi il punto p appartiene a B.

Anche la boccia aperta formata dai punti $p \in \mathbf{R}^n$ tali che $(p - c)^2 < r^2$ è convessa.

3.-Iperpiani di supporto e punti di frontiera di un insieme convesso.

DEFINIZIONE 1/2.-*Un iperpiano* H *è detto* iperpiano di supporto o iperpiano di appoggio o tac-piano *di un sottoinsieme chiuso convesso* K *di* $\mathbf{R}^n$ *se:*
$K \cap H$ *non è vuota e*
K *è contenuto in* H^+ *oppure* K *è contenuto in* H^-, *dove* H^+ e H^- *sono i due semispazi chiusi delimitati da* H.
Se la dimensione n=2 *si parlerà di* retta di supporto o retta di appoggio *e se la dimensione* n=3 *di* piano di supporto, piano di appoggio o tac-piano.

Nel seguito verrà dimostrata la seguente proprietà (teorema di Hahn-Banach)
Sia A un convesso chiuso e limitato, allora per ogni punto della frontiera di A passa almeno un iperpiano di supporto.

Studiamo ora due diversi tipi di punti di frontiera di un insieme convesso.

DEFINIZIONE 1/3.-*Sia* A *un convesso chiuso di* $\mathbf{R}^n$ *ed* x *un punto della frontiera di* A. *Si dice che* x è di ordine α *se il sottospazio affine, intersezione di tutti gli iperpiani di supporto di* A *in* x *è di dimensione* α . *In particolare* x *è detto* vertice *se è di ordine* $\alpha=0$ *e se invece* $\alpha=n-1$*, ossia l'iperpiano di supporto è unico, si dice che* A è liscio in x.

ESEMPI.-In un cerchio tutti i punti sono lisci, mentre il tetraedro possiede punti di frontiera di ordine 0,1,2 e la sua generalizzazione ossia l' n-simplesso avrà punti di ordine 0,1,…,n-1.

DEFINIZIONE 1/4.- *Un punto x è detto* estremo *del convesso* A *se* x *è un punto di* A *e non esistono due punti* x_1,x_2 *di* A *tali che* x *appartenga al segmento* $[x_1,x_2]$ $(x \neq x_1$ $x \neq x_2)$

OSSERVAZIONE.-Un vertice è estremo, il reciproco è falso: basta pensare ai punti di frontiera di un cerchio che sono estremi, ma non vertici. Si può invece provare che per un poliedro i vertici coincidono con i punti estremi [Berger ,III, pag.90]

4.-Combinazioni lineari convesse

Si tratta di espressioni di notevole importanza nello studio degli insiemi convessi.

DEFINIZIONE 1/5.- *Diciamo che* x *è* combinazione lineare convessa (*in breve* c.l.c.) *di* $x_1,\dots,x_r$ *punti di* $\mathbf{R}^d$ *se esistono scalari* $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbf{R}$ *tali che*

(1) $$x - o = \lambda_1(x_1 - o) + \dots + \lambda_r(x_r - o) \quad \lambda_i \geq 0 \ (i=1,2,\dots,r) \quad \sum_1^r \lambda_i = 1$$

con o *punto arbitrario.*

PROPRIETA' 1/4.- *Il punto x della definizione precedente non dipende dalla scelta del punto o.*

Dimostrazione.- Sia o' un punto diverso da o ed x' il punto che la (1) associa ad o'. Si ha:

$x' - o' = \lambda_1(x_1 - o') + \dots + \lambda_r (x_r - o') = \lambda_1[(x_1 - o) + (o - o')] + \dots + \lambda_r [(x_r - o) + (o - o')] = \lambda_1(x_1 - o) + \dots + \lambda_r (x_r - o) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)(o - o') = (x - o) + (o - o') = x - o'$,

quindi $x' = x$.

Caso particolare: le c.l.c. di 2 punti a,b sono i punti del loro segmento [a,b].

Mediante le c.l.c. si ha la seguente caratterizzazione di un insieme convesso.

PROPRIETA' 1/5.-*Un insieme è convesso se e solo se è contiene le c.l.c. dei suoi punti*.

Dimostrazione.-Supponiamo S convesso. L'enunciato è valido per c.l.c. di 2 punti (distinti o coincidenti). Ammesso valido per m punti, lo proveremo per m+1 punti.

Sia

$$p - o = \sum_1^{m+1} t_i(p_i - o) \qquad t_i \geq 0\ (i=1,\dots,m+1) \qquad \sum_1^{m+1} t_i = 1 \text{ ove } p_i \in S.$$

Se $t_{m+1} = 1$ si ha $p = p_{m+1}$ e pertanto $p \in S$.

Se $t_{m+1} \neq 1$ poniamo

$$t = 1 - t_{m+1} \qquad s_i = \frac{t_i}{t}$$

Il punto

$$q - o = \sum_1^{m} s_i(p_i - o)$$

poiché $s_i \geq 0\ (i=1,\dots,m)$ e $\sum_1^{m} s_i = 1$ è c.l.c. di m punti di S, quindi $q \in S$.

Di conseguenza il punto

$$p - o = t(q - o) + t_{m+1}(p_{m+1} - o) \text{ con } t \geq 0,\ t_{m+1} \geq 0 \text{ e } t + t_{m+1} = 1$$

è anch'esso un punto di S.

Viceversa se S contiene le c.l.c. dei suoi punti contiene in particolare le c.l.c. di 2 punti dal che si deduce che S è convesso.

5.-Definizione di n-simplesso

DEFINIZIONE 1/6.-*Diciamo che* n+1 *punti* $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ *sono* linearmente indipendenti (l.i.) *se i vettori*

$$x_2 - x_1,\ x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$$

sono l.i..

Diciamo poi n-simplesso *le c.l.c. di* n+1 *punti l.i.di* $\mathbf{R}^n$

n-simplesso=$\{x: x=\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1},\ \ \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0,\ \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1\}$.

OSSERVAZIONE 1.-Ricordiamo che i vettori

$$x_2 - x_1,\ x_3 - x_1, \ldots x_{n+1} - x_1$$

sono l.i. se l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli:

$$\lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \ldots + \lambda_{n+1}(x_{n+1} - x_1) = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \ldots, \lambda_{n+1} = 0\ .$$

Questa condizione può essere espressa dicendo che :

se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sono numeri reali tali che

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = o$$

dove $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1})$ e il simbolo o denota l'origine,

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, ossia se

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ sono numeri reali tali che

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = o \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0 \end{cases}$$

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$ è l'unica soluzione del sistema composto da un'equazione vettoriale ed un'equazione scalare.

Posto

$$x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$$

ed esprimendo in componenti l'equazione vettoriale del sistema si ottiene un sistema omogeneo di n+1 equazioni nelle n+1 incognite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \ldots + \lambda_{n+1} x_{1,n+1} = 0 \\ \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \ldots + \lambda_{n+1} x_{2,n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_{n1} + \lambda_2 x_{n2} + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n,n+1} = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Dovendo tale sistema avere solo la soluzione nulla, il determinante dei coefficienti è non nullo.

ESEMPIO.-Provare che i seguenti 4 punti sono i vertici di un 3-smplesso:

$$x_1 = (0,1,1)\ \ x_2 = (1,2,0)\ \ \ x_3 = (1,0,2)\ \ x_4 = (2,3,1).$$

La condizione può essere espressa dal sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = o \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ossia dal sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,2,0) + \lambda_3(1,0,2) + \lambda_4(2,3,1) = (0,0,0) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

che scritto in componenti diventa

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di tale sistema è non nullo (vale 4) quindi il sistema omogeneo ha solo la soluzione nulla, per cui i punti sono vertici di un 3-simplesso.

OSSERVAZIONE 2.-Se invece si considerano in $\mathbf{R}^n$ k punti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ con $k \geq n+2$ i vettori $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$, ..., $a_1 - a_k$ sono sempre linearmente dipendenti (l.d.), ossia esistono valori non tutti nulli delle variabili $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ tali che

$$\alpha_2 (a_1 - a_2) + \alpha_3 (a_1 - a_3) + \ldots + \alpha_k (a_1 - a_k) = o$$

ossia con lo stesso procedimento prima seguito, il sistema omogeneo nelle $k > n+1$ incognite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = o \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non tutte nulle.

OSSERVAZIONE 3.-Nel caso in cui n=1, si ha che l'1-simplesso coincide con il segmento.

PROPRIETA'1/6.-*Il* 2-simplesso *coincide con il triangolo della geometria elementare.*

Dimostrazione.-Siano a,b,c 3 punti non allineati, ossia b-a, c-a sono due vettori l.i. e sia x un punto del 2-simplesso

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta(b - o) + \gamma(c - o) \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0 \quad \alpha+\beta+\gamma=1$$

scegliendo come origine a, x si scrive

$$x = a + \beta(b - a) + \gamma(c - a) \quad \beta,\gamma \geq 0 \quad \beta+\gamma \leq 1.$$

Per quanto visto se $\beta+\gamma=1$ ($\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$) il punto x appartiene al segmento [b,c].
Introduciamo il riferimento affine di origine a e avente come base i vettori l.i. b-a,c-a
Il punto x dato da $x = a + \beta(b - a) + \gamma(c - a)$ ha coordinate (β, γ).
Poiché $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ si tratta di un punto del I quadrante del sistema di riferimento.
Ora poiché l'equazione $\beta+\gamma=1$ rappresenta la retta per il punto b di coordinate (1,0) e per il punto c di coordinate (0,1) la disequazione $\beta+\gamma \leq 1$ rappresenta il semipiano individuato dalla retta $\beta+\gamma=1$ (ossia per i punti b e c) e contenente l'origine ossia il punto a. Il punto x dovendo appartenere anche a tale semipiano, è un punto del triangolo a,b,c.
Viceversa se si considera il triangolo non degenere a,b,c ed un suo punto x si ha che:
i)se x è un punto della frontiera del triangolo, ad esempio x appartiene ad [a,b], x si scrive come c.l.c. di a,b,c ove il coefficiente di c è nullo,
ii)se x è un punto interno del triangolo a,b,c detto y il punto di intersezione della retta (a,x) con [b,c] si ha

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta(y - o) \quad \alpha,\beta \geq 0 \quad \alpha+\beta=1$$

e poiché $y \in [b,c]$

$$y = o + \gamma(b - o) + \delta(c - o) \quad \delta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \delta + \gamma = 1$$

segue che

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta\gamma(b - o) + \beta\delta(c - o)$$

$$\text{ove } \alpha \geq 0,\ \beta\gamma \geq 0,\ \beta\delta \geq 0,\ \alpha + \beta\gamma + \beta\delta = 1$$

ossia x è un punto del 2-simplesso.

OSSERVAZIONE 4.-In modo analogo si ottiene che il 3-simplesso coincide con il tetraedro.

ESEMPIO.- Dati i punti a(1,0), b(3,0), c(1,4), il triangolo avente questi vertici è formato dai punti p(x,y) tali che:

$p - o = \alpha(a - o) + \beta(b - o) + \gamma(c - o) \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0 \quad \alpha+\beta+\gamma=1$, ossia tali che

$$\begin{cases} x = \alpha + 3\beta + \gamma \\ y = 4\gamma \\ \alpha,\beta,\gamma \geq 0 \quad \alpha+\beta+\gamma=1 \end{cases}$$

Ad esempio il punto di coordinate (2,2) appartiene al triangolo dato che il precedente sistema con x=y=2 ammette la soluzione $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = ½$.
Così pure il punto (2,1) che si ottiene per $\alpha = 1/4$, $\beta = ½$, $\gamma = ¼$ appartiene al triangolo mentre il punto (4,4) non è interno al triangolo perché si ottiene per $\alpha = -3/2$, $\beta = 3/2$, $\gamma = 1$.
Per $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ si ottiene invece il baricentro del triangolo.

6.-Inviluppo convesso

Ad un qualsiasi insieme di punti X si può associare un insieme convesso che gode anche di alcune proprietà del corrispondente insieme X.

DEFINIZIONE 1/7.-*Si dice* inviluppo convesso *di un insieme* X *di* $\mathbf{R}^n$ *il più piccolo convesso che contiene* X *e si scrive* conv(X).
Quindi conv(X) è anche l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti X.
In particolare se X è formato da 2 punti {a,b}, conv(a,b) è il segmento di estremi a e b, che si indica anche con [a,b].

Un modo per trovare l'inviluppo convesso è dato dalla seguente proprietà.

PROPRIETA'1/7.-*L'inviluppo convesso di un insieme* X *coincide con le c.l.c.di punti di* X.

Ossia conv(X) *coincide con l'insieme*

$$A = \{ \sum_{1}^{k} \lambda_i x_i : \forall i \ \ x_i \ \in X, \forall i \ \ \lambda_i \ \geq 0 \ , \ \sum_{1}^{k} \lambda_i = 1, \forall \ k \in N\}.$$

Dimostrazione.-Si verifica facilmente che A è convesso. Infatti dai passaggi seguenti si ricava che:
se y e z sono punti di A e $x \in [y,z]$, anche $x \in A$.

$$y=\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_s y_s \quad y_1, \ldots, y_s \in X, \ \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0 \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$$
$$z=\mu_1 z_1 + \ldots + \mu_t z_t \quad z_1, \ldots, z_t \in X, \ \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_t \geq 0 \quad \mu_1 + \ldots + \mu_t = 1$$
$$x = \alpha y + (1-\alpha) z \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

da cui si ricava

$$x=\alpha(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_s y_s) + (1-\alpha)(\mu_1 z_1 + \ldots + \mu_t z_t) =$$
$$= \alpha\lambda_1 y_1 + \ldots + \alpha\lambda_s y_s + (1-\alpha)\mu_1 z_1 + \ldots + (1-\alpha)\mu_t z_t$$

ossia x è combinazione lineare di punti di X i coefficienti sono tutti positivi e la loro somma è $\alpha(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s) + (1-\alpha)(\mu_1 + \ldots + \mu_t) = 1$, quindi anche x è combinazione lineare convessa di punti di X.
Inoltre A contiene X in quanto ogni elemento $x \in X$, pensato come $x = 1x$ è c.l.c. di punti di X.
Infine ogni convesso B che contiene X, contenendo per la prop.1/5 tutte le c.l.c. di suoi punti, contiene in particolare anche le c.l.c. di punti di X e quindi contiene A.
Allora

$$A = \mathrm{conv}(X).$$

OSSERVAZIONE.- La scrittura di conv(X) come c.l.c. di punti di X non è unica.
Se ad esempio X = {a,b,c} è formato da 3 punti distinti non allineati, conv(X) è il triangolo di vertici a,b.c . Il baricentro g è definito come la c.l.c. dei vertici con coefficienti tutti uguali ad $\frac{1}{3}$, quindi si scrive come:

$$g = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}\left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

le varie uguaglianze stanno ad indicare che

$$g \in [a, \frac{b+c}{2}], \ g \in [b, \frac{a+c}{2}], \ g \in [c, \frac{a+b}{2}]$$

e la conseguenza geometrica è che le tre mediane si incontrano nel baricentro del triangolo.

7.-Il teorema di Carathéodory

Tale teorema permette di semplificare la scrittura dell'inviluppo convesso di un dato insieme.

TEOREMA 1/8 (Carathéodory).-*Sia* x *un punto dell'inviluppo convesso di un insieme* X *contenuto in* $\mathbf{R}^n$*, allora* x *si può scrivere come c.l.c. di (al più)* n+1 *punti di* X.

Quindi

$$\text{conv}(X)=\{\ \sum_1^{n+1}\lambda_i x_i : \forall i\ \ x_i \in X,\ \forall i\ \ \lambda_i \geq 0 \quad \sum_1^{n+1}\lambda_i=1\}.$$

Tale teorema ci assicura che se X è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ ogni punto di conv(X) è.
-un punto di X,
-oppure un punto di un segmento i cui estremi sono due punti di X
-oppure un punto interno di un triangolo i cui vertici sono punti di X.

Dimostrazione.-Per la prop.1/7 per ogni $x \in \text{conv}(X)$ si ha

$$x=\sum_1^{k}\lambda_i x_i \quad (x_i \in X) \quad \lambda_i \geq 0 \quad \sum_1^{k}\lambda_i=1,$$ ove k è un intero positivo.

Scopo del teorema è trovare per x un'analoga espressione con $k \leq n+1$.
Supponiamo quindi che

$$x=\sum_1^{k}\lambda_i x_i \text{ con } k>n+1.$$

Poiché i punti $x_1,\dots,x_k$ sono linearmente dipendenti essendo $k>n+1$ esistono degli scalari α_i (i=1,…,k) non tutti nulli tali che

$$\begin{cases}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = o\\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0\end{cases}$$

ossia posto

$$x_i=(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$$

ed esprimendo in componenti l'equazione vettoriale del sistema si ottiene un sistema omogeneo di n+1 equazioni nelle k>n+1 incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$$\begin{cases}\alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_k x_{1,k} = 0\\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_k x_{2,k} = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \dots + \alpha_k x_{n,k} = 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0\end{cases}$$

che ammette soluzioni non tutte nulle.
Mediante tali scalari costruiamo gli insiemi I_i di numeri reali (semirette chiuse) tali che

$$I_i=\{\ \tau \in \mathbf{R}: \tau\alpha_i + \lambda_i \geq 0\}$$

e poi la loro intersezione $I = \cap I_i$

L'insieme I è chiuso,in quanto intersezione finita di chiusi, non vuoto perché il numero zero appartiene ad ogni I_i e I non è tutto **R** perché almeno un α_i non è zero.
Sia τ_0 un punto di frontiera di I e sia j un indice per cui $\tau_0\alpha_j + \lambda_j = 0$.
Allora si ha

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \tau_0 o = \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \tau_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k) \\ &= (\lambda_1 + \tau_0\alpha_1)x_1 + (\lambda_2 + \tau_0\alpha_2)x_2 + \dots + (\lambda_k + \tau_0\alpha_k)x_k \end{aligned}$$

In tale espressione i coefficienti sono tutti positivi o nulli e il j-esimo termine è nullo, mentre per costruzione

$$(\lambda_1 + \tau_0\alpha_1) + (\lambda_2 + \tau_0\alpha_2) + \dots + (\lambda_k + \tau_0\alpha_k) = 1 .$$

Si ottiene perciò una c.l.c. che dà il vettore x, i cui termini sono k – 1.
Tale procedimento può essere ripetuto fino ad esprimere x come c.l.c. di al più n+1 punti di X.

ESEMPIO. Dati i punti a(1,1) b(0,1) c(-1,0) d (3,0) esprimere il baricentro g in funzione di (al più) 3 di essi.
Ricordiamo che si dice baricentro (geometrico) di n punti $p_1, p_2, \dots p_n$ del piano il punto g dato dalla c.l.c. di $p_1, \dots, p_n$ con coefficienti tutti uguali ad $\frac{1}{n}$.

Soluzione. Il baricentro g ha coordinate

$$\frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(0,1) + \frac{1}{4}(-1,0) + \frac{1}{4}(3,0) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Consideriamo una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1) + \alpha_3(-1,0) + \alpha_4(3,0) = (0,0) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

ossia in componenti

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

ad esempio consideriamo la soluzione

$$\begin{cases} \alpha_1 = -4 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = -1 \\ \alpha_4 = 1 \end{cases}$$

Tale soluzione permette di costruire gli insiemi

$$I_1 = \{-4\tau + \frac{1}{4} \geq 0\} = \{\tau \leq \frac{1}{16}\}$$

$$I_2 = \{4\tau + \frac{1}{4} \geq 0\} = \{\tau \geq -\frac{1}{16}\}$$

$$I_3 = \{-\tau + \frac{1}{4} \geq 0\} = \{\tau \leq \frac{1}{4}\}$$

$$I_4 = \{\tau + \frac{1}{4} \geq 0\} = \{\tau \geq -\frac{1}{4}\}$$

Come punto di frontiera di $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$ si può scegliere $\tau_0 = -\frac{1}{16}$ (oppure $\tau_0 = \frac{1}{16}$) e si ottiene

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(-4)\right)(1,1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}4\right)(0,1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(-1)\right)(-1,0) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)(3,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{5}{16}(-1,0) + \frac{3}{16}(3,0),$$

quindi g è un punto del triangolo di vertici a,c,d.

8.-Proprietà dell'inviluppo convesso

Come corollario del teorema di Carathéodory si ha la seguente proprietà che vale per i compatti di $\mathbf{R}^n$ ossia per gli insiemi chiusi e limitati.

PROPRIETA' 1/9.-*Se* S *è un compatto di* $\mathbf{R}^n$ *, anche* conv(S) *lo è.*

Dimostrazione. -Il sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$ definito da

$$B = \{x: x=(\lambda_1,\lambda_2, \dots,\lambda_{n+1}), \quad \lambda_i \geq 0 \text{ per } 1\leq i\leq n+1, \quad \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n+1}=1\}$$

è un compatto di $\mathbf{R}^{n+1}$ perché è un n-simplesso di vertici

$x_1=(1,0,\dots,0)$, $x_2=(0,1,0,\dots,0),\dots, x_{n+1}=(0,0,\dots,0,1)$,

nell'iperpiano

$H =\{ (\lambda_1 ,\lambda_2 , \dots,\lambda_{n+1}) : \lambda_1+\lambda_2 +\dots+\lambda_{n+1} =1\}$ di $\mathbf{R}^{n+1}$.

In particolare per n=2 coincide con il triangolo del piano $H =\{ (\lambda_1 ,\lambda_2 , \lambda_3) : \lambda_1+\lambda_2 +\lambda_3 =1\}$ di $\mathbf{R}^3$.

L'insieme B x S^{n+1} è un compatto contenuto in $\mathbf{R}^{n+1}$ x S^{n+1} quindi l'immagine di tale compatto mediante la funzione continua f:

$$(\lambda_1 , \lambda_2 ,\dots,\lambda_{n+1}, x_1 ,x_2 ,\dots, x_{n+1}) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 +\dots+\lambda_{n+1} x_{n+1}$$

è un compatto.

Per il teorema visto f manda B x S^{n+1} in conv(S) che perciò è compatto.

OSSERVAZIONE 1.-Se S è limitato, anche conv(S) è limitato.

Infatti se S è limitato, è contenuto in una boccia B che è un insieme convesso, ma conv(S) è il più piccolo convesso che contiene S, quindi conv(S) è contenuto in B.

OSSERVAZIONE 2.-Se S è chiuso,non è detto che conv(S) lo sia: supponiamo che S sia costituito dai punti interni e contorno di un ramo di iperbole e dal suo centro, in tal caso S è chiuso, non conv(S), perché non contiene gli asintoti.

PROPRIETA' 1/10.-*Se* S *è un convesso compatto, allora* S=conv(frS), *ove* frS *è la frontiera di* S.

Dimostrazione.-Siano x un punto di S e D una retta per x, appartenente alla varietà lineare generata da S.Ora D $\cap$S è un convesso chiuso limitato di D, pertanto è un segmento[u,v] contenente x, quindi x è c.l.c. di due punti u e v, appartenenti alla frontiera di S, ossia x $\in$ conv(frS).

Viceversa essendo S chiuso, fr S $\subset$ S quindi

$$\text{conv(fr S)} \subset \text{conv(S)} = S.$$

TEOREMA 1/11(Krein e Milman).-*Un convesso compatto è l'inviluppo convesso dei suoi punti estremi:*

$$A = \mathrm{conv}(\,\mathrm{Extr}(A))$$

ove con Extr(A) *si indica l'insieme dei punti estremi del convesso* A.

Dimostrazione.-Si verifica inizialmente mediante la doppia inclusione che per ogni iperpiano H di supporto di un convesso chiuso qualsiasi A si ha:

$$\mathrm{Extr}(A \cap H) = \mathrm{Extr}(A) \cap H$$

Proviamo che:

$$\mathrm{Extr}(A \cap H) \subseteq \mathrm{Extr}(A) \cap H$$

Infatti se $y \notin \mathrm{Extr}(A) \cap H$:

$$\text{i)}y \notin H \rightarrow y \notin A \cap H \rightarrow y \notin \mathrm{Extr}(A \cap H)$$

oppure

$$\text{ii)}y \notin \mathrm{Extr}(A)$$

in tal caso ci sono due possibilità:

$$y \notin A \rightarrow y \notin A \cap H \rightarrow y \notin \mathrm{Extr}(A \cap H),$$

oppure

$$y \in A \text{ ed } \exists\, a,b \in A : y \in [a,b]\ y \neq a,\ y \neq b$$

in questo caso poiché H è un iperpiano di supporto di A, per $[a,b] \cap H$ possono presentarsi tre situazioni : l'intersezione è vuota e quindi $y \notin H$, l'intersezione è tutto [a,b] e allora il segmento è tutto contenuto in $A \cap H$ e quindi $y \notin \mathrm{Extr}(A \cap H)$ oppure $[a,b] \cap H$ è un punto estremo ossia il punto a oppure il punto b ed in tal caso $y \notin H$. In tutti e tre i casi $y \notin \mathrm{Extr}(A \cap H)$.

Proviamo ora che

$$\mathrm{Extr}(A) \cap H \subseteq \mathrm{Extr}(A \cap H)$$

Infatti se $x \notin \mathrm{Extr}(A \cap H)$ si ha:

i)$x \notin A \cap H \rightarrow x \notin A$ oppure $x \notin H \rightarrow x \notin \mathrm{Extr}(A)$ oppure $x \notin H \rightarrow x \notin \mathrm{Extr}(A) \cap H$

oppure

ii)$x \in A \cap H$ ed $\exists\, c,d \in A \cap H$: $x \in [c,d]$ $x \neq c$, $x \neq d \rightarrow x \in A$ ed $\exists\, c,d \in A : x \in [c,d]$ $x \neq c$, $x \neq d \rightarrow x \notin \mathrm{Extr}(A) \rightarrow x \notin \mathrm{Extr}(A) \cap H$

Il teorema si prova per induzione sulla dimensione n dello spazio.

Per n=1, A è un segmento [a,b] , Extr(A)={a,b} in quanto gli estremi di un intervallo chiuso sono i suoi estremi nel senso della definizione 1/4 e poiché

$$A = \mathrm{conv}(a,b)$$

in questo caso il teorema è verificato.

Supponiamo vero il teorema in dimensione n-1 e lo proviamo in dimensione n.

Poiché $\mathrm{Extr}(A) \subset A$ ed A è convesso

$$\mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A)) \subset A.$$

Per provare l'altra inclusione dapprima si prova che

$$\mathrm{fr}A \subset \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A)) \tag{1}$$

Sia x un punto della frontiera di A ed H un'iperpiano di appoggio di A in x (che esiste per il teorema di Hahn-Banach), allora $A \cap H$ è un convesso di H di dimensione al più n-1 e per l'ipotesi induttiva

$$\mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A \cap H)) = A \cap H$$

quindi

$x \in \mathrm{fr}A$ e per costruzione $x \in A \cap H = \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A \cap H)) = \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A) \cap H) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A))$ e la (1) è verificata.

Poiché per la proprietà 1/10 si ha

$$A = \mathrm{conv}(\mathrm{fr}\, A)$$

considerando l'inviluppo convesso di ambo i membri di (1) si ha

$$A \subset \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(A))$$

da cui segue la tesi.

9-Politopi convessi

Lo studio dei politopi convessi ha ricevuto un considerevole impulso per le sue applicazioni in matematica economica.

DEFINIZIONE 1/8.-*Un* politopo *convesso è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti. Nel piano il politopo è detto* poligono, *nello spazio è detto* poliedro.

TEOREMA 1/12.-*L'intersezione X di un numero finito di semispazi chiusi è un convesso chiuso con un numero finito di punti estremi. Se X è limitata, allora* X *è un politopo.*

Dimostrazione.- X è chiuso e convesso perché intersezione di un numero finito di convessi chiusi.

Proveremo che X ha un numero finito di punti estremi applicando il metodo di induzione alla dimensione dello spazio. In dimensione uno i semispazi chiusi sono semirette e la loro intersezione può essere o una semiretta o un segmento o un punto. In ogni caso i punti estremi sono uno o due.

Ammettiamo vero il risultato in dimensione n-1 e lo proviamo in dimensione n.

Poniamo $X = \cap H_i^+$ ove i= 1,…,n e H_i^+ è il semipiano chiuso determinato dall'iperpiano H_i. Supporremo che tutti i semispazi concorrano all'intersezione e che X non sia vuoto. Poiché $\cap(H_i^+ - H_i)$ è un aperto contenuto in X, i punti estremi di X, che sono particolari punti di frontiera di X, devono appartenere ad almeno H_i . .

Se proveremo che $(\mathrm{Extr}\, X) \cap H_i$ è finito per ogni indice i, avremo allora che ExtrX è finito. Dato che ogni H_i è iperpiano di supporto per X abbiamo che

$(\mathrm{Extr}\, X) \cap H_i = \mathrm{Extr}(X \cap H_i)$.

Ma $X \cap H_i = \cap(H_j^+ \cap H_i)$ (ove nella prima intersezione a secondo membro j= 1,…,i-1,i+1,…n) risulta essere intersezione di un numero finito di semispazi chiusi dell' iperpiano H_i che ha dimensione n-1. $\mathrm{Extr}(X \cap H_i)$ è pertanto finito e la prima parte del teorema è dimostrata.

Per la seconda parte c'è solo da osservare che X è compatto convesso con un numero finito di punti estremi. La tesi segue allora dal teorema di Krein –Milman.

10-Il Teorema di Hahn-Banach.

Diamo prima una versione di questo teorema nel caso di due corpi convessi disgiunti.

DEFINIZIONE 1/9.- *Si dice* corpo convesso di $\mathbf{R}^n$ *un suo sottoinsieme compatto (ossia chiuso e limitato) convesso ad interno non vuoto*.
Ad esempio l'ellisse piena è un corpo convesso in $\mathbf{R}^2$, non in $\mathbf{R}^3$.

DEFINIZIONE 1/10.- *Dati due convessi* A *e* B *diciamo che* l'iperpiano H separa (*rispettivamente* separa strettamente) A e B , *se* A *e* B *sono in semispazi chiusi* (*rispettivamente* aperti) *diversi determinati da* H.

TEOREMA 1/13 (Hahn-Banach).-*Dati due corpi convessi disgiunti esiste un iperpiano che li separa strettamente.*

Dimostrazione.- Siano H e K i corpi convessi. Essendo limitati in tal caso la distanza

$$d(H,K) = \inf \{d(x,y): x \in H \text{ ed } y \in K\}$$

è positiva, allora esistono due punti $u \in H$ e $v \in K$ di minima distanza, ossia tali che

$$d(u,v) = d(H,K).$$

Indichiamo con $w = \frac{u+v}{2}$ il punto medio del segmento [u,v] e con P l'iperpiano per w ortogonale ad u-v.
L'iperpiano P non può avere punti comuni con H e K: se per assurdo esistesse un punto z comune a P e K , il segmento [v,z] sarebbe contenuto in K e il punto u avrebbe da K distanza minore della distanza di u da v considerando che in nel triangolo u,v,z la distanza di u da [v,z] è minore del lato [u,v].

OSSERVAZIONE-Il teorema vale anche se si ha un corpo convesso ed un punto che non gli appartiene.

Altra versione del teorema di Hahn-Banach.

TEOREMA 1/14.-*Sia* H *un corpo convesso di* $\mathbf{R}^n$ *, allora per ogni punto della frontiera passa almeno un tac-piano di* H.

Dimostrazione.-Si dimostra per induzione sulla dimensione n.
Se n=1, allora H è un intervallo e un estremo dell'intervallo è al tempo stesso il tac-piano desiderato.
Supponiamo vero il teorema per corpi convessi in $\mathbf{R}^{n-1}$ ($n \geq 2$) e consideriamo un arbitrario corpo convesso H in $\mathbf{R}^n$.

Sia a un punto della frontiera di H e indichiamo con H_0 l'intersezione di H con il sottospazio $x_n=0$. Senza mancare di generalità supponiamo che l'origine o sia un punto interno di H e che il punto a appartenga al sottospazio $x_n=0$.
H_0 è un corpo convesso, perché intersezione di H con un iperpiano, quindi per l'ipotesi di induzione esiste in a un iperpiano P_0 in $x_n=0$ che è un tac-piano per H_0 .
P_0 non passa per o, perché punto interno ed avrà un'equazione del tipo

$$P_0 : a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{n-1}x_{n-1} = 1$$

E per ogni punto x di H_0 si avrà per esempio :

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{n-1}x_{n-1} \leq 1$$

Consideriamo in H due punti

$$y=(y_1,\ldots,y_{n-1} ,y_n) \text{ con } y_n >0$$
$$z=(z_1,\ldots,z_{n-1} ,z_n) \text{ con } z_n <0$$

Costruiamo ora il punto t del segmento [y,z] che sta su $x_n=0$
Posto

$$\theta = (-z_n):(y_n-z_n) \quad \eta=(y_n):(y_n-z_n)$$

si ha ovviamente

$$\theta > 0, \eta > 0 \text{ e } \theta + \eta =1$$

quindi il punto

$$t =\theta y + \eta z$$

appartiene al segmento [y,z] e poiché

$$\theta y_n + \eta z_n = t_n =0$$

il punto t trovato sta su $x_n=0$, appartiene ad H_0 , allora

$$a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_{n-1}t_{n-1} \leq 1$$

ossia

$$a_1 (\theta y_1 + \eta z_1)+a_2(\theta y_2 + \eta z_2)+\ldots+a_{n-1}(\theta y_{n-1} + \eta z_{n-1}) \leq 1.$$

dalla precedente disuguaglianza si ha:

$$\theta (a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}) + \eta(a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1}) \leq 1,$$

ossia

$$(-z_n) (a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}):(y_n-z_n) + (y_n) (a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1}):(y_n-z_n) \leq 1,$$

oppure anche

$$(-z_n) (a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1})+ (y_n) (a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1}) \leq y_n-z_n,$$

ossia

$$(-z_n) (a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1} -1)+ (y_n) (a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1} -1)\leq 0$$

dunque per ogni $y \in H$ con $y_n>0$ e per ogni $z\in H$ con $z_n<0$ si ha:

$$(a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1} -1) : (y_n)\leq (a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1} -1):(z_n).$$

Allora esiste un numero reale che indichiamo con $-a_n$ tale che

$$(a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1} -1) : (y_n) \leq -a_n \leq (a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1} -1):(z_n).$$

Da ciò segue

$$a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}+a_ny_n \leq 1$$
$$a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{n-1}z_{n-1}+a_nz_n \leq 1.$$

Allora l'iperpiano

$$P : a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}+a_nx_n = 1$$

è un tac-piano di H perché tutti i punti di H stanno in uno stesso semispazio ed il punto a sta in P, infatti le sue coordinate soddisfano P_0 quindi anche P, essendo la sua n-esima coordinata zero.

Dal teorema precedente segue una nuova caratterizzazione dei corpi convessi

PROPRIETÀ 1/15.- *Sia* X *un compatto di* $\mathbf{R}^n$ *ad interno non vuoto,* X *è convesso se e solo se per ogni punto della frontiera passa un iperpiano di supporto di* X.

Dimostrazione.-Occorre solo più provare che se X gode della proprietà detta, X è convesso. Ragioniamo per assurdo, supponiamo che esista un segmento [a,b] con $a \in X$, $b \in X$ e un punto c del segmento [a,b] tale che c non appartenga ad X. Sia x un punto interno di X non sulla retta (a,b). Esiste almeno un punto y sulla frontiera di X appartenente al segmento [c,x] ed y è interno al triangolo di vertici a,b,x. Ma ogni iperpiano per y separa un vertice del triangolo dagli altri due, per cui non è di supporto, contro l'ipotesi.

BIBLIOGRAFIA

M.BERGER, Géométrie, Cedic Nathan, Paris,(1977)
T.BONNESEN,W.FENCHEL, Theory of convex bodies, BCS Associates, Moscow, Idaho,USA,(1987)
H.G.EGGLESTON, Convexity, Cambridge, England,(1958)
P.GRUBER, G.LEKKERKERKER, Geometry of number, North Holland Matematical Library, (1987).

.

CAPITOLO SECONDO
PROGRAMMAZIONE LINEARE

In questo capitolo esporremo prima il classico problema di programmazione lineare e mostreremo che l'insieme delle soluzioni ammissibili è un insieme poligonale convesso. Con il teorema del punto estremo daremo un primo metodo per risolvere tale problema. Poiché però tale metodo non è sempre praticabile esporremo allora il metodo del simplesso illustrandolo anche con esempi e dando tutte le relative giustificazioni. Affronteremo quindi il problema della determinazione di una soluzione di base ammissibile. Ulteriori esempi chiudono il capitolo.

1.-Prime definizioni e proprietà.

Il classico problema di programmazione lineare consiste nel trovare il massimo o il minimo della funzione

$$Z= c_1x_1+c_2x_2+\dots . c_nx_n +z_0,$$

ove le c_i per $1 \leq i \leq n$ e z_0 sono numeri reali assegnati, le variabili x_i possono assumere solo valori non negativi e devono verificare il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

La funzione Z , che è una funzione di R^n in R, è detta funzione obiettivo e le disequazioni del sistema sono i vincoli del problema.

DEFINIZIONE 2/1.- *Una soluzione del sistema dei vincoli formata da numeri reali non negativi viene detta una* soluzione ammissibile *del problema di programmazione lineare.*

PROPRIETÀ 2/1.-*L'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di programmazione lineare è un insieme* A *convesso chiuso con un numero finito di punti estremi. Se limitato,* A *è politopo convesso..*

Dimostrazione.- Ciascuna delle disequazioni del sistema così come ciascuna delle condizioni di non negatività definisce un semispazio chiuso di R^n. L'insieme delle soluzioni ammissibili è intersezione di tali semispazi chiusi. La tesi segue allora dal Teorema 1.12.

OSSERVAZIONE.- Se il precedente insieme è vuoto il problema non ha soluzioni.

Indichiamo con X l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di programmazione lineare e supponiamo che Z non sia costante su X.

PROPRIETA' 2/2.- *Se X è limitato, Z assume in X valore massimo e minimo*
Dimostrazione.- Basta osservare che X è compatto e Z è continua.

PROPRIETÀ 2/3.- *I valori che la funzione obiettivo Z assume all'interno di un segmento sono compresi fra i valori che la funzione assume agli estremi del segmento.*

Dimostrazione.- Sia I il segmento di estremi a $(a_1,a_2,\dots a_n)$ e b $(b_1,b_2,\dots b_n)$. Allora le coordinate del generico punto p $(x_1 , x_2, \dots,x_n)$ interno ad I sono date da

$$x_i = \lambda a_i+ (1- \lambda) b_i \quad \text{con } 0 < \lambda< 1 \text{ per } i=1,\dots,n.$$

Poniamo

$$Z(a)=\alpha \text{ e } Z(b)=\beta, \text{ supponiamo } \alpha \le \beta$$

e proviamo che $\alpha \le Z(p) \le \beta$.
Risulta:
$Z(x_1,x_2,\dots,x_n)=c_1(\lambda a_1+ (1- \lambda) b_1)+c_2 (\lambda a_2+ (1- \lambda) b_2)+\dots+c_n (\lambda a_n+ (1- \lambda) b_n) =$
$\lambda(c_1a_1+c_2a_2+\dots c_na_n) +(1-\lambda) (c_1b_1+c_2b_2+\dots c_nb_n) =\lambda \alpha +(1-\lambda)\beta$.
Poiché $0<\lambda,1-\lambda >0$ e $\alpha \le \beta$ è immediato verificare che $\alpha \le \lambda\alpha+(1 -\lambda)\beta$ e che $\lambda\alpha + (1-\lambda) \beta \le \beta$.

OSSERVAZIONE.- Se i valori che Z assume agli estremi del segmento sono uguali si ha che in ogni punto del segmento Z assume sempre lo stesso valore. Se invece tali valori sono diversi il valore che Z assume in un punto interno al segmento è strettamente maggiore del più piccolo e strettamente minore del più grande dei due valori assunti agli estremi. La dimostrazione di quest'ultimo fatto è simile a quella della proprieta' precedente ove si assuma $\alpha < \beta$.

PROPRIETA' 2.4.- *Se la funzione Z è costante su una d-sfera di* R^d *, è costante su* R^d .

Dimostrazione . Siano c il centro della d-sfera e p un punto ad essa esterno. Supponiamo che in p la funzione Z assuma valore α diverso da quello β assunto sulla sfera. Per l'osservazione precedente il valore di Z sui punti interni al segmento pc sono diversi da quello β assunto in c. Poiché tale segmento interseca la sfera in un suo raggio si ha un assurdo.

PROPRIETÀ 2/5.-*Gli eventuali valori di massimo e di minimo di una funzione obiettivo Z vengono raggiunti in un estremo di X .*

Dimostrazione .- La dimostrazione viene fatta per induzione sulla dimensione di X. Proviamolo quindi prima quando dim X= 1. Essendo X un sottoinsieme di R chiuso e convesso si ha che o è un segmento chiuso oppure è una semiretta con la sua origine. Non può essere tutto R perché le variabili assumono solo valori positivi

Nel caso del segmento la tesi segue dalla proprietà 3.

Nel caso della semiretta indichiamo con o l'origine della semiretta e proviamo che o la funzione obbiettivo Z è costante su tutta la semiretta (e quindi o, unico suo punto estremo è punto di massimo e di minimo) oppure che nessun punto p della semiretta diverso da o può essere punto di massimo o di minimo per Z.
Supposto Z non costante, ammettiamo che p sia punto di massimo e consideriamo due altri punti a e b della semiretta con a appartenente al segmento (o,p) e b no e tali che $Z(a) \leq Z(p)$ e $Z(b) \leq Z(p)$.
Ora se $Z(a)< Z(b)$, per l'osservazione alla proprietà 3, si ha, essendo p interno al segmento (a,b), che $Z(p) < Z(b)$, assurdo.
Se invece $Z(a)=Z(b)$, la funzione Z è costante su tutto il segmento chiuso di estremi a e b, quindi per la proprietà 4 è costante su tutta la retta, ciò che abbiamo escluso.
Supposto vero il risultato per dimX = d-1, proviamolo quando dim X = d.
X è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi $X=\bigcap_1^m H_i^+$, ove H_i^+ rappresenta il semispazio delimitato dall'iperpiano H_i.
Consideriamo un punto p appartenente a $\bigcap_1^m (H_i^+ - H_i)$.
Poiché Z non è costante , affermiamo che è possibile determinare un segmento contenuto in X , contenente p e tale che i valori che Z assume ai suoi estremi sono diversi fra loro. Se così non fosse esisterebbe una sfera di centro p contenuta in $\bigcap_1^m (H_i^+ - H_i)$ ove la Z è costante ; ma allora Z sarebbe costante ovunque.
Indichiamo con r la retta per p contenente il segmento prima determinato. I valori che Z assume su punti differenti di r sono fra loro diversi. Ora $r\cap X$ è un convesso chiuso di r quindi, tenuto conto delle condizioni di positività delle variabili, o è un segmento con gli estremi sul contorno di X , cioè sugli iperpiani H_i, oppure è una semiretta con l'origine su un iperpiano H_i.
Nel primo caso il valore Z(p) è strettamente compreso fra i valori che Z assume agli estremi del segmento, nel secondo Z è illimitata superiormente o inferiormente e il valore Z(p) è strettamente maggiore o minore del valore che Z assume nell'origine della semiretta. Pertanto gli eventuali massimi o minimi di Z sono raggiunti in punti che appartengono ad almeno un H_i.
Ora $X \cap H_i$ è, per ogni i, intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di H_i, pertanto per l'ipotesi induttiva il massimo o il minimo di Z su tale convesso viene raggiunto in un suo punto estremo.
Ma poiché è noto che $\text{Extr}\,(X \cap H_i) = \text{Extr}\,X \cap H_i$, tali punti sono anche punti estremi di X. Segue la tesi.

Per risolvere il più generale problema di programmazione lineare possiamo pensare di rappresentare l'insieme delle soluzioni ammissibili in un riferimento cartesiano ortogonale e calcolare i valori che la funzione obiettivo assume sugli

estremi di tale insieme che sono in numero finito. Se X è limitato Z raggiunge il massimo ed il minimo in uno di tali punti. Se X è illimitato si può solo dire che il massimo o il minimo di Z, se esistono, sono raggiunti in uno di tali punti.
Tale metodo è però praticabile solo se n=2,3 e con un numero di vincoli abbastanza piccolo. Occorre pertanto trovare un altro metodo che risolva il problema nel caso più generale. Tale metodo è il metodo del simplesso che esporremo in seguito.

2.-Alcuni esempi

Presentiamo prima alcuni problemi che si possono risolvere con i risultati esposti nel precedente paragrafo.

ESEMPIO 2/1.- Un allevatore di bovini può comperare per la propria mandria due tipi di mangimi : m_1 ed m_2 che costano rispettivamente per unità di prodotto 10 dollari e 4 dollari. Si sa poi che ogni giorno la mandria ha bisogno di:

60 kg. dell'elemento nutrizionale A,
84 kg. dell'elemento nutrizionale B,
72 kg. dell'elemento nutrizionale C

e che i mangimi contengono per unità di prodotto tali elementi nutrizionali nelle seguenti quantità:

	A	B	C
m_1	3 kg.	7 kg.	3 kg.
m_2 .	2 kg.	2kg.	6 kg.

Si chiede di trovare la combinazione dei due mangimi che assicuri la presenza degli elementi nutrizionali necessari e che dia la minor spesa giornaliera.

Risoluzione.- Si indichino rispettivamente con x ed y il numero di unità di prodotto del mangime m_1 e del mangime m_2 da comperare giornalmente. Allora la funzione obiettivo da rendere minima è $Z = 10x + 4y$ con la condizione ovvia che $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Inoltre, dato che ogni giorno occorrono 60 kg. dell'elemento nutrizionale A, che ogni unità di prodotto di m_1 ne contiene 3 kg. e ogni unità di prodotto m_2 ne contiene 2 kg., occorre che

$$3x + 2y \geq 60.$$

Analogamente dovrà essere:

$$7x+2y \geq 84 \quad \text{e}$$
$$3x + 6y \geq 72$$

Questo esempio, essendo un esempio con 2 sole variabili e 3 soli vincoli, oltre alla non negatività delle soluzioni, può essere facilmente risolto usando le proprietà precedenti. L'insieme delle soluzioni ammissibili è un sottoinsieme del primo quadrante. Ciascuno dei tre vincoli definisce poi un semipiano chiuso non contenente l'origine. Si ottiene così il sottoinsieme del primo quadrante, non limitato superiormente avente vertici nei punti (0,42), (6,21), (18,3), (24,0).

La funzione obiettivo raggiunge il valore minimo in uno di questi punti e precisamente nel punto x=6 , y=21 ove assume il valore 144.

ESEMPIO 2/2.-Per fabbricare due articoli A e B sono necessarie 2 macchine M_1 ed M_2. La prima impiega 5 minuti nella costruzione dell'articolo A e 6 nella costruzione dell'articolo B, la seconda impiega 7 minuti per l'articolo A e 2 per l'articolo B. Entrambe le macchine possono essere usate solo per 8 ore al giorno. L'articolo A dà un guadagno di L. 12600, l'articolo B di L. 9000. Determinare il numero più conveniente di articoli A e B da produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno.

Risoluzione.- Detti x ed y le quantità di articoli A e B da produrre giornalmente la funzione obiettivo da rendere massima è pertanto Z= 12600x + 9000y.
Però, poichè M_1 impiega 5 minuti per produrre A e 6 per produrre B e può essere usato solo per 480 minuti deve essere $5x + 6y \leq 480$. Analogamente considerando la macchina M_2 si ottiene che $7x + 2y \leq 480$.
Ovviamente infine $x \geq 0, y \geq 0$.
I due vincoli definiscono due semipiani contenenti l'origine e l'insieme delle soluzioni ammissibili è pertanto la regione limitata del primo quadrante avente vertici nei punti O(0,0), A(0,80), B(60,30), C(480/7,0). L'utile massimo si ottiene per x=60,y=30 e la funzione obiettivo vale 1.026.000 lire.

ESEMPIO 2/3.- Una macchina fabbrica un pezzo di tipo A in 2 minuti ed un pezzo di tipo B in 1 minuto. Si sa che in un'ora può fabbricare al più 24 pezzi A , 36 pezzi B e complessivamente non può fabbricare più di 45 pezzi. Sapendo che ogni pezzo A rende 100 euro e ogni pezzo B 200 euro, determinare la produzione oraria che dà il massimo profitto.

Risoluzione.- Indicato con x il numero di pezzi di tipo A da fabbricare in un'ora e con y quelli di tipo B, occorre rendere massima la funzione Z = 100x + 200y sapendo che

$$\begin{gathered} 2x + y \leq 60 \\ x + y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 24 \\ 0 \leq y \leq 36 \end{gathered}$$

Il valore massimo di Z è 8100 raggiunto per x = 9 e y = 36.

ESEMPIO 2/4.- Un'industria produce due oggetti A e B che rendono rispettivamente 2,5 dollari e 2 dollari. L'industria ha un massimo di 9.000 ore macchina come capacità lavorativa e 8.000 m^2 come capacità di magazzino.
Un pezzo A occupa 1 m^2 , un pezzo B occupa 2 m^2. La produzione di un pezzo A richiede 3 ore macchina, quella di B ne richiede 2. Stabilire il piano di produzione che realizza il massimo profitto.

Risoluzione.- L'utile massimo è di 8.750 dollari che si ottiene producendo 500 pezzi e 3750 pezzi B.

3.-Premesse al metodo del simplesso

Per poter applicare il metodo del simplesso occorre formulare in modo differente il problema di programmazione lineare esposto nel primo paragrafo . Nel seguito ci riferiremo ad esso come alla forma I di tale problema.

PROPRIETA' 2/6.- *Esiste una biiezione fra l'insieme delle soluzioni della disequazione:*

(2) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b$ *con* $x_i \geq 0$ *per* $i = 1,\ldots,n$

e quello delle soluzioni dell'equazione

(3) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ *con* $x_i \geq 0$ *per* $i = 1,\ldots,n+1$

Dimostrazione. Sia $(s_1, s_2, \ldots,s_{n+1})$ con $s_i \geq 0$ per $i= 1,\ldots,n+1$ una soluzione della (3). Poniamo:

$$\Phi[(s_1, s_2, \ldots,s_{n+1})] = (s_1, s_2, \ldots,s_n)$$

e proviamo che Φ è una biiezione fra gli insiemi di soluzioni prima considerati.

Infatti:

i) Essendo $s_{n+1} \geq 0$, $\Phi[(s_1, s_2, \ldots,s_{n+1})]$ verifica la (2).

ii) Φ è iniettiva. Se $(s_1, s_2, \ldots,s_{n+1})$ e $(t_1, t_2, \ldots,t_{n+1})$ sono due differenti soluzioni della (3)., allora esiste un indice i tale che $s_i \neq t_i$. Se $1\leq i \leq n$, la tesi è provata. Se invece $s_{n+1}\neq t_{n+1}$ allora anche $(s_1, s_2, \ldots,s_n) \neq (t_1, t_2, \ldots,t_n)$, perché, se fossero uguali, dato che $s_{n+1} = b - a_1s_1 + \ldots + a_ns_n$ e $t_{n+1} = b - a_1t_1 + \ldots + a_nt_n$, risulterebbe $s_{n+1}= t_{n+1}$.

iii) Φ è suriettiva. Se $(s_1, s_2, \ldots,s_n)$ è una soluzione di (2), allora $(s_1, s_2, \ldots,s_{n+1})$ con $s_{n+1} = b - a_1s_1 + \ldots + a_ns_n$ è soluzione di (3) controimmagine di $(s_1, s_2, \ldots,s_n)$ mediante Φ.

OSSERVAZIONE. In modo analogo si può provare che:

Esiste una biiezione fra l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b \quad \textit{con } x_i \geq 0 \textit{ per } i = 1,\ldots,n$$

e quello delle soluzioni dell'equazione

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - x_{n+1} = b \quad \textit{con } x_i \geq 0 \textit{ per } i = 1,\ldots,n+1$$

PROPRIETA' 2.7.- *Esiste una biiezione fra l'insieme delle soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

con $x_i \geq 0$ per $i = 1,\dots,n$
e l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

con $x_i \geq 0$ per $i = 1,\dots,n+m$

La dimostrazione è analoga a quella della proprietà 6 , la biiezione Φ è ora così definita: $\Phi[(s_1, s_2, \dots, s_{n+m})] = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ove $(s_1, s_2, \dots, s_{n+m})$ è una soluzione del secondo sistema ed è $s_i \geq 0$ per $i= 1,\dots,n+m$

Riferendoci al generale problema di programmazione lineare di cui al paragrafo 1 chiamiamo forma II di tale problema quella di rendere massima o minima la stessa funzione Z ove però ora i vincoli sono quelli espressi dal secondo sistema.
Poiché in punti corrispondenti mediante Φ la funzione Z assume gli stessi valori per trovare il massimo o il minimo di Z si può risolvere la forma II di tale problema.
Se $(s_1, s_2, \dots, s_{n+m})$ è la soluzione del secondo sistema ove la Z è massima o minima, allora $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ è la soluzione del primo sistema ove la Z è massima o minima.
Poiché Φ risulta essere biiettiva anche fra gli insiemi dei punti estremi degli insiemi delle soluzioni ammissibili dei due problemi, per trovare il massimo o il minimo di Z possiamo considerare solo i valori che essa assume sui punti estremi del secondo problema.

4.-Soluzioni di base di un sistema lineare.

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni ed n incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale ad h. Nella matrice dei coefficienti vi sono pertanto h colonne linearmente indipendenti mentre le restanti n- h sono loro combinazioni lineari. Fissate h colonne linearmente indipendenti, diciamo variabili di base quelle che hanno come coefficienti gli elementi di tali h colonne, variabili non di base le altre.
Supposto ora che il sistema abbia soluzioni, cioè che anche la matrice completa abbia rango h, si ha che tutte le soluzioni del sistema si ottengono dando valori arbitrari alle variabili non di base ed esprimendo in funzione delle h colonne linearmente indipendenti il vettore colonna ottenuto sottraendo dal vettore colonna dei termini noti la combinazione lineare delle restanti n-h colonne avente come coefficienti i valori arbitrariamente assegnati alle variabili non di base.
Se prendiamo tali n-h valori uguali a zero la corrispondente soluzione è detta soluzione di base del sistema in esame.
Possiamo allora porre la seguente definizione.
DEFINIZIONE 2/2.- *Dato un sistema lineare che ammette soluzioni composto da m equazioni ed n incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale ad h e*

selezionato un insieme di h variabili di base, diciamo soluzione di base *relativa a tali h variabili quella soluzione dove le n-h variabili non di base assumono il valore 0.*
OSSERVAZIONE.- Le soluzioni di base del precedente sistema sono ovviamente al più $\binom{n}{h}$.
DEFINIZIONE 2/3.- *Una soluzione di base del sistema dei vincoli di un problema di programmazione lineare formata da elementi tutti non negativi è detta* soluzione di base ammissibile *del problema di programmazione lineare.*
La proprietà seguente illustra l'importanza della precedente definizione.
PROPRIETA'2/8.- *L' insieme delle soluzioni di base ammissibili di un problema di programmazione lineare coincide con l'insieme dei punti estremi dell'insieme delle soluzioni del problema stesso.*

Dimostrazione.- Supponiamo di avere un sistema di m equazioni ed n incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale ad h e che le prime h colonne siano linearmente indipendenti.
Indichiamo con $(s_1,s_2,\ldots s_h,0,\ldots 0)$ con $s_i \geq 0$ per $i = 1,\ldots h$ la soluzione di base ammissibile e, per assurdo, supponiamo sia interna ad un segmento di soluzioni ammissibile di estremi i punti $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ e $(b_1,b_2,\ldots b_n)$.
Allora , per ogni i risulta:

$$s_i = \lambda\, a_i + (1-\lambda)\, b_i \qquad 0 < \lambda < 1$$

e quindi per $i= h+1,\ldots,n$ si ha $0 = \lambda\, a_i + (1-\lambda)\, b_i$
Poiché λ e $1 - \lambda$ sono positivi, dato che si è supposto che la soluzione di base rappresenti un punto interno del segmento, e a_i e b_i sono non negativi necessariamente risulta $a_i = b_i = 0$ per $i=h+1,\ldots,n$.
Ma allora anche $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ sono soluzioni di base, diverse fra loro ma relative alla stessa base, ciò che è assurdo.

Proviamo ora che ogni punto estremo $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ dell'insieme delle soluzioni ammissibili è una soluzione di base ammissibile. Possiamo supporre che per $i=1,\ldots,h$ s_i sia positivo mentre per $i=h+1,\ldots n$, s_i sia nullo. Proviamo che le prime h colonne $A_1,\ldots,A_h$ della matrice A dei coefficienti sono linearmente indipendenti. Se non lo fossero esisterebbero delle costanti non tutte nulle z_i con $i=1,\ldots,h$ tali che $z_1 A_1 + \ldots + z_h A_h = 0$ ove 0 indica la matrice colonna nulla. Consideriamo allora il punto z le cui prime h coordinate sono le z_i prima determinate e le cui restanti n-h coordinate sono nulle. E' facile verificare che $AZ=0$ ove Z è la matrice colonna i cui elementi sono le coordinate di z.

Consideriamo ora gli indici $i= 1,\ldots,h$ per i quali risulti $z_i \neq 0$ e poniamo $\theta = \min \{s_i/|z_i|\}$. Consideriamo poi i punti $s^{\pm} = s \pm \theta z$ .Ovviamente s,s^+,s^- sono tre punti distinti tali che $s = \frac{1}{2}s^+ + \frac{1}{2}s^-$.Inoltre $AS^{\pm} = AS \pm \theta AZ = B$ ove S, S^+, S^- sono le matrici colonne formate rispettivamente dalle coordinate di s, s^+ e s^- e B è la matrice colonna i cui elementi sono i termini noti del sistema dei vincoli.

Ora $s_j^{\pm}=0$ per j= h+1,…,n, $s_j^{\pm}=s_j>0$ se $z_j=0$. Se invece $z_j\neq 0$ risulta $\theta|z_j|\leq s_j$.
Pertanto anche per questi indici risulta $s_j^{\pm}\geq 0$ .Pertanto $s^{\pm}$ sono due diverse soluzioni ammissibili del nostro problema e s è un punto interno al segmento da esse determinato, ciò che è assurdo.
Essendo $A_1,\ldots,A_h$ colonne linearmente indipendenti è possibile aggiungere ad esse altre colonne della matrice A in modo da ottenere una base dello spazio delle colonne. Rispetto a tale base s è soluzione di base ammissibile.

5.-Il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso è un algoritmo che permette di passare da una soluzione di base ammissibile ad un'altra soluzione di base ammissibile in corrispondenza alla quale la funzione obiettivo da rendere massima (minima) assume valore maggiore (minore) di quello precedentemente assunto. Per poter applicare il metodo del simplesso occorre che il problema sia posto in una forma particolare che diremo canonica.
DEFINIZIONE 2/4.- *Un problema di programmazione lineare* è in forma canonica *se*

(i) *Occorre trovare il massimo della funzione .*
(ii) *I vincoli sono espressi mediante un sistema di equazioni.*
(iii) *I termini noti del sistema dei vincoli sono non negativi.*
(iv) *Nel sistema dei vincoli è possibile evidenziare un sistema di variabili di base nel senso che le variabili di base hanno coefficiente uguale ad 1 in una sola equazione e 0 nelle altre ed ogni equazione contiene esattamente una variabile di base .Di conseguenza nella soluzione di base corrispondente i valori di tali variabili sono espressi dalla colonna dei termini noti.*
(v) *La funzione obiettivo è espressa in funzione delle variabili non di base.*

Mostreremo in seguito che ogni problema di programmazione lineare può essere posto in forma canonica. Per ora osserviamo che abbiamo già provato che i vincoli possono essere espressi come sistema di equazioni.
Ogni problema in forma canonica viene quindi scritto nel modo seguente.
Rendere massima la funzione

(5) $$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_nx_n+z_0,$$

sapendo che

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_{2n} \quad +x_{n+2} & =b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \qquad\qquad +x_{n+m} & =b_m \end{cases}$$

e che per ogni i, $x_i\geq 0$ e $b_i\geq 0$.

Il precedente problema ammette la soluzione di base ammissibile $(0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots b_m)$ con variabili di base $x_{n+1},\ldots x_{n+m}$ e in corrispondenza la funzione obiettivo assume il valore z_0.

Osserviamo ancora che se in un problema di programmazione lineare occorre rendere massima la funzione obiettivo, i vincoli sono tutti del tipo
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ e tutte le b_i sono non negative allora il sistema dei vincoli si può porre nella seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_{2n} \qquad + x_{n+2} \qquad\qquad = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad\qquad + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad x_i \geq 0 \text{ per } i = 1,\ldots,n+m$$

e il problema è in forma canonica.
Applichiamo ora al generico problema in forma canonica il metodo del simplesso che permette di passare ad un'altra soluzione di base ammissibile in cui il valore di Z è maggiore o uguale a z_0.
Consideriamo la (5) come (m+1)-esima equazione del sistema e pertanto discutiamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_{2n} \qquad + x_{n+2} \qquad\qquad = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad\qquad + x_{n+m} \quad = b_m \\ -c_1x_1 - \ldots \qquad -c_nx_n \qquad\qquad\qquad + z = z_0 \end{cases}$$

con, per ogni i, $x_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$.
Il problema è trovare una soluzione di questo sistema ove il valore di z sia maggiore di z_0 . Per fare questo opereremo sul sistema con le seguenti due operazioni che, come è noto, trasformano il sistema in un sistema equivalente, cioè con le stesse soluzioni. Nel seguito chiameremo tali operazioni "operazioni ammissibili".
1° operazione. Moltiplicare un'equazione per una costante non nulla.
2° operazione. Aggiungere ad una equazione una combinazione lineare di altre equazioni. In pratica ci limiteremo ad aggiungere ad una equazione una sola altra equazione moltiplicata per una costante non nulla.
Rappresenteremo il sistema con la seguente tabella ove nella prima colonna sono evidenziate le variabili di base, nell'ultima colonna i termini noti rappresentano i valori che le variabili di base assumono nella corrispondente soluzione di base.

	x_1	x_2	……	x_n	x_{n+1}		……	x_{n+m}	z	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	1	0	……	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	0	1	……	0	0	b_2
……	……									……
……	……									……
……	……									……
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	0	0	……	1	0	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	……	$-c_n$	0	0	……	0	1	z_0

Il procedimento per passare ad una nuova tabella è il seguente:

1) Si consideri un qualsiasi elemento negativo dell'ultima riga, escludendo in ogni caso z_0. Si indichi tale elemento con - c_h.
2) Fra gli elementi della h-esima colonna si considerino solo quelli positivi e poi i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$, che sono ovviamente non negativi.
3) Si consideri il minore di questi, sia $\frac{b_p}{a_{pq}}$. Si individua così un elemento a_{pq} che chiamiamo " pivot".
4) Si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p-esima equazione ed uguale a zero in tutte le altre operando sul sistema con le operazioni ammissibili.
5) Si ripete sulla nuova tabella il precedente procedimento fino ad arrivare ad una delle due seguenti situazioni:

a)Tutti gli elementi dell'ultima riga (escludendo al solito quelli che appartengono anche alle ultime due colonne) sono non negativi

b) C'è una colonna (escludendo le ultime due) ove nell'ultima riga c'è un elemento negativo mentre gli altri elementi della colonna sono non positivi.

Allora nel caso a) il valore che appare all'incrocio fra l'ultima riga e l'ultima colonna è il massimo di Z; nel caso b) la funzione Z è illimitata superiormente. In entrambi i casi il procedimento termina.

OSSERVAZIONE.- Nella scelta dell'elemento negativo dell'ultima riga (punto 1) generalmente si segue una delle due seguenti vie.

Una prima via consiste nel prendere l'elemento più negativo e passare poi al punto 2.

La seconda via è più lunga e si articola nel seguenti passaggi:

- Fra tutti i termini dell'ultima riga, escludendo 1 e z_0, cioè fra le $-c_s$, si considerino solo i termini negativi.
- Per ciascuno di essi si considerano i termini positivi della stessa colonna e poi i rapporti fra i corrispondenti termini noti e tali termini. Cioè per ogni $-c_s < 0$ si considerano prima le $a_{js} > 0$ con j = 1,…,m e poi i rapporti $\frac{b_j}{a_{js}} \geq 0$. Infine per ogni colonna si considera il rapporto più piccolo.
- Si moltiplica ognuno di questi rapporti (il più piccolo per ogni colonna) per il corrispondente $-c_s$ e si sceglie fra questi prodotti il minore che supponiamo corrisponda alla p-esima riga e q-esima colonna.
- Si determina così il pivot e si passa al punto 4.

Si vedrà in seguito che il secondo procedimento assicura il massimo incremento possibile della funzione Z.

Diamo ora due esempi per illustrare i procedimenti prima introdotti , nel paragrafo successivo giustificheremo le affermazioni fatte.

ESEMPIO 2/5.-([RA],pag.203) Rendere massima la funzione $Z = 3x_1 - x_2 + 4x_3$ sapendo che x_1 ,x_2 , x_3 sono non negative e che :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 6x_3 \leq 4 \end{cases}$$

Introducendo le variabili x_4, x_5, x_6 il precedente problema può essere posto nella seguente forma:

Rendere massima la funzione Z sapendo che le variabili x_i per i=1,…,6 sono non negative e che

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_6 = 4 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + z = 0 \end{cases}$$

Possiamo costruire la seguente tabella

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
x_4	2	-1	3	1	0	0	0	5
x_5	1	4	-2	0	1	0	0	1
x_6	3	0	6	0	0	1	0	4
	-3	1	-4	0	0	0	1	0

Il problema è in forma canonica con variabili di base x_4, x_5, x_6 , evidenziate nella prima colonna, soluzione di base (0, 0, 0, 5, 1, 4). I valore delle variabili di base sono espresse dai termini noti. La funzione Z è in funzione delle variabili non di base ed assume il valore 0 in corrispondenza alla soluzione di base prima descritta. Tale valore viene letto all'incrocio fra l'ultima riga e l'ultima colonna.
Applichiamo ora il più semplice primo procedimento. Consideriamo il termine più negativo dell'ultima riga, cioè –4. Nella corrispondente colonna i termini positivi sono 3 e 6. Consideriamo poi i rapporti 4/6 e 5/3. Il minore è 4/6, quindi il pivot è 6, x_3 è la nuova variabile di base, x_6 quella vecchia da sostituire.
Con l'operazione $R_3 \rightarrow 1/6\ R_3$ rendiamo uguale ad 1 il coefficiente x_3 di nella terza equazione ed otteniamo la seguente tabella

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
x_4	2	-1	3	1	0	0	0	5
x_5	1	4	-2	0	1	0	0	1
x_6	1/2	0	1	0	0	1/6	0	2/3
	-3	1	-4	0	0	0	1	0

Con le operazioni ammissibili:

$R_1 \to R_1 - 3R_3$ $\qquad$ $R_2 \to R_2 + 2R_3$ $\qquad$ $R_4 \to R_4 + 4R_3$

otteniamo un sistema equivalente dove nella colonna del pivot il pivot vale 1 e tutti gli altri elementi sono 0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
x_4	1/2	-1	0	1	0	-1/2	0	3
x_5	2	4	0	0	1	1/3	0	7/3
x_3	1/2	0	1	0	0	1/6	0	2/3
	-1	1	0	0	0	2/3	1	8/3

Le nuove variabili di base sono x_4, x_5, x_3, la soluzione di base è (0, 0, 2/3, 3, 7/3, 0). La Z è espressa in funzione delle variabili non di base ed assume il valore 8/3 che si legge all'incrocio fra l'ultima riga e l'ultima colonna e che è maggiore del valore precedentemente assunto da Z.

Nel passo successivo nell'ultima riga occorre considerare –1 e quindi i rapporti 3 : (1/2) = 6 , (7/3) : 2 = 7/6 , (2/3) : (1/2) = 4/3 . Il più piccolo fra questi è 7/6 e quindi 2 è il nuovo pivot. La variabile x_5 sarà sostituita come variabile di base da x_1.

Prima con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2} R_2$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 - \frac{1}{2} R_2$ $\qquad$ $R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_2$ $\qquad$ $R_4 \to R_4 + R_2$

otteniamo le due successive tabelle.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
x_4	1/2	-1	0	1	0	-1/2	0	3
x_5	1	2	0	0	1/2	1/6	0	7/6
x_3	1/2	0	1	0	0	1/6	0	2/3
	-1	1	0	0	0	2/3	1	8/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
x_4	0	-2	0	1	-1/4	-7/12	0	29/12
x_1	1	2	0	0	1/2	1/6	0	7/6
x_3	0	-1	1	0	-1/4	1/12	0	1/12
	0	3	0	0	1/2	5/6	1	23/6

La soluzione di base è (7/6, 0, 1/12, 29/12, 0, 0). La Z assume il valore 23/6 maggiore del precedente. Poiché nell'ultima riga non vi sono più termini negativi il procedimento termina e il massimo di Z è proprio 23/6.

OSSERVAZIONE.- Poiché la colonna di Z è rimasta ovviamente invariata, verrà omessa negli esercizi successivi.

ESEMPIO 2/6.-([RA],pag.210) Rendere massima la funzione $Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ sapendo che $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ x_6$ sono non negative e che :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

La prima tabella è

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	2	4	1	0	0	15
x_5	1	2	3	0	1	0	7
x_6	2	1	1	0	0	1	6
	-3	-4	-2	0	0	0	0

Il pivot è $a_{22} = 2$.

Con l'operazione $R_2 \rightarrow \frac{1}{2} R_2$ si ha:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	2	4	1	0	0	15
x_5	1/2	1	3/2	0	1/2	0	7/2
x_6	2	1	1	0	0	1	6
	-3	-4	-2	0	0	0	0

Con le operazioni

$R_1 \to R_1 - 2R_2 \qquad R_3 \to R_3 - R_2 \qquad R_4 \to R_4 + 4R_2$

si ottiene:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	0	1	1	-1	0	8
x_2	1/2	1	3/2	0	1/2	0	7/2
x_6	3/2	0	-1/2	0	-1/2	1	5/2
	-1	0	4	0	2	0	14

La nuova soluzione di base è (0, 7/2, 0, 8, 0, 5/2) e la Z assume il valore 14.
Il nuovo pivot è 3/2 nella prima colonna.
Prima con l'operazione $R_3 \to \frac{2}{3} R_3$ si ottiene una tabella che omettiamo e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 - 2R_3 \qquad R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3 \qquad R_4 \to R_4 + R_3$

applicate a tale tabella si ottiene la tabella definitiva.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	5/3	1	-1/3	-4/3	14/3
x_2	0	1	5/3	0	2/3	-1/3	8/3
x_1	1	0	-1/3	0	-1/3	2/3	5/3
	0	0	11/3	0	5/3	2/3	47/3

Il massimo di Z è 47/3 in corrispondenza alla soluzione di base:

(5/3, 8/3, 0, 14/3, 0, 0).

OSSERVAZIONE.- Nei due precedenti esempi abbiamo sempre applicato il primo dei due procedimenti prima illustrati dato che tale procedimento è più veloce. Se però nell'esempio 5 avessimo applicato l'altro procedimento avremmo dovuto considerare nell'ultima riga oltre a –4 anche –3 e poi i rapporti 5/2 , 1, 4/3. Fra questi il minore è 1, mentre riferendoci alla terza colonna il minore era 4/6. Avremmo poi dovuto considerare i prodotti $-3\times1 = -3$ e $-4 \times (4/6) = -(8/3)$. Come pivot avremmo dovuto scegliere, applicando il secondo procedimento, il termine 1 della prima colonna e la Z avrebbe assunto il valore 3 maggiore del valore 8/3

ottenuto con l'altro procedimento. Lasciamo al lettore verificare che il valore massimo di Z sarebbe stato comunque 23/6 anche con questo procedimento.
.

6.-Giustificazione teorica del metodo del simplesso.

Giustifichiamo ora le affermazioni fatte nel precedente paragrafo.

PROPRIETA'2/9.- *Applicando ad un problema di programmazione lineare in forma canonica il metodo del simplesso si ottiene ancora una forma canonica dello stesso problema.*

Dimostrazione. Poiché si opera sul sistema di partenza con operazioni ammissibili si ottiene una formulazione equivalente dello stesso problema. Occorre provare che è ancora in forma canonica.
Le condizioni (i) e (ii) della def. 2/3 sono ovviamente verificate.
Se il pivot è l'elemento a_{hk} , un nuovo sistema di variabili di base è formato dalla variabile x_k e dalle precedenti variabili di base meno la x_h. La variabile x_k ha infatti coefficiente 1 nella h-esima equazione e zero nelle altre, gli elementi delle colonne delle precedenti variabili di base tranne la x_h, sono rimasti invariati.
Proviamo ora che i nuovi termini noti sono non negativi. Vediamo come si trasforma l'ultima colonna. Essendo sempre a_{hk} il pivot, si effettua sul sistema la seguente trasformazione:

$$R_h \to \frac{1}{a_{hk}} R_h = R'_h$$

che rende uguale ad 1 il coefficiente di x_k nella h-esima equazione. Nella colonna dei termini noti tutti i termini restano invariati tranne l'h-esimo b_h che si trasforma in $\frac{b_h}{a_{hk}} \geq 0$.
Sul sistema vengono poi eseguite le seguenti operazioni che rendono uguali a 0 gli elementi della k-esima colonna diversi da quello di posto (h,k), precisamente:

$$R_1 \to R_1 - a_{1k}R'_h$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{h-1} \to R_{h-1} - a_{h-1,k}R'_h$$

$$R_{h+1} \to R_{h+1} - a_{h+1,k} R'_h$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_m \to R_m - a_{m,k} R'_h$$

$$R_{m+1} \to R_{m+1} + c_k R'_h$$

e l'ultima colonna si trasforma nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} b_1 - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{1k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{h-1} - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{h-1,k} \\ \frac{b_h}{a_{hk}} \\ b_{h+1} - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{h+1,k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_m - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{m,k} \\ z_0 + \frac{b_h}{a_{hk}} c_k \end{pmatrix}$$

Riferendoci per semplicità al termine $b_1 - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{1k}$ dobbiamo considerare due casi:

(A) $a_{1k} \leq 0$. In tal caso il precedente termine è non negativo dato che $b_1 \geq 0$.

(B) $a_{1k} > 0$. Osserviamo che per come è stato determinato $\frac{b_h}{a_{hk}}$ (vedi punto 3 del procedimento del metodo del simplesso) risulta: $\frac{b_1}{a_{1k}} \geq \frac{b_h}{a_{hk}}$.

Nuovamente il termine precedente è non negativo. Pertanto tutti i termini noti sono non negativi.
Si vede poi subito che la Z è espressa in funzione delle variabili non di base e che nell'ultima colonna si evidenzia una soluzione di base. Il problema è pertanto ancora in forma canonica.

PROPRIETA'2/10.- *Applicando il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare scritto in forma canonica il valore dell'ultimo elemento dell'ultima colonna è il valore che la funzione obiettivo assume in corrispondenza alla nuova soluzione di base.*

Dimostrazione .- Basta osservare che Z è espressa in funzione delle variabili non di base che assumono il valore 0.

PROPRIETA'2/11.- *Applicando il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare scritto in forma canonica il nuovo valore della funzione obiettivo è non minore del precedente.*

Dimostrazione.- Dalla dimostrazione della proprietà 9 risulta

$z_0 + \frac{b_h}{a_{hk}} c_k \geq z_0$ dato che a_{hk} e c_k sono positivi e b_h è non negativo.

OSSERVAZIONE.- Qualora b_h fosse positivo avremmo che il valore di Z sarebbe maggiore del precedente. Il problema di trovare un b_h positivo sarà affrontato in seguito.

Dalle proprietà 9,10,11 segue che il metodo del simplesso permette di passare da una soluzione ammissibile ad un'altra in corrispondenza alla quale la funzione obiettivo assume valore non minore.

PROPRIETA'2/12.- *Se tutti gli elementi dell'ultima riga, non considerando quello dell'ultima colonna, sono non negativi, il valore assunto dalla funzione obiettivo è quello massimo.*

Dimostrazione .- Osserviamo prima che, dato che il sistema finale è equivalente a quello iniziale, la discussione del sistema può essere fatta su quello finale.

Vista l'ipotesi della proprietà la Z si può così esprimere:

$$Z = a + a_1 x_1 + \ldots + a_{n+m}\, x_{n+m}$$

ove per $i = 1,\ldots n+m$ le a_i sono non positive.

Poiché le variabili possono assumere solo valori non negativi a è il massimo di Z.

PROPRIETA'2/13 .- *Escludendo l'ultima colonna, se esiste un elemento dell'ultima riga negativo e tale che gli altri elementi della sua colonna siano non positivi, la funzione obiettivo è illimitata superiormente.*

Dimostrazione.- Sia $\underline{c}_s$ l'elemento negativo dell'ultima riga tale che ogni $\underline{a}_{is}$ sia non positivo. Supponiamo che $x_1,\ldots x_m$ siano le variabili di base. Ovviamente $s \neq 1,\ldots,m$. Allora risulta:

$$Z = a - \underline{c}_{m+1} x_{m+1} - \ldots - \underline{c}_s\, x_s - \ldots\ldots - \underline{c}_{m+n}\, x_{m+n} \quad (8)$$

Costruiamo una soluzione accettabile del nostro problema ponendo anzitutto

$$x_i = 0 \text{ per } i = m+1,\ldots s-1, s+1,\ldots,m+n.$$

La (8) si riduce a $Z = a - \underline{c}_s\, x_s$

e il sistema dei vincoli a :

$$\begin{cases} x_1 = \underline{b}_1 - \underline{a}_{1s}\, x_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \underline{b}_m - \underline{a}_{ms}\, x_s \end{cases} \qquad (9)$$

Diamo ora a x_s un qualsiasi valore positivo e dalle (9) determiniamo i valori, ovviamente positivi, di $x_1,\ldots, x_m$. Otteniamo così una soluzione accettabile in corrispondenza alla quale la funzione obiettivo assume un valore maggiore di a.

Poiché ad x_s possiamo dare valori arbitrariamente grandi, Z risulta illimitata superiormente.

7.-Convergenza dell' algoritmo del simplesso

Affrontiamo ora il problema di vedere se applicando il metodo del simplesso ad ogni problema di programmazione lineare scritto in forma canonica si giunge ad una delle soluzioni descritte nelle proprietà 2/12 e 2/13.

Vediamo prima un esempio dal quale si vede che applicando il solito procedimento (scelta dell'elemento più negativo dell'ultima riga) si finisce in un ciclo.
ESEMPIO 2/7- Rendere massima la funzione
$Z = \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$ sapendo che $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ sono non negative e

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

La prima tabella è:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

Seguendo il primo procedimento nell'ultima riga occorre considerare –3/4 e come pivot 1/4 ottenendo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	3	0	0	0	-4	-7/2	33	0

La funzione obiettivo non è cresciuta .Applicando sempre il secondo procedimento otteniamo le seguenti tabelle ove la Z assume sempre il valore 0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	1	1	0	0	0	-2	18	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
	-2	3	0	1/4	0	0	-3	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	2	-6	0	-5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
x_3	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
	-1	1	0	-1/2	16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	1/3	0	1/6	-4	-1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	-2	0	-7/4	44	1/2	0	0

La successiva tabella però coincide con la prima e quindi il primo procedimento non conduce a soluzione.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

Torniamo alla prima tabella ed applichiamo il secondo procedimento. Dobbiamo considerare nell'ultima riga anche l'elemento –1/2 e quindi prendere come pivot l'elemento 1 della colonna determinata da –1/2. Il corrispondente termine noto è positivo e quindi la funzione Z assume il valore 1/2 come appare dalla seguente tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	1	1/4	-8	0	9	1
x_2	0	1	1/2	1/2	-12	0	3	1/2
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	1/2	-3/4	20	0	6	1/2

Nell'ultima riga occorre considerare –3/4 e nella relativa colonna si sceglie come pivot 1/2 ottenendo la seguente conclusiva tabella.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1
	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4

Il massimo di Z è 5/4 in corrispondenza alla soluzione di base (3/4, 0, 0, 1, 0, 1, 0).

Tornando al problema della convergenza del metodo del simplesso iniziamo con l'osservare che se in ogni passo è possibile trovare un pivot tale che il termine noto della sua riga sia positivo il procedimento dopo un numero finito di passi termina. Infatti in questo caso i valori che assume Z in corrispondenza alle diverse soluzioni di base ammissibili che si presentano sono strettamente crescenti (cioè tutti fra loro differenti). Le soluzioni di base ammissibili che via via si trovano sono fra loro diverse. Riferendoci all'espressione iniziale di Z, se ritrovassimo la stessa soluzione di base dovrei ritrovare lo stesso valore di Z. Essendo le soluzioni di base in numero finito dopo un numero finito di passi il procedimento termina.
Nel successivo teorema vedremo che l'algoritmo del simplesso in ogni caso termina.

Prima del teorema occorrono due lemma.

LEMMA 1.-*Se tutti i termini noti del sistema dei vincoli sono uguali a zero, applicando il metodo del simplesso tutti i termini noti restano uguali a zero. Se c'è un termine noto diverso da zero, applicando il metodo del simplesso resta un termine noto diverso da zero.*

Dimostrazione.- La prima parte è ovvia. Passando alla seconda occorre distinguere due casi:

A) Il termine noto che si trova nella riga del pivot non è nullo.
In questo caso tale termine viene diviso per il pivot e quindi resta positivo.

B) Il termine noto che si trova nella riga del pivot è nullo.
In questo caso il termine non nullo si trova in una riga diversa da quella del pivot e quindi resta invariato.

LEMMA 2.- *Dato un problema di programmazione lineare scritto in forma canonica con almeno un termine noto non nullo, se dopo aver applicato un numero finito di volte il metodo del simplesso si giunge ad una delle situazioni descritte nelle proprietà 12 e 13 (che nel seguito chiameremo situazioni finali), con le stesse operazioni si giunge ad una delle situazioni finali anche per il problema ottenuto dal precedente ponendo tutti i termini noti uguali a zero.*

Dimostrazione.- Si osservi che quando si applica il metodo del simplesso gli elementi delle colonne diverse da quella dei termini noti vengono modificati usando elementi che non appartengono alla colonna dei termini noti, inoltre si possono usare in entrambi i problemi gli stessi pivot.. Poiché le situazioni finali non riguardano la colonna dei termini noti, anche cambiando tali termini tali situazioni si ripresentano.

TEOREMA 2/14 - *Per ogni problema di programmazione lineare scritto in forma canonica esiste una successione finita di passi in cui si applica il metodo del simplesso che porta il problema in una delle due situazioni finali.*

Dimostrazione.- La dimostrazione viene fatta per induzione sul numero dei vincoli. Dimostriamolo prima pertanto nel caso di un unico vincolo, che per il Lemma 2, possiamo supporre abbia termine noto non nullo.

Poiché per il Lemma 1 il termine noto resta non nullo, la funzione obiettivo assume valori sempre maggiori corrispondenti a sempre diverse soluzioni di base accettabili. Poiché queste sono in numero finito, tale procedimento deve terminare: o la funzione Z raggiunge il massimo oppure è superiormente illimitata.
Supponiamo ora il teorema vero per meno di m vincoli e dimostriamolo per m vincoli. Faremo vedere che considerato un problema con m vincoli in forma canonica è possibile passare ad un'altra formulazione del problema ancora in forma canonica in cui o si presenta una delle due situazioni finali oppure la funzione obiettivo assume valore maggiore del precedente. Come prima allora dopo un numero finito di passi il procedimento termina.
Si possono presentare tre diverse situazioni:
A) Tutti i termini noti sono positivi
B) Tutti i termini noti sono nulli
C) Vi sono alcuni termini noti nulli ed altri no.
Nel caso A) è possibile ovviamente passare ad una diversa formulazione del problema con valore maggiore della funzione obiettivo.
Nel caso B) si sostituisce un termine noto con un termine positivo e si ricade nel caso C). Se per questo si giunge ad una delle soluzioni finali, per il Lemma 2 , anche il precedente può essere ricondotto ad una delle soluzioni finali.
Resta pertanto da studiare il caso C) per il quale potremo supporre che le prime r equazioni abbiano termini noti nulli e le restanti m-r termini noti positivi.
Chiamiamo tale problema "problema I". Chiamiamo invece " problema II" quello ottenuto dal precedente considerando solo le prime r equazioni.
Supporremo che nel problema I le variabili non di base siano le prime n, cioè che il problema si possa scrivere nella seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n + x_{n+r} = 0 \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n + x_{n+r+1} = b_{r+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

Osserviamo che le ultime m-r variabili di base non appaiono nel problema II e che questo problema è in forma canonica con variabili di base le prime r variabili di base del problema I. Poiché r < m, il problema II può essere ricondotto per l'ipotesi induttiva ad una delle soluzioni finali, cioè si presenta una delle due seguenti situazioni:

i)i coefficienti della funzione obiettivo sono tutti non negativi
ii) c'è un coefficiente della funzione obiettivo che è negativo e tale che tutti gli elementi della sua colonna sono non positivi.

Riprendiamo il problema I e applichiamo ad esso le stesse operazioni che hanno portato il problema II in una delle due situazioni finali. Il problema I resta in forma canonica perché le prime r equazioni subiscono nel problema I le stesse

trasformazioni che hanno subito nel problema II e quindi le ultime m-r variabili di base del problema I che ovviamente non cambiano, insieme con le r variabili di base del problema II costituiscono un sistema di m variabili di base del problema I. I termini noti ovviamente non cambiano. Osserviamo ancora che la funzione obiettivo subisce nel problema I le stesse trasformazioni che ha avuto nel problema II.
Pertanto ci sono i seguenti casi:
I) Nel problema II tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non negativi. Per quanto prima osservato ciò si verifica anche per il problema I e la funzione obiettivo ha raggiunto il massimo anche come funzione obiettivo del problema I.
II) Nel problema II c'è un elemento dell'ultima riga, escludendo al solito quello che sta anche nell'ultima colonna, che è negativo mentre tutti gli altri elementi della sua colonna, che supporremo essere l'h-esima, sono non positivi. Vi sono ora due sottocasi.

IIA) nel problema I , dopo aver effettuato tutte le operazioni che hanno portato alle situazioni finali il problema II, tutti gli elementi di posto (i,h) con i= r+1,….,n sono non positivi. In questo caso anche per il problema I siamo nella situazione della Proprieta' 13 e la funzione Z è illimitata pure con i vincoli del problema I.

IIB) nel problema I, effettuate le operazioni di cui prima, c'è almeno un elemento di posto (i,h) con i= r+1,…,n positivo. Ora, poiché applicando al problema I le operazioni prima ricordate i termini noti sono rimasti invariati dato che il termine noto della riga del pivot era nullo, si ha che i termini noti corrispondenti agli elementi positivi della h-esima colonna prima determinati, sono positivi. E' possibile allora applicare il metodo del simplesso prendendo come pivot uno degli elementi positivi dell'h-esima colonna prima trovati ottenendo un valore della funzione Z maggiore del precedente.
Il teorema è pertanto dimostrato.
Purtroppo però la precedente dimostrazione non è costruttiva.

Si può rimediare a tale inconveniente seguendo la regola di Bland che assicura che non si finisce mai in un ciclo.
REGOLA DI BLAND.- *Nell'applicazione del metodo del simplesso ,secondo la procedura del par. 5, nel scegliere la variabile da introdurre nella base e quella da eliminare dalla base si scelga quella con l'indice minore. Questo significa che se nell'ultima riga vi sono più elementi negativi occorre scegliere quello che corrisponde alla variabile da introdurre nella base con indice minore. Se poi la colonna nella quale si sceglie il pivot è la s-esima e se vi sono più indici j per i quali il rapporto* $\frac{b_j}{a_{js}}$ *è minimo, si deve scegliere come variabile da eliminare dalla base quella con indice minore.*

TEOREMA 2.15.- . *Se nell'applicazione del metodo del simplesso si segue la regola di Bland il procedimento non dà origine a cicli.*

DIMOSTRAZIONE.- Procederemo nel seguente modo: supporremo di avere un problema di programmazione lineare (brevemente un PL) applicando al quale il

metodo del simplesso con la regola di Bland si abbia un ciclo. Trasformeremo questo problema in un altro problema che sempre con la regola di Bland dia origine a un ciclo e troveremo all'interno di questo problema un assurdo.
Nel problema iniziale chiamiamo colonne-pivot e righe –pivot quelle colonne e righe nelle quali è stato scelto un elemento come pivot. Sia poi q l'indice della colonna pivot con indice maggiore. Supponiamo poi che , applicando la regola di Bland, si ottenga un ciclo. Indichiamo con $T = T_1, T_2, \ldots, T_h = T_1$ le tabelle del ciclo in modo che nel passare dalla tabella T alla tabella T_2 la colonna q entri nell'insieme delle colonna di base. Dato che siamo in un ciclo dopo alcune tabelle la colonna q dovrà uscire dalla base. Supponiamo che nella tabella T' la colonna q sia ancora di base, ma non più nella tabella successiva.
Cancelliamo dalle nostre tabelle le colonne e le righe non pivot con l'esclusione della colonna dei termini noti e della riga della funzione obiettivo. Otteniamo così una nuova successione di tabelle che diciamo ridotte. Osserviamo prima che la prima tabella ridotta è in forma canonica. Basta solo provare che è evidenziato un sistema di variabili di base poiché le altre verifiche sono ovvie. Ora l'eliminazione dalla prima tabella (non ridotta) di una colonna non di base non arreca nessuna variazione all'insieme delle variabili di base in essa presenti. Se invece viene eliminata una colonna di base deve essere eliminata anche la riga che contiene l'unico 1 di tale colonna. Un pivot in tale riga porterebbe infatti all'eliminazione della colonna in esame dall'insieme delle colonne di base. Dato che siamo in un ciclo tale colonna deve rientrare nella base e quindi in essa vi deve essere un pivot, assurdo .
L'eliminazione infine di una riga comporta l'eliminazione dal problema di una variabile di base, ma ognuna delle restanti equazioni contiene esattamente una delle restanti variabili di base.
Essendo quindi tale tabella in forma canonica possiamo applicare ad essa il metodo del simplesso con la regola di Bland. Proviamo che così operando si trova la seconda tabella ridotta. Dato che siamo in un ciclo il valore della funzione obiettivo non può aumentare e quindi i termini noti sono tutti nulli. Pertanto possiamo scegliere nella tabella ridotta lo stesso pivot della tabella originale. Inoltre le righe e le colonne non pivot non influenzano le righe e le colonne pivot.
Tale procedimento può essere applicato a tutte le tabelle, pertanto se applichiamo ad una qualsiasi di queste tabelle ridotte il metodo del simplesso con la regola di Bland otteniamo la tabella ridotta successiva. Poiché il valore della funzione obiettivo resta invariato possiamo supporre valga sempre zero.
Consideriamo ora la tabella ridotta ottenuta da T' ove la colonna q è di base, ma sta per essere sostituita da una colonna non di base, sia la p-esima. Supponiamo che le prime n variabili siano non di base e le restanti di base.

	x_1 .... x_p .... x_n x_{n+1} ......x_h ...... x_q	
......	a_{11} .... a_{1p} .... a_{1n} 1 0 ...0.........0	0
....	....	....
x_h	a_{j1} ...... a_{jp} .... a_{jn} 0 0 ...1...... 0	0
......	....	....
x_q	a_{i1} .. .... a_{ip}........... a_{in} 1	....
......	....	....
......	a_{m1}.......... a_{mp} ...... a_{mn} 0 0 0	0
	$-c_1$ ...... $-c_p$ ....$-c_n$ 0 0 0	0

Nel seguito se nella riga j-esima l'ultimo elemento rappresenta il valore che la variabile di base x_h assume, diremo che tale riga è la riga j(h). Ad esempio nella tabella sopra riportata la riga i-esima verrà indicata con i(q).
Costruiamo ora un punto $y = (y_1, \ldots, y_q)$ ove $y_p = 1$, tutte le altre componenti corrispondenti a variabili non di base valgono 0 mentre se x_h è di base allora $y_h = -a_{j(h),p}$.
Consideriamo ora un generico vincolo della precedente tabella, ad esempio quello della j-esima riga. Osserviamo che nelle colonne di base si hanno tutti zero tranne che nella colonna h-esima. Se sostituiamo y in tale vincolo troviamo :
$a_{jp} \times 1 + 1 \times (-a_{j(h),p}) = 0$. Pertanto y verifica tutti i vincoli del problema.
Se si sostituisce y nell'ultima riga si trova $-c_p \times 1 = -c_p < 0$ dato che la colonna p-esima entra nella base.
Se sostituiamo y nell'ultima riga di tutte le tabelle del ciclo otteniamo sempre questo stesso valore negativo perché le ultime righe delle tabelle successive alla T'(ridotta) si possono pensare come ottenute dall'ultima riga di tale tabella aggiungendo combinazioni lineari dei vincoli che sono appunto verificati da y.
La colonna q-esima lascia la base quindi il pivot è $a_{ip} > 0$ e pertanto $y_q = -a_{ip}$ è negativo.
Affermiamo che tutte le altre componenti di y sono non negative. Ciò è ovvio per le componenti che corrispondono a variabili non di base. Consideriamo invece una variabile di base diversa dalla q-esima, sia x_h . Se $y_h = -a_{j(h),p}$ fosse negativa, $a_{j(h),p}$ sarebbe positivo e quindi, tenuto conto che i termini noti sono tutti nulli, avrei dovuto, per la regola di Bland che dobbiamo applicare, scegliere come variabile di base da eliminare x_h invece di x_q perché con indice minore di q.
Consideriamo ora la tabella ridotta ottenuta da T ed indichiamo con $-d_s$ il generico elemento dell'ultima riga. Ovviamente $-d_q < 0$ dato che la colonna q-esima entra nel ciclo, mentre, dato che applichiamo la regola di Bland e q è l'indice maggiore fra quelli delle colonne pivot, risulta $-d_s \geq 0$ per tutti gli altri indici. Se sostituisco y in

tale riga trovo: $-d_q \times y_q + \Sigma(-d_j \times y_j)$ ove la sommatoria è estesa a tutti gli indici $j < q$.
Ma risulta $-d_q \times y_q + \Sigma(-d_j \times y_j) \geq -d_q \times y_q > 0$, per quanto prima osservato.
Ciò è assurdo perché prima avevamo dimostrato che sostituendo y nelle ultime righe di tutte le tabelle del ciclo si trovava un valore negativo.

Riprendiamo ora l'esempio 2.7 e vediamo che applicando la regola di Bland non si finisce in un ciclo.
Applicando la regola di Bland si giunge come prima alla quarta tabella che riscriviamo.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
	-2	3	0	1/4	0	0	-3	0

Applicando la regola di Bland si ha che la variabile da introdurre in base è x_1 mentre quella da togliere dalla base è x_5, quindi il pivot è 1/16.

Con l'operazione $R_2 \to 16 R_2$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 + \frac{3}{2} R_2$, $R_3 \to R_3 - \frac{3}{2} R_2$, $R_4 \to R_4 + 2R_2$

si giunge alla nuova tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	-3/4	16	0	3	0
x_3	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	-1	0	-5/4	32	0	3	0

La variabile da introdurre in base è x_2 mentre quella da togliere dalla base è x_3 , quindi il pivot è 2.

Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{2} R_3$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 + 2 R_3$, $R_2 \to R_2 + 2 R_3$, $R_4 \to R_4 + R_3$

si giunge alla nuova tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	1/4	-8	0	9	1
x_2	0	1	1/2	1/2	-12	0	3	1/2
	0	0	1/2	-3/4	20	0	6	1/2

La variabile da introdurre in base è x_4 mentre quella da togliere dalla base è x_2 , quindi il pivot è 1/2.

Con l'operazione $R_3 \to 2R_3$ e successivamente con le operazioni:

$R_4 \to R_4 + \frac{3}{4} R_3$, $R_2 \to R_2 - \frac{1}{4} R_3$ si giunge all'ultima tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4

Il massimo è nuovamente Z= 5/4 ottenuto in corrispondenza alla soluzione di base $(\frac{3}{4}, 0 ,0,1,0,1,0)$.

OSSERVAZIONE. Con la regola di Bland non siamo finiti in un ciclo, però il procedimento è stato sensibilmente più lungo di quello ottenuto con il secondo procedimento. Pertanto in pratica è meglio seguire la seguente procedura:

si applichi un qualsiasi procedimento purchè il termine noto della riga del pivot non sia nullo. In tal caso infatti la funzione obiettivo cresce. Se però si è obbligati a scegliere un pivot il cui corrispondente termine noto è nullo si usi allora la regola di Bland

8.-Come porre un problema di programmazione lineare in forma canonica

In questo paragrafo vogliamo provare che ogni problema di programmazione lineare può essere posto in forma canonica. Abbiamo già visto che i vincoli possono essere espressi come sistema di equazioni. Cambiando eventualmente di segno alle equazioni si può fare in modo che i termini noti siano non negativi.

Mostriamo ora che ogni problema ove si richieda di rendere minima la funzione obiettivo può essere ricondotto ad un problema ove la funzione obiettivo sia da rendere massima.

Supposto che la funzione da rendere minima sia al solito

$Z= c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_nx_n +z_0$, consideriamo il problema di rendere massima la funzione $W = -c_1x_1-c_2x_2-\ldots c_nx_n -z_0$, con gli stessi vincoli del precedente problema. Osserviamo che l'insieme delle soluzioni ammissibili è lo stesso per i due problemi e che il valore che W assume in corrispondenza ad una soluzione ammissibile è l'opposto di quello assunto da Z. Pertanto il minimo di Z coincide con il massimo di W. Osserviamo ancora che l'ultima riga della tabella iniziale del problema di rendere massima la funzione W è

	$c_1 \quad c_2\ldots c_n \; 0 \ldots 0$	$-z_0$,

Il minimo di Z è pertanto l'opposto del valore che appare all'incrocio fra l'ultima riga e l'ultima colonna dell'ultima tabella.
Passiamo infine al più complicato problema di determinare una soluzione di base ammissibile con la quale iniziare il metodo del simplesso. Ciò è necessario ad esempio quando in vincoli sono del tipo ≥ con termini noti non negativi.
Ripartiamo dal solito problema di rendere massima la funzione Z sapendo che :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ -c_1x_1 - \ldots \quad -c_nx_n + z = z_0 \end{cases}$$

con per ogni i, $x_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$.

Chiamiamo tale problema "problema I" e consideriamo il problema di rendere minima la funzione $W = x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$ sapendo che :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_{2n} \quad + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m \\ -c_1x_1 - \ldots \quad -c_nx_n \quad + z = z_0 \end{cases}$$

con per ogni i, $x_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$.

Chiamiamo questo problema "Problema II" e le nuove variabili artificiali. Si vede subito che in questo problema sono variabili di base le x_i con $i= n+1, \ldots, n+m$ mentre i termini noti danno la soluzione di base. Poiché però W non è espressa in funzione della variabili non di base sommiamo a W le prime m equazioni del precedente sistema ottenendo:
$W = b_1 +\ldots+ b_m – (a_{11} + \ldots+ a_{m1}) x_1 - \ldots -(a_{1n}+ \ldots+ a_{mn})x_n$.
Il problema è ora in forma canonica e applicando il metodo del simplesso cerchiamo di sostituire le variabili di base con le variabili x_i con $i=1,\ldots,n$. ottenendo così un sistema di variabili estratte da quelle del problema I.
Vediamo se tale procedimento giunge a termine.

Osserviamo prima che W non è negativa.
Se poi $(s_1, \ldots s_n)$ è una soluzione ammissibile del problema I, allora $(s_1, \ldots s_n, 0, \ldots, 0)$ è una soluzione ammissibile del problema II in corrispondenza alla quale W = 0. Se pertanto applicando il metodo del simplesso al problema II troviamo che il minimo di W è positivo si ha che il problema I non ha soluzioni.
Se invece si prova che il minimo di W è zero allora necessariamente ciò avviene in corrispondenza ad una soluzione di base del tipo $(s_1, \ldots s_n, 0, \ldots, 0)$.
Ma allora $(s_1, \ldots s_n)$ è una soluzione ammissibile, ma non necessariamente di base, del problema I che pertanto ammette soluzione.
Proviamo ora che nel rendere minima la funzione W è possibile evidenziare, nel caso in cui il minimo di W sia 0, un sistema di variabili di base per il problema I.
Consideriamo la prima tabella del problema II alla quale abbiamo aggiunto una riga contenente i coefficienti della funzione Z. In tal modo in tale tabella potremo leggere sia i vincoli che la funzione obiettivo di entrambi i problemi.

	$x_1 \ldots\ldots x_k \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots\ldots x_{n+h} \ldots\ldots x_{n+m}$	
x_{n+1}	$a_{11} \ldots\ldots a_{1k} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}$	$1 \quad 0 \ldots 0 \ldots\ldots 0$	b_1
x_{n+2}	$a_{21} \ldots\ldots a_{2k} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}$	$0 \quad 1 \quad 0 \ldots\ldots 0$	b_2
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
x_{n+h}	$\ldots a_{h1} \ldots\ldots a_{hk} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0$	b_h
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
x_{n+m}	$a_{m1} \ldots\ldots a_{mk} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}$	$0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \ldots 1$	b_m
	$-c_1 \ldots\ldots -c_k \ldots\ldots\ldots\ldots -c_n$		z_0
	$d_1 \ldots\ldots d_k \ldots\ldots\ldots\ldots d_n$	$0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0$	d_0

ove $d_1 = -(a_{11} + \ldots + a_{m1}), \ldots, d_k = -(a_{1k} + \ldots + a_{mk}), \ldots, d_n = -(a_{1n} + \ldots + a_{mn})$,
$d_0 = -(b_1 + \ldots + b_m)$.
Proveremo che nel rendere minima la funzione W il pivot verrà sempre scelto nelle prime n colonne.
Poiché nella prima tabella tutte le variabili artificiali sono di base il pivot viene scelto nelle prime n colonne. Supposto sia l'elemento a_{hk} la tabella successiva è del tipo:

	$x_1 \dots$	x_{k-1}	x_k	$x_{k+1} \dots\dots x_n$	$x_{n+1} \dots x_{n+h-1}$	x_{n+h}	$x_{n+h+1} \dots x_{n+m}$	
x_{n+1}	$a'_{11} \dots$	$a'_{1,k-1}$	0	$a'_{1,k+1}\, 0 \dots\dots a'_{1n}$	$1 \quad 0 \dots 0$	$a'_{1,n+h}$	$0 \dots\dots 0$	b'_1
……	……	……	……	……	……	……	……	……
x_{n+h-1}	$a'_{h-1,1} \dots$	$a'_{h-1,k-1}$	0	$a'_{h-1,k+1} \dots\dots a'_{h-1,n}$	$0 \dots\dots 0$	$a'_{h-1,n+h}$	$0 \dots\dots 0$	b'_{h-1}
x_k	$a'_{h1} \dots$	$a'_{h,k-1}$	1	$a'_{h,k+1} \dots\dots a'_{hn}$	$0 \dots\dots 0$	$a'_{h,n+h}$	$0 \dots\dots 0$	b'_h
x_{n+h+1}	$a'_{h+1,1} \dots$	$a'_{h+1,k-1}$	0	$a'_{h+1,k+1} \dots\dots a'_{h+1,n}$	$0 \dots\dots 0$	$a'_{h-1,n+h}$	$0 \dots\dots 0$	b_{h+1}
……	……	……	……	……	……	……	……	……
……	……	……	……	……	……	……	……	……
x_{n+m}	$a'_{m1} \dots\dots$	$a'_{m,k-1}$	0	$a'_{m,k+1} \dots a'_{mn}$	$0 \dots\dots 0$	$a'_{m,n+h}$	$0 \dots\dots 1$	b'_m
	$-c'_1 \dots\dots$	$-c'_{k-1}$	0	$-c'_{k+1} \dots\dots -c'_n$				z'_0
	$d'_1 \dots\dots$	d'_{k-1}	0	$d'_{k+1} \dots\dots d'_n$	$0 \quad 0 \dots\dots 0$	d'_{n+h}	$0 \dots\dots 0$	d'_0

ove, ad esempio

$$a'_{11} = a_{11} - a_{1k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}}, \dots, a'_{h-1,1} = a_{h-1,1} - a_{h-1,k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}},\ a'_{h1} = \frac{a_{h1}}{a_{hk}},\ a'_{h+1,1} = a_{h+1,1} - a_{h+1,k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}},$$

$$\dots, a'_{m,1} = a_{m1} - a_{mk}\frac{a_{h1}}{a_{hk}} \quad \text{e}$$

$$d'_1 = d_1 - d_k\frac{a_{h1}}{a_{hk}}, \dots, d'_{k-1} = d_{k-1} - d_k\frac{a_{h,k-1}}{a_{hk}},\ d'_{k+1} = d_{k+1} - d_k\frac{a_{h,k+1}}{a_{hk}}, \dots,$$

$$d'_n = d_n - d_k\frac{a_{hn}}{a_{hk}},\ d'_0 = d_0 - d_k\frac{b_h}{a_{hk}}.$$

Pertanto

$$d'_1 = d_1 - d_k\frac{a_{h1}}{a_{hk}} = -(a_{11} + \dots + a_{m1}) + \frac{a_{h1}}{a_{hk}}(a_{1k} + \dots + a_{mk}) =$$

$$= -[(a_{11} - a_{1k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}}) + \dots + (a_{h-1,1} - a_{h-1,k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}}) + (a_{h+1,1} - a_{h+1,k}\frac{a_{h1}}{a_{hk}}) + \dots +$$

$$(a_{m1} - a_{mk}\frac{a_{h1}}{a_{hk}})],$$

cioè d'_1 è l'opposto della somma degli elementi della prima colonna della seconda tabella tralasciando l'elemento della k-esima e della (m+1)-esima riga. Ciò vale per ogni d'_i con i= 0,…,n.

Poiché nella tabella II abbiamo una formulazione equivalente del problema I per risolverlo possiamo riferirci a questa nuova formulazione che rispetto a quella della prima tabella ha il vantaggio che una delle prime n variabili, la x_k, può essere scelta come variabile di base. Per vedere se questo problema ha soluzione possiamo allora risolvere il problema che chiamiamo problema II' di rendere minima la funzione

$W' = x_{n+1} + \ldots + x_{n+h-1} + x_{n+h+1} + \ldots + x_{n+m}$ dove i vincoli sono quelli che appaiono nelle prime m righe della seconda tabella tralasciando però l'(n+h)-esima colonna.

Si osservi che volendo scrivere il problema II' in forma canonica, cioè esprimendo W' in funzione delle variabili non di base, cioè sommando a W' le prime m equazioni tranne la h-esima, otteniamo come ultima riga proprio la (m+2)-esima riga della seconda tabella. Possiamo pertanto direttamente utilizzare la seconda tabella dopo aver cancellato la (n+h)-esima colonna. Poiché sono variabili di base x_k e le m-1 variabili artificiali rimaste il pivot viene nuovamente scelto nelle prime n colonne. Ripetendo il procedimento si trova una nuova formulazione del problema I. Si osservi che le colonne delle variabili artificiali se restano di base restano invariate, se escono dalla base vengono eliminate dal problema e pertanto si può fare a meno di calcolarle.

Si ripete il precedente procedimento finchè si giunge a determinare il minimo della funzione somma delle variabili artificiali

Pertanto quando si arriva alla tabella finale che dà tale minimo , se si trova che tale minimo è 0 e se si ha un sistema di variabili di base estratte dalle prime n , il problema I è in forma canonica e il metodo del simplesso può essere ad esso applicato.
Se invece nella soluzione di base sono rimaste come variabili di base alcune variabili artificiali si può procedere nel seguente modo: detta x_j la variabile di base artificiale in questione, osserviamo che poiché la funzione obiettivo vale 0, essa assume nella corrispondente soluzione di base il valore 0. Vi sono allora due possibilità.

1) Nella equazione ove la variabile appare con coefficiente 1, le prime n variabili hanno coefficiente 0. Allora tale equazione è superflua e può essere eliminata.
2) In tale equazione vi è un elemento $a_{hk} \neq 0$ con $1 \leq k \leq n$. Si può allora con le solite operazioni far diventare la variabile x_k variabile di base al posto di x_j. Il problema resta in forma canonica perché i termini noti non cambiano dato che nell' h-esima riga il termine noto è 0.

9.-Esempi

Negli esempi che seguono i problemi non sono in forma canonica. Il primo passo è pertanto quello di metterli in forma canonica.

ESEMPIO 2/8.- Rendere minima la funzione Z = 10x + 4y sapendo che x,y ≥ 0 e che

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 60 \\ 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72. \end{cases}$$

Rendere minima la funzione Z equivale a rendere massima la funzione $Z' = -10x - 4y$. L'opposto del massimo della funzione Z' sarà il minimo di Z.

Trasformando i vincoli in equazioni si ha:

$$\begin{cases} 3x + 2y - x_1 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 = 72. \end{cases}$$

con $x, y, x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Poiché il problema non è ancora in forma canonica , ricordando quanto detto nel precedente paragrafo occorre risolvere il seguente problema:

rendere minima la funzione $W = x_4 + x_5 + x_6$ sapendo che

$$\begin{cases} 3x + 2y - x_1 + x_4 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 + x_5 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 + x_6 = 72 \\ 10x + 4y + z' = 0 \end{cases}$$

con $x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

In questo problema sono variabili di base x_4, x_5, x_6 con corrispondente soluzione di base (0,0,0,0,0,60,84,72), ma per averlo in forma canonica occorre sommare a $W = x_4 + x_5 + x_6$ le prime tre equazioni ottenendo:

$W = 216 - 13x - 10y + x_1 + x_2 + x_3$

Poiché W va resa minima occorre rendere massima la

$W' = -216 + 13x + 10y - x_1 - x_2 - x_3$

Il sistema sul quale operare si presenta infine nel seguente modo:

$$\begin{cases} 3x + 2y - x_1 + x_4 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 + x_5 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 + x_6 = 72 \\ 10x + 4y + z' = 0 \\ -13x - 10y + x_1 + x_2 + x_3 + w' = -216 \end{cases}$$

con $x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

In corrispondenza alla precedente soluzione di base W' vale – 216. Rappresentiamo il problema con la solita tabella e cerchiamo di eliminare le variabili x_4, x_5, x_6 rendendo massima W'. Si ottiene:

	x	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	2	-1	0	0	1	0	0	60
x_5	7	2	0	-1	0	0	1	0	84
x_6	3	6	0	0	-1	0	0	1	72
	10	4	0	0	0				0
	-13	-10	1	1	1	0	0	0	-216

Nelle tabelle successive non riportiamo i valore delle variabili x_4, x_5, x_6 .

Prendiamo come pivot l'elemento 7 della prima colonna. Quindi con l'operazione

$R_2 \to \frac{1}{7}R_2$ e successivamente con le operazioni $R_1 \to R_1 - 3R_2$ $R_3 \to R_3 - 3R_2$ $R_4 \to R_4 - 10R_2$ $R_5 \to R_5 + 13R_2$ otteniamo la tabella:

	x	y	x_1	x_2	x_3	
x_4	0	8/7	-1	3/7	0	24
x	1	2/7	0	-1/7	0	12
x_6	0	36/7	0	3/7	-1	36
	0	8/7	0	10/7	0	-120
	0	-44/7	1	-6/7	1	-60

Prendiamo come pivot l'elemento 36/7 della seconda colonna. Quindi con l'operazione $R_3 \to \frac{7}{36}R_3$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 - \frac{8}{7}R_3$ $R_2 \to R_2 - \frac{2}{7}R_3$ $R_4 \to R_4 - \frac{8}{7}R_3$ $R_5 \to R_5 + \frac{44}{7}R_3$

otteniamo la tabella:

	x	y	x_1	x_2	x_3	
x_4	0	0	-1	1/3	2/9	16
x	1	0	0	-1/6	1/18	10
y	0	1	0	1/12	-7/36	7
	0	0	0	4/3	2/9	-128
	0	0	1	-1/3	-2/9	-16

Prendiamo come pivot l'elemento 1/3 della quarta colonna. Quindi con l'operazione $R_1 \to 3R_1$ e successivamente con le operazioni

$R_2 \to R_2 + \frac{1}{6}R_1$ $R_3 \to R_3 - \frac{1}{12}R_1$ $R_4 \to R_4 - \frac{4}{3}R_1$ $R_5 \to R_5 + \frac{1}{3}R_1$

otteniamo la tabella:

	x	y	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	0	-3	1	2/3	48
x	1	0	-1/2	0	1/6	18
y	0	1	1/4	0	-1/4	3
	0	0	4	0	-2/3	-192
	0	0	0	0	0	0

Si vede che W' ha assunto il valore 0 quindi il primo problema ammette soluzioni . Esso è scritto in forma canonica con variabili di base x_2 , x,y e soluzione di base (18, 3, 0,48,0), in corrispondenza alla quale la funzione Z' assume il valore –192.

Possiamo procedere con il metodo del simplesso assumendo come pivot l'elemento 2/3 della quinta colonna. . Quindi con l'operazione $R_1 \rightarrow \frac{3}{2}R_1$ e successivamente con le operazioni

$$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{6}R_1 \qquad R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{4}R_1 \qquad R_4 \rightarrow R_4 + \frac{2}{3}R_1$$

otteniamo la tabella seguente dalla quale si vede che il minimo di Z è 144 ottenuto per x=6, y=21 e x_3 =72 che però non concorre al calcolo di Z.

	x	y	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0	-9/2	3/2	1	72
x	1	0	1/4	-1/4	0	6
y	0	1	-7/8	3/8	0	21
	0	0	1	1	0	-144

ESEMPIO 2/9.([T],pag.84)- Rendere minima la funzione $Z = x_1 + x_2 + x_3$ sapendo che le variabili assumono solo valori non negativi e che:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ -x_1 + 2x_3 \ge 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Ciò equivale a rendere massima la funzione $Z' = -x_1 - x_2 - x_3$ sapendo che

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \text{ con } x_i \ge 0 \text{ per } i = 1,2,3,4,5.$$

Per avere il problema in forma canonica occorre rendere minima la funzione $W = x_6 + x_7$ sapendo che

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + z' = 0 \end{cases} \qquad \text{con } x_i \ge 0 \text{ per } i = 1,2,3,4,5,6,7.$$

Poiché le variabili di base sono x_4, x_6, x_7 occorre sommare a $W= x_6 + x_7$ la seconda e la terza equazione ottenendo il problema in forma canonica.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + z' = 0 \\ x_2 - 4x_3 + x_5 + w' = -8 \end{cases} \quad \text{con } x_i \geq 0 \text{ per } i = 1,\ldots,7.$$

Cerchiamo ora di eliminare le variabili x_6 e x_7 e di azzerare la W.
La prima tabella è:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	-1	2	1	1	0	0	0	1
x_6	-1	0	2	0	-1	1	0	4
x_7	1	-1	2	0	0	0	1	4
	1	1	1	0	0			0
	0	1	-4	0	1	0	0	-8

Prendiamo ora come pivot l'elemento 1 della terza colonna. Quindi con le operazioni:
$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $\quad R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\quad R_4 \to R_4 - R_1$ $\quad R_5 \to R_5 + 4R_1$
otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-1	2	1	1	0	1
x_6	1	-4	0	-2	-1	2
x_7	3	-5	0	-2	0	2
	2	-1	0	-1	0	-1
	-4	9	0	4	1	-4

Prendiamo come pivot l'elemento 3 della prima colonna. Quindi con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{3}R_3$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 + R_3 \quad R_2 \to R_2 - R_3 \quad R_4 \to R_4 - 2R_3 \quad R_5 \to R_5 + 4R_3$
otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1/3	1	1/3	0	5/3
x_6	0	-7/3	0	-4/3	-1	4/3
x_1	1	-5/3	0	-2/3	0	2/3
	0	7/3	0	1/3	0	-7/3
	0	7/3	0	4/3	1	-4/3

Poiché il minimo della funzione W è 4/3 il problema iniziale non ha soluzioni.

ESEMPIO 2/10.- ([T], pag.81) Rendere minima la funzione
$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4$ sapendo che le variabili assumono solo valori non negativi e che:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Ciò equivale a rendere minima la funzione $W = x_5 + x_6$ sapendo che

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + z' = 0 \end{cases}$$

Espressa la funzione W in funzione delle variabili non di base si ottiene la seguente tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	1	-2	-3	-2	1	0	3
x_6	1	-1	2	1	0	1	11
	2	-3	1	1			0
	-2	3	1	1	0	0	-14

Prendiamo come pivot l'elemento di posto (1,1).
Con le operazioni

$R_2 \to R_2 - R_1 \qquad R_3 \to R_3 - 2R_1 \qquad R_4 \to R_4 + 2R_1$

otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-2	-3	-2	3
x_6	0	1	5	3	8
	0	1	7	5	-6
	0	-1	-5	-3	-8

Prendiamo come pivot l'elemento 5 della terza colonna. Quindi con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{5}R_2$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 + 3R_2 \qquad R_3 \to R_3 - 7R_2 \qquad R_4 \to R_4 + 5R_2$

otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-7/5	0	-1/5	39/5
x_3	0	1/5	1	3/5	8/5
	0	-2/5	0	4/5	-86/5
	0	0	0	0	0

La funzione W ha come valore minimo 0 e le variabili x_5 e x_6 non sono più variabili di base quindi possiamo proseguire col metodo del simplesso.

Prendiamo come pivot l'elemento 1/5 della seconda colonna. Quindi con l'operazione $R_2 \to 5R_2$ e successivamente con le operazioni

$R_1 \to R_1 + \frac{7}{5}R_2 \qquad R_3 \to R_3 + \frac{2}{5}R_2$

otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	7	4	19
x_2	0	1	5	3	8
	0	0	2	2	-14

Il minimo è 14 ottenuto in corrispondenza alla soluzione di base (19,8,0,0).

ESEMPIO 2/11 .- E' come l'esempio precedente con in più la condizione, ovviamente ridondante, $2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 14$. Si inizia con la tabella tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-2	-3	-2	1	0	0	3
x_6	1	-1	2	1	0	1	0	11
x_7	2	-3	-1	-1	0	0	1	14
	2	-3	1	1	0			0
	-4	6	2	2	0	0	0	-28

Prendiamo come pivot l'elemento 1 di posto (1,1). Quindi con le operazioni dell'esempio precedente e con

$R_3 \to R_3 - 2R_1 \qquad R_5 \to R_5 + 4R_1$

otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-2	-3	-2	3
x_6	0	1	5	3	8
x_7	0	1	5	3	8
	0	1	7	5	-6
	0	-2	-10	-6	-16

Prendiamo come pivot l'elemento 5 di posto (2,3). Quindi con le operazioni dell'esempio precedente e con

$R_3 \to R_3 - 5R_2 \qquad R_5 \to R_5 + 10R_2$

otteniamo la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-7/5	0	-1/5	39/5
x_3	0	1/5	1	3/5	8/5
x_7	0	0	0	0	0
	0	-2/5	0	4/5	-86/5
	0	0	0	0	0

Osserviamo che W ha raggiunto il valore 0, quindi nuovamente il problema iniziale ha soluzione. La variabile x_7 è ancora variabile di base, ma il terzo vincolo può essere trascurato essendo la terza riga composta da tutti elementi nulli. Abbiamo avuto conferma del fatto che il terzo vincolo è superfluo. Noi operiamo infatti con operazioni che trasformano il sistema in sistemi equivalenti e fra questi c'è anche quello in cui il terzo vincolo è eliminato L'esempio termina come nell'esempio precedente.

ESEMPIO 2/12.- Un'industria produce 3 oggetti A,B,C che rendono rispettivamente L.400, L.600 e L. 900. Ogni giorno devono essere prodotti almeno 300 pezzi A, non più di 1000 pezzi A , non più di 1400 pezzi B, non più di 1500 pezzi C. La produzione complessiva giornaliera non può superare i 2000 pezzi. Stabilire il programma di produzione che comporta il massimo ricavo.

Risoluzione.- Indicati con x,y,z il numero giornaliero di pezzi A,B,C prodotti il problema consiste nel rendere massima la funzione $Z = 400x + 600y + 900z$ sapendo che:

$$\begin{array}{c} 300 \leq x \leq 1000 \\ 0 \leq y \leq 1400 \\ 0 \leq z \leq 1500 \\ x + y + z \leq 2000. \end{array}$$

Tale problema può essere risolto per via grafica (vedi [FT]), dato che però l'insieme delle soluzioni ammissibili può essere difficile da rappresentare può risultare utile usare il metodo del simplesso.

Il sistema dei vincoli, ove tutte le variabili possono assumere solo valori non negativi, va scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} x + x_1 = 1000 \\ y + x_2 = 1400 \\ z + x_3 = 1500 \\ x + y + z + x_4 = 2000 \\ x - x_5 = 300 \end{cases}$$

Non essendo evidenziata dal sistema una soluzione di base ammissibile occorre introdurre una nuova variabile x_6 e cercare di rendere nulla la funzione $W = x_6$ L'ultima condizione dei vincoli diventa $x - x_5 + x_6 = 300$ e la funzione W in funzione delle variabili non di base che sono x, y, z, x_5 diventa $W = 300 - x + x_5$.

Si considera allora la seguente tabella:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1000
x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1400
x_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1500
x_4	1	1	1	0	0	0	1	0	0	2000
x_6	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	300
	-400	-600	-900	0	0	0	0	0		0
	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-300

Scegliendo come pivot l'elemento di posto (5,1) si ottiene la seguente tabella:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	0	0	1	0	0	0	1	700
x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	1400
x_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
x_4	0	1	1	0	0	0	1	1	1700
x	1	0	0	0	0	0	0	-1	300
	0	-600	-900	0	0	0	0	-400	120000
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Scegliendo come pivot l'elemento di posto (3,3) si ottiene la seguente tabella:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	0	0	1	0	0	0	1	700
x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	1400
z	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
x_4	0	1	0	0	0	-1	1	1	200
x	1	0	0	0	0	0	0	-1	300
	0	-600	0	0	0	900	0	-400	1470000

Scegliendo ora come pivot l'elemento di posto (4,2) si ha la seguente tabella conclusiva:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	0	0	1	0	0	0	1	700
x_2	0	0	0	0	1	1	-1	-1	1200
z	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
y	0	1	0	0	0	-1	1	1	200
x	1	0	0	0	0	0	0	-1	300
	0	0	0	0	0	300	600	200	1590000

Il massimo di Z è pertanto 1590000 raggiunto per x = 300, y = 200, z = 1500.

ESEMPIO 2.13.- Rendere minima la funzione Z = -2y –z sapendo che

$$\begin{cases} x + y - 2z \leq 7 \\ -3x + y + 2z \leq 3 \end{cases} \quad \text{e che} \quad x,y,z \geq 0.$$

Trasformato il problema in forma canonica si ottiene la seguente tabella:

	x	y	z	x_4	x_5	
x_4	1	1	-2	1	0	7
x_5	-3	1	2	0	1	3
	0	-2	-1	0	0	0

Il pivot è l'elemento 1 che si trova nel posto (2,2).

Con le operazioni $R_1 \to R_1 - R_2$, $R_3 \to R_3 + 2R_2$ si trova la tabella:

	x	y	z	x_4	x_5	
x_4	4	0	-4	1	-1	4
y	-3	1	2	0	1	3
	-6	0	3	0	2	6

Il pivot è elemento 4 della prima colonna. Prima con l'operazione $R_1 \to \frac{1}{4} R_1$,

poi con le operazioni $R_2 \to R_2 + 3R_1$ $R_3 \to R_3 + 6R_1$ si trova la tabella

	x	y	z	x_4	x_5	
x	1	0	-1	1/4	-1/4	1
y	0	1	-1	3/4	1/4	6
	0	0	-3	3/2	1/2	12

Poiché vi è una colonna di termini negativi la funzione Z è illimitata .

ESERCIZIO 2.14. Si consideri il problema di programmazione lineare espresso dalla seguente tabella ove la funzione obiettivo è da rendere massima, a è un parametro reale e le variabili assumono solo valori non negativi .

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	
x_1	-2	0	0	1	0	0	2
x_2	3	-1	2	0	1	0	1
x_3	-5	1	0	0	0	1	1
	4	a-1	2	0	0	0	4

Dire per quali valori del parametro a la funzione obiettivo è illimitata superiormente e per quali valori ammette massimo. In questo secondo caso determinare tale massimo.

SOLUZIONE. Dalla precedente tabella si vede subito che se $a \geq 1$ il massimo di Z è 4.

Se invece $a < 1$ occorre operare col metodo del simplesso scegliendo come pivot l'elemento 1 di posto (3,2) . Con le operazioni $R_2 \rightarrow R_2 + R_3$ $\quad R_4 \rightarrow R_4 - (a-1)R_3$ si ottiene la seguente tabella:

	x	y	z	x_1	x_2	x_3	
x_1	-2	0	0	1	0	0	2
x_2	-2	0	2	0	1	1	2
y	-5	1	0	0	0	1	1
	5a-1	0	2	0	0	1-a	5-a

Poiché $a < 1$ l'unico elemento dell'ultima riga da considerare è 5a-1.

Pertanto se a< 1/5 la funzione Z è illimitata, se $\frac{1}{5} < a < 1$ il massimo di Z è 5-a.

CAPITOLO TERZO
IL PROBLEMA DUALE

In questo capitolo introdurremo la nozione di problema duale di un problema di programmazione lineare. Dimostreremo poi il teorema fondamentale che giustifica l'introduzione di tale nozione e l'importante teorema di complementarietà. Termineremo il capitolo con alcuni esempi significativi.

1.- Definizione del problema duale

DEFINIZIONE 3/1.- *Diciamo che un problema di programmazione lineare è* scritto in forma massimizzante *se si deve cercare il massimo della funzione obiettivo:* $Z = c_1x_1 + \ldots.. + c_nx_n$ *e se i vincoli sono del tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots.. + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots.. + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0 \text{ per } i= 1,\ldots,n \end{cases}$$

DEFINIZIONE 3/2.- *Diciamo che un problema di programmazione lineare è* scritto in forma minimizzante *se si deve cercare il minimo della funzione obiettivo:*
$Z = c_1x_1 + \ldots.. + c_nx_n$ *e se i vincoli sono del tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots.. + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots.. + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0 \text{ per } i= 1,\ldots,n \end{cases}$$

Osserviamo che nelle precedenti definizioni non è stato posto nessun vincolo sul segno dei termini noti.

PROPRIETÀ 3/1.- *Ogni problema di programmazione lineare può essere posto in forma massimizzante (minimizzante)*

Dimostrazione.- Riferendoci al caso massimizzante sappiamo dal paragrafo 8 del capitolo 2 che ci si può sempre ridurre a cercare il massimo della funzione obiettivo.
Se fra i vincoli appare qualche disuguaglianza del tipo (≥) cambiando di segno si trasforma in una diseguaglianza del tipo (≤). Se infine un vincolo è espresso da una equazione questa può essere sostituta in modo ovvio da due disequazioni.

Poiché ogni problema si può scrivere in forma massimizzante daremo la definizione di problema duale solo in questo caso

DEFINIZIONE 3/3.-*Considerato il problema della def. 3/1 diciamo suo* duale *il seguente problema :*
Rendere minima la funzione

$$W = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$$

sapendo che

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_i \geq 0 \text{ per } i = 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Pertanto nel problema duale

(i) tutti i vincoli sono del tipo (≥)
(ii) il numero delle variabili è uguale al numero delle equazioni del primo problema
(iii) il numero dei vincoli è uguale al numero delle variabili del primo problema
(iv) i termini noti dei vincoli sono i coefficienti della funzione obiettivo del primo problema
(v) i coefficienti della funzione obiettivo sono i termini noti dei vincoli del problema originario
(vi) la matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli è la trasposta della matrice del sistema dei vincoli del primo problema

Osserviamo ancora che il duale di un problema in forma massimizzante è un problema in forma minimizzante.

ESEMPIO 3/1.- Trovare il duale del seguente problema:
Rendere massima la funzione $Z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$ sapendo che:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Risoluzione.- Il problema duale è:
Rendere minima la funzione $W = 10y_1 + 20y_2$ sapendo che:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ 4y_1 - y_2 \geq 2 \\ -7y_1 + 8y_2 \geq 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Come ulteriore esempio troviamo il duale del problema in forma minimizzante della def.3/2. Occorre prima scrivere tale problema in forma massimizzante:

Rendere massima la funzione $Z' = -c_1x_1 - \ldots.. - c_nx_n$ sapendo che:

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - \ldots.. - a_{1n}x_n \leq -b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{m1}x_1 - \ldots.. - a_{mn}x_n \leq -b_m \\ x_i \geq 0 \text{ per } i= 1,\ldots,n \end{cases}$$

Il suo duale è:
Rendere minima la funzione

$$W' = -b_1y_1 - \ldots.. - b_my_m$$

sapendo che

$$\begin{cases} -a_{11}y_1 -a_{21}y_2- \ldots.. - a_{m1}y_m \geq -c_1 \\ -a_{12}y_1 -a_{22}y_2- \ldots.. - a_{m2}y_m \geq -c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2-\ldots.. - a_{mn}y_m \geq -c_n \\ y_i \geq 0 \text{ per } i= 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Ma questo equivale a:
Rendere massima la funzione

$$W = b_1y_1 + \ldots.. + b_my_m$$

sapendo che

$$\begin{cases} a_{11}y_1 +a_{21}y_2+ \ldots.. + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ a_{12}y_1 +a_{22}y_2+ \ldots.. + a_{m2}y_m \leq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 +a_{2n}y_2+\ldots.. + a_{mn}y_m \leq c_n \\ y_i \geq 0 \text{ per } i= 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Il duale di un problema in forma minimizzante è pertanto un problema in forma massimizzante. Se noi ora calcolassimo il duale di questo problema ritroveremmo quello di partenza.

Vogliamo ora esprimere in modo differente i precedenti problemi. Tale nuovo modo, che è detto in forma matriciale, sarà utile in seguito.

DEFINIZIONE 3/4.- *Date due matrice* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$ *dello stesso tipo (cioè con lo stesso numero di righe e colonne) diciamo che* $A \leq B$ *se per ogni coppia (i,j) risulta* $a_{ij} \leq b_{ij}$. *Diciamo poi che* $A \geq 0$ *se tutti gli elementi di* A *sono non negativi.*

PROPRIETÀ 3/2.- *Se A,B,C sono tre matrici tali che $A \leq B$ e $C \geq 0$ allora $AC \leq BC$.(Si ammette ovviamente che sia possibile effettuare i prodotti).*

Dimostrazione.- Posto $C = (c_{hk})$, da $a_{ij} \leq b_{ij}$ segue che $a_{ij}\, c_{jk} \leq b_{ij}\, c_{jk}$ e quindi $a_{i1}\, c_{1k} + a_{i2}\, c_{2k} +\ldots\ldots.+ a_{in}\, c_{nk} \leq b_{i1}\, c_{1k} + b_{i2}\, c_{2k} +\ldots\ldots.+ b_{in}\, c_{nk}.$

Riferendoci ora al problema della def. 3/1 e al suo duale (def. 3/3), consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Denotata con ${}^tM$ la matrice trasposta di una generica matrice M si ha allora che tali problemi possono essere così espressi:

Rendere massima la funzione $Z = {}^tC\,X = {}^tX\,C$ sapendo che $AX \leq B$ e $X \geq 0$.

Rendere minima la funzione $W = {}^tB\,Y = {}^tY\,B$ sapendo che ${}^tAY \geq C$ e $Y \geq 0$.

Indicati infine con $C \cdot X$ e con $B \cdot Y$ il prodotto scalare dei vettori C,X e B,Y le funzioni obiettivo possono più semplicemente essere così scritte: $Z = C \cdot X$ e $W = B \cdot Y$.

2.- Il teorema fondamentale

Riferendoci sempre al problema della def. 3/1 e al suo duale introduciamo le due seguenti nuove matrici:

$$X_0 = \begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots\ldots \\ s_n \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \ldots\ldots \\ t_m \end{pmatrix}$$

dove $(s_1, \ldots s_n)$ è una soluzione accettabile del problema della def. 3/1 e $(t_1, \ldots t_m)$ è una soluzione accettabile del problema duale. Pertanto risulta: $AX_0 \leq B$ e ${}^tAY_0 \geq C$,

$X_0 \geq 0$, $Y_0 \geq 0$, $Z = C \cdot X_0$ e $W = B \cdot Y_0$.

PROPRIETÀ 3/3.- *Con le notazioni prima introdotte risulta:* $C \cdot X_0 \leq B \cdot Y_0$.

Dimostrazione.- Poiché $Y_0 \geq 0$ anche ${}^tY_0 \geq 0$, quindi da $AX_0 \leq B$ per la prop. 3/2 segue ${}^tY_0AX_0 \leq {}^tY_0B$. Analogamente da $X_0 \geq 0$ e ${}^tAY_0 \geq C$ segue ${}^tX_0 \geq 0$ e quindi ${}^tX_0\,{}^tAY_0 \geq {}^tX_0C$. Poiché ${}^tX_0\,{}^tAY_0$ è una matrice composta da un unico elemento si ha che ${}^tX_0\,{}^tAY_0 = {}^t({}^tX_0\,{}^tAY_0) = {}^tY_0\,AX_0$, pertanto si ha:

$$C \cdot X_0 = {}^tX_0C \leq {}^tX_0\,{}^tAY_0 = {}^tY_0\,AX_0 \leq {}^tY_0B = B \cdot Y_0$$

PROPRIETÀ 3/4.- *Indicando sempre con* X_0 *ed* Y_0 *due soluzioni ammissibili rispettivamente del problema della def. 3/1 e del suo duale, se risulta* $C \cdot X_0 = B \cdot Y_0$ *tale comune valore è il massimo di* Z *e il minimo di* W.

Dimostrazione.- Se X_1 è un'altra soluzione del problema della def.3/1 per la prop. 3/3 risulta $C\cdot X_1 \leq B\cdot Y_0$ e pertanto $C\cdot X_1 \leq B\cdot X_0$. Quindi il massimo di Z è proprio $C\cdot X_0$.
Analogamente si procede per il minimo di W.

PROPRIETA' 3.5.- *Con le notazioni precedentemente introdotte, se Z è illimitata superiormente, il problema duale non ammette alcuna soluzione ammissibile.*

Dimostrazione.- Supponiamo che il problema duale ammetta una soluzione ammissibile in corrispondenza alla quale la funzione obbiettivo W assuma il valore z_0. Allora per la proprietà 3 ogni valore di Z dovrebbe essere non maggiore di z_0, assurdo.

OSSERVAZIONE:- Ovviamente se invece la funzione W è illimitata, il primo problema non ha soluzioni.

Veniamo ora al teorema fondamentale che giustifica l'introduzione del problema duale.

TEOREMA 3/6.- *Supponiamo che o il problema*

" Rendere massima $Z = C\cdot X$ *sapendo che* $AX \leq B$ *e* $X \geq 0$*"*

oppure il duale:

" Rendere minima la funzione $W = B\cdot Y$ *sapendo che* ${}^tAY \geq C$ *e* $Y \geq 0$*"*

abbiano soluzione ,cioè esistono o il massimo di Z o il minimo di W.
Allora anche l'altro problema ha soluzione e risulta max Z = min W.

Dimostrazione.- Supponiamo prima che sia il primo problema ad avere soluzione, cioè che esista X_0 tale che $X_0 \geq 0$ e $AX_0 \leq B$ e che per ogni X tale che $X \geq 0$ e $AX \leq B$ risulti $C\cdot X \leq C\cdot X_0$.

Introduciamo nel sistema dei vincoli m nuove variabili in modo da trasformare le disequazioni in equazioni. Dovremo pertanto operare sul seguente sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\ -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \qquad\qquad\qquad + z & = 0 \end{cases}$$

Dato che non è stata posta alcuna restrizione sul segno dei termini noti, alcuni di essi possono essere negativi. Supponiamo che i negativi siano quelli delle prime k equazioni. Per avere il problema in forma canonica occorre allora cambiare di segno le prime k equazioni ed introdurre altre k variabili. Il sistema si presenta allora nella seguente forma:

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n - x_{n+1} + \qquad\qquad + x_{n+m+1} = -b_1 \\ -a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n \quad - x_{n+2} + \qquad\qquad + x_{n+m+2} = -b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kn}x_n \quad - x_{n+k+} \qquad\qquad + x_{n+m+k} = -b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n + \quad + x_{n+k+1} + \qquad = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad + x_{n+m} \qquad = b_m \\ -c_1x_1 - \ldots - c_nx_n \qquad\qquad + z = 0. \end{cases}$$

Si considera quindi la seguente tabella:

$x_1 \ldots\ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots\ldots x_{n+k}$	$x_{n+k+1} \ldots x_{n+m}$	$x_{n+m+1} \ldots x_{n+m+k}$	
$-a_{11} \ldots\ldots -a_{1n}$	$-1 \quad 0 \ldots\ldots 0$	$0 \quad \ldots\ldots \quad 0$	$1 \quad \ldots\ldots \quad 0$	$-b_1$
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$
$-a_{k1} \ldots\ldots -a_{kn}$	$0 \ldots\ldots -1$	$0 \ldots\ldots 0$	$0 \ldots\ldots 0 \quad 1$	$-b_k$
$a_{k+1,1} \ldots\ldots a_{k+1,n}$	$0 \ldots\ldots 0$	$1 \quad 0 \ldots\ldots 0$	$0 \ldots\ldots 0$	b_{k+1}
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
$a_{m1} \ldots\ldots a_{mn}$	$0 \ldots\ldots 0$	$0 \ldots\ldots 0 \quad 1$	$0 \ldots\ldots 0$	b_m
$-c_1 \ldots\ldots -c_n$	$0 \ldots\ldots 0$	$0 \ldots\ldots 0$		0

Poiché il problema ammette soluzione si giunge alla tabella finale della quale riportiamo solo l'ultima riga.

$x_1 \ldots\ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots\ldots x_{n+k}$	$x_{n+k+1} \ldots x_{n+m}$	
$r_1 \ldots\ldots r_n$	$s_1 \ldots\ldots s_k$	$s_{k+1} \ldots\ldots s_m$	$C \cdot X_0$

Dato che questa è la tabella finale $C \cdot X_0$ è il massimo di Z e tutte le r_i le s_j sono non negative. Poniamo ora:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_m \end{pmatrix}$$

Ovviamente è (a) $Y_0 \geq 0$. Proviamo ora che: (b): ${}^tAY_0 \geq C$, (c) $C \cdot X_0 = B \cdot Y_0$.

Osserviamo che in ogni passo del metodo del simplesso ad ogni riga diversa da quella del pivot, viene aggiunto il prodotto di una costante per un'altra riga. Pertanto ogni riga della tabella finale è una opportuna combinazione lineare delle righe iniziali. Per meglio spiegare riferiamoci ad un esempio. Supponiamo che nel primo passo del metodo del simplesso il pivot sia nella prima riga e nel secondo passo nella seconda .Le righe così si trasformano:

$R_1 \to h_1R_1 \to h_1R_1 + k_1(R_2 + h_2R_1) = (h_1 + k_1h_2)R_1 + k_1 R_2,$

$R_2 \to R_2 + h_2R_1 \to k_2R_2 + k_2h_2 R_1,$

$R_3 \to R_3 + h_3R_1 \to R_3 + h_3R_1 + k_3(R_2 + h_2R_1) = R_3 + (h_3 + k_3h_2)R_1 + k_3 R_2,$

e così via ove le h_i e le k_j sono opportune costanti.

Indicata con R' l'ultima riga della tabella finale possiamo dire allora che esistono m costanti $d_1,\dots,d_m$ tali che $R' = R_{m+1} + d_1R_1 + \dots + d_mR_m$. Il coefficiente di R_{m+1} è 1 poiché il pivot non è mai nell'ultima riga.

In particolare per $i = 1, \dots,k$ si ha:

$$s_i = d_1 0 + \dots + d_{i-1}0 - d_i 1 + d_{i+1}0 + \dots + d_m 0, \text{ quindi risulta } s_i = - d_i .$$

Invece per $i = k+1,\dots, m$ si ha: $s_i = d_1 0 + \dots + d_{i-1}0 + d_i 1 + d_{i+1}0 + \dots + d_m 0$, quindi risulta $s_i = d_i$ e pertanto: $R' = R_{m+1} - s_1R_1 - \dots - s_kR_k + s_{k+1}R_{k+1} + \dots + s_mR_m$

Risulta quindi:

$$\begin{cases} r_1 = - c_1 + a_{11}s_1 + \dots + a_{k1}s_k + a_{k+1,1}s_{k+1} + \dots + a_{m1}s_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_n = - c_n + a_{1n}s_1 + \dots + a_{kn}s_k + a_{k+1,n}s_{k+1} + \dots + a_{mn}s_m \\ C\cdot X_0 = s_1b_1 + \dots + s_mb_m. \end{cases}$$

Dato che le r_i per $i= 1, \dots,n$ sono non negative il precedente sistema si trasforma in :

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \dots + a_{m1}s_m \geq c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}s_1 + \dots + a_{mn}s_m \geq c_n \\ C\cdot X_0 = s_1b_1 + \dots + s_mb_m. \end{cases}$$

Dalle m disequazioni segue che ${}^tAY_0 \geq C$, cioè la (b), l'equazione dà $C\cdot X_0 = B\cdot Y_0$ che è la (c).

La (a) e la (b) permettono di concludere che Y_0 è soluzione ammissibile del problema duale, la (c) e la prop.3/4 che $B \cdot Y_0$ è il minimo della funzione obiettivo del secondo problema.

Se invece è il secondo problema ad avere soluzione, trasformiamo il primo problema in forma minimizzante e il secondo in forma massimizzante. Poiché i due problemi restano fra loro duali possiamo applicare ad essi la prima parte della dimostrazione . Il teorema è così completamente provato.

Terminiamo il paragrafo con il teorema di complementarietà.

TEOREMA 3/7.-*Supponiamo che* $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ *sia una soluzione ammissibile del problema :*
rendere massima la funzione: $Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ *sapendo che:*

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \text{ per } i=1,\dots,n \end{cases}$$

e che $(y_1^0,\dots,y_m^0)$ *sia soluzione ammissibile del problema:*
rendere minima la funzione

$$W = b_1y_1 + \dots + b_my_m$$

sapendo che

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0 \text{ per } i=1,\dots,m., \end{cases}$$

allora $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ *e* $(y_1^0,\dots,y_m^0)$ *sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi (cioè realizzano il massimo di Z ed il minimo di W) se e solo se per* $1 \le i \le m$ *o è*
$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 = b_i$ *oppure* $y_i^0 = 0$
e per $1 \le j \le n$
o è $a_{1j}y_1^0 + a_{2j}y_2^0 + \dots + a_{mj}y_m^0 = c_j$ *oppure* $x_j^0 = 0$.

Dimostrazione.- Dato che $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ soddisfa alla (1) e $(y_1^0,\dots,y_n^0)$ soddisfa alla (2) si ha:

$Z((x_1^0,\dots,x_n^0)) = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \dots + c_nx_n^0 \le$
$\le (a_{11}y_1^0 + a_{21}y_2^0 + \dots + a_{m1}y_m^0)x_1^0 + (a_{12}y_1^0 + a_{22}y_2^0 + \dots + a_{m2}y_m^0)x_2^0 +$
$+ \dots + (a_{1n}y_1^0 + a_{2n}y_2^0 + \dots + a_{mn}y_m^0)x_n^0 =$
$= (a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0)y_1^0 + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{2n}x_n^0)y_2^0 +$
$+ \dots + (a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \dots + a_{mn}x_n^0)y_m^0 \le$
$\le b_1y_1^0 + b_2y_2^0 + \dots + b_my_m^0 = W((y_1^0,\dots,y_n^0))$.

Supponiamo ora che le precedenti soluzioni siano soluzioni ottime. Allora $Z((x_1^0,\ldots,x_n^0)) = W((y_1^0,\ldots,y_m^0))$ per il Teor.3.5. Segue che le due precedenti diseguaglianze si trasformano in eguaglianze. Consideriamo la seconda che possiamo così scrivere:

$$(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+\ldots+a_{1n}x_n^0-b_1)y_1^0+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+\ldots+a_{2n}x_n^0-b_2)y_2^0+$$
$$+\ldots+(a_{m1}x_1^0+a_{m2}x_2^0+\ldots+a_{mn}x_n^0-b_m)y_m^0=0.$$

Dato che le y_i^0 sono tutte non negative e le quantità in parentesi sono non positive, ogni addendo è non positivo, quindi perchè tale somma valga zero occorre che ogni addendo sia nullo e quindi o che $a_{i1}x_1^0+a_{i2}x_2^0+\ldots+a_{in}x_n^0=b_i$ oppure che $y_i^0=0$.
Considerando l'altra eguaglianza si giunge analogamente a provare che o è $a_{1j}y_1^0+a_{2j}y_2^0+\ldots+a_{mj}y_m^0=c_j$ oppure che $x_j^0=0$.
Supponiamo ora che per ogni i con $1 \le i \le m$ e per ogni j con $1 \le j \le n$ siano verificate le condizioni dell'enunciato. Nuovamente le precedenti diseguaglianze si trasformano in eguaglianze e quindi $Z((x_1^0,\ldots,x_n^0)) = W((y_1^0,\ldots,y_m^0))$. Pertanto $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ e $(y_1^0,\ldots,y_m^0))$ sono soluzioni ottime.

3.-Esempi

Il primo esempio mostra come a volte possa essere utile considerare il problema duale.

ESEMPIO 3/2. Rendere minima la funzione $Z = 20x_1 +15x_2 + 54x_3$ sapendo che:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 \ge 30 \\ \quad x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 \quad - 3x_3 \ge -5 \\ x_1 - x_2 \quad \ge 18 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Per risolverlo occorre considerare prima il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 30 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_6 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_7 = 18 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Per renderlo in forma canonica occorre aggiungere ancora 3 variabili e quindi si deve operare su un sistema di 4 vincoli e 10 variabili.
Il duale è:
Rendere massima la funzione $W = 30y_1 +6y_2 -5y_3 + 18y_4$ sapendo che:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 + y_4 \le 20 \\ -2y_1 + y_2 - y_4 \le 15 \\ 6y_1 + 2y_2 - 3y_3 \le 54 \end{cases}$$

e che $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
Si ha un sistema di 3 vincoli e solo 7 variabili. La tabella finale (vedi [T], pag.122) è:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
y_4	1	0	2	1	1	0	0	20
y_6	-4	0	-1/2	0	1	1	-1/2	8
y_2	3	1	-3/2	0	0	0	1/2	27
	3	0	32	0	18	0	3	522

Il massimo di W che coincide con il minimo di Z, è 522 ed è raggiunto per y_2=27, y_4=20, y_1= y_3= 0. Ricordando la dimostrazione del teorema fondamentale dalla tabella si vede che il minimo di Z è raggiunto per x_1 =18, x_2 = 0, x_3 =3.

I due esempi successivi mostrano alcune applicazioni pratiche della dualità

ESEMPIO 3/3 ([T], pag. 101).- Un produttore di gelati ha firmato un contratto per l'acquisto settimanale di un certa quantità di panna, di latte scremato e di sciroppo di cioccolato. Poiché però la stagione è risultata meno calda del previsto si è trovato con un surplus settimanale di 100 galloni di panna, di 300 galloni di latte scremato e di 60 libbre di sciroppo di cioccolato. Pensa allora di produrre e vendere ad una vicina scuola bottiglie di latte e tavolette di cioccolato. Per una bottiglia di latte usa 1 gallone di panna e 2 galloni di latte scremato ricavando 3 dollari; per una tavoletta di cioccolato usa 0.4 galloni di panna, 2.5 galloni di latte scremato e 0.6 libbre di sciroppo di cioccolato ricavandone 4 dollari. Vuole ovviamente rendere massimo il ricavo. Indicate con x_1 e con x_2 rispettivamente il numero di bottiglie di latte e di tavolette di cioccolato da produrre settimanalmente, la funzione da massimizzare è ovviamente $Z = 3x_1 + 4x_2$ con i vincoli

$$\begin{cases} x_1 , x_2 \geq 0 \\ x_1 + 0.4x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \leq 300 \\ \qquad 0.6x_2 \leq 60 \end{cases}$$

Si trova che il guadagno massimo è di 475 dollari raggiunto per x_1 =25 e x_2 =100. Prima di firmare il contratto con la scuola il produttore di gelati viene contattato da un produttore di latte che rifornisce la scuola e vorrebbe mantenere l'esclusiva di tale fornitura. Gli offre pertanto di comperare il surplus che settimanalmente ha. Gli offre y_1 dollari per ogni gallone di panna, y_2 dollari per ogni gallone di latte scremato y_3 dollari per ogni libbra di cioccolato. La spesa da rendere minima per il produttore di latte è pertanto: $W = 100y_1 + 300y_2 + 60y_3$.

La sua offerta deve però essere competitiva. Poiché la produzione di una bottiglia di latte richiede 1 gallone di panna e 2 galloni di latte scremato e dà al produttore di gelati un ricavo di 3 dollari occorre che sia: $y_1 + 2y_2 \geq 3$.
Analogamente considerando una tavoletta di cioccolato dovrà essere :
$0.4y_1 + 2.5y_2 + 0.6y_3 \geq 4$. Il produttore di latte deve cioè risolvere il problema duale di quello del produttore di gelati. La spesa minima è di 475 dollari raggiunta per $y_1=0$, $y_2=3/2$, $y_3 = 5/12$.

ESEMPIO 3/ 4.- Si riprenda il primo esempio del capitolo 2. Occorreva rendere minima la funzione $Z = 10x_1 + 4x_2$ sapendo che:

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \end{cases}$$

Però un venditore contatta l'agricoltore dell'esempio ricordato e gli offre 3 confezioni contenenti ciascuna un kg. di un solo dei tre elementi nutrizionali di cui la mandria dell'agricoltore ha bisogno. Indicando con y_1 il prezzo in dollari che il venditore chiede all'agricoltore per una confezione contenente un kg. dell'elemento nutrizionale A, con y_2 l'analogo prezzo per l'elemento nutrizionale B e con y_3 quello per l'elemento nutrizionale C, il venditore deve rendere massima la funzione $W = 60y_1 + 84y_2 + 72y_3$.
Ma la sua offerta deve risultare conveniente per l'agricoltore. Ora il mangime 1 forniva all'agricoltore rispettivamente 3,7,3 unità degli elementi nutrizionali A,B,C e costava all'agricoltore 10 centesimi di dollaro. Perché l'offerta sia conveniente dovrà essere: $3y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 10$. Analogamente considerando il mangime 2 dovrà essere : $2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 4$. I problemi che l'agricoltore ed il venditore devono risolvere sono l'uno il duale dell'altro.
La soluzione del problema duale può essere letta direttamente nella tabella che da il minimo della funzione obbiettivo del problema originario. Ricordando la dimostrazione del Teorema 3.6, dall'ultima tabella dell'esempio 2/8 si vede che il massimo di W è 144 ottenuto per $y_1 = y_2 = 1$, $y_3 = 0$.

ESEMPIO 3.5.- Riprendiamo l'esempio 3.3. Il primo problema ammette la soluzione ottima (25,100) che verifica il primo vincolo con la disuguaglianza stretta e gli altri due con il segno di uguale. Pertanto la soluzione ottima del problema duale sarà del tipo $(0, y_2, y_3)$. Poichè $(25,100) \neq (0,0)$, y_2 ed y_3 dovranno annullare i vincoli del problema duale, cioè sarà

$$\begin{cases} 2y_2 = 3 \\ 2.5y_2 + 0.6y_3 = 4 \end{cases}$$

. Si trova subito $y_2 = 3/2$ e $y_3 = 5/12$.

ESEMPIO 3.6.- Riprendiamo l'esempio 3.4. Il primo problema ammette la soluzione (6,21) che verifica i primi due vincoli col segno di uguale e il terzo con la diseguaglianza stretta. Pertanto la soluzione del duale è del tipo $(y_1, y_2, 0)$ che deve verificare il sistema:

$$\begin{cases} 3y_1 + 7y_2 = 10 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

Si trova subito $y_1 = y_2 = 1$.

ESERCIZIO 3.7. Rendere minima la funzione $Z = -2x_2 - x_3$ sapendo che le variabili assumono solo valori non negativi e che:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3. \end{cases}$$

Cosa si può dire del problema duale?

SOLUZIONE. La prima tabella è

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	-2	1	0	7
x_5	-3	1	2	0	1	3
	0	-2	-1	0	0	0

Scegliendo come pivot l'elemento 1 di posto (2,1) con le operazioni:
$R_1 \to R_1 - R_2$, $R_3 \to R_3 + 2R_2$ si ottiene la seguente tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	4	0	-4	1	-1	4
x_2	-3	1	2	0	1	3
	-6	0	3	0	2	6

Scegliendo come pivot l'elemento 4 di posto (1,1) con l'operazione $R_1 \to \frac{1}{4}R_1$ e quindi con le operazioni
$R_2 \to R_2 + 3R_1$, $R_3 \to R_3 + 6R_1$ si ottiene la seguente tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1	1/4	-1/4	1
x_2	0	1	-1	3/4	1/4	6
	0	0	-3	3/2	1/2	12

La funzione Z è pertanto illimitata e quindi il problema duale non ammette alcuna soluzione

ESEMPIO 3.8. Si consideri il seguente problema:
rendere massima la funzione $Z = x_1$ sapendo che le variabili assumono solo valori non negativi e che:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2. \end{cases}$$

E' facile provare che sia per questo problema che per il suo duale l'insieme delle soluzioni ammissibili è vuoto.

La bibliografia che segue è relativa ai capitoli 2 e 3 e si limita ad offrire alcuni testi di approfondimento.

BIBLIOGRAFIA

[DT] G.DANTZIG-M.THAPA, Linear Programming 1, Springer,1997
[FT] F.FAVA – F.TRICERRI, Geometria ed algebra lineare. Levrotto e Bella , Torino,1991
[GK] P.GRITZMANN- V.KLEE, Mathematical Programming and Convex Geometry da " Handbook of Convex Geometry" Ed. P. Gruber e J. Wills, North-Holland 1993 pagg. 627-674
[K] H.KARLOFF, Linear Programming, Birkhauser , Boston,1991
[RA] C.RORRES-H.ANTON, Applications to linear Algebra, Wiley,New York, 1977
[T] P.THIE, An Introduction to linear Programming and Game Theory, Wiley, New York, 1988