

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

E. ABBENA, G. M. GIANELLA

Esercizi di Geometria  
e Algebra Lineare II  
A.A. 2000/2001

Quaderno # 9 - Settembre 2001





Gli esercizi proposti in questa raccolta sono stati assegnati come temi d'esame dei corsi di Geometria tenuti negli ultimi anni presso il Corso di Laurea in Fisica dell'Università di Torino.

La suddivisione in capitoli rispetta l'andamento del programma del nuovo Corso di Geometria e Algebra Lineare II, (A.A. 2000/2001) per la Laurea in Fisica (di primo livello).

Negli ultimi capitoli sono riportate alcune soluzioni e qualche svolgimento ottenuto per lo più usando il pacchetto di calcolo simbolico *Mathematica*, versione 4.0.

Si ringraziano i Proff. P.M. Gandini, S. Garbiero e A. Zucco per aver permesso l'inserimento in questa raccolta degli esercizi da loro assegnati e svolti negli anni in cui essi tenevano l'insegnamento del Corso di Geometria presso il Corso di Laurea in Fisica.

Grazie di cuore a Simon M. Salamon per i suoi preziosi consigli.



# Indice

<b>1</b>	<b>Sottospazi vettoriali</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Applicazioni lineari</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Spazi vettoriali euclidei ed hermitiani</b>	<b>42</b>
<b>4</b>	<b>Forme quadratiche</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Soluzioni - Sottospazi vettoriali</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>Soluzioni - Applicazioni lineari</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Soluzioni - Spazi vettoriali euclidei ed hermitiani</b>	<b>110</b>
<b>8</b>	<b>Soluzioni - Forme quadratiche</b>	<b>116</b>



# Capitolo 1

## Sottospazi vettoriali

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

-  $\mathbb{R}^n$  lo spazio vettoriale delle  $n$ -uple di numeri reali, di dimensione  $n$ , riferito alla base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );

-  $\mathbb{C}^n$  lo spazio vettoriale delle  $n$ -uple di numeri complessi, di dimensione  $n$ , riferito alla base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );

-  $\mathbb{R}^{m,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici di tipo  $(m, n)$ , ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathbb{R}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$ , ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

-  $\mathbb{C}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$ , ad elementi complessi, riferito alla base canonica standard (come la precedente);

-  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine  $n$  ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$  lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine  $n$  ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathbb{R}_n[x]$  lo spazio vettoriale dei polinomi in  $x$ , a coefficienti reali, di grado minore o uguale a  $n$ , riferito alla base canonica  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ .

-  $\text{tr}(A)$  indica la traccia della matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

[1] In  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (3, 0, h)$ ; dire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  sono linearmente indipendenti.

[2] In  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori  $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_4 = (0, 1, -1, 0)$ ; trovare una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ , generato dai vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ .

Verificato che i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$  sono linearmente indipendenti, determinare per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  il vettore  $\mathbf{v} = (1, -1, 2t - 8, t + 1) \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$ .

Per i valori di  $t$  trovati, determinare le componenti di  $\mathbf{v}$  rispetto ai vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ .

[3] Dati i vettori:  $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 1, 1)$  in  $\mathbb{R}^3$ , verificare che  $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ha dimensione 2. Trovare per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$ , il vettore  $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$  appartiene allo spazio  $\mathcal{V}$  e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

[4] Siano  $\mathcal{W}_1$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori:  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1)$ ,  $\mathcal{W}_2$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori:  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, 2)$ . Trovare  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ ,  $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$  ed una sua base.

[5] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi:  $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ , dove:

$\mathbf{a} = (2, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 3, -1, -1)$ ;  $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ , dove  $\mathbf{e} = (-1, 1, 5, 4)$ ,

$\mathbf{f} = (0, 3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{g} = (2, 7, -16, -5)$ .

i) Verificato che l'insieme  $\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  è una base di  $\mathcal{W}_1$ , stabilire per quale valore di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $\mathbf{v} = (5, -h, 1, h)$  appartiene a  $\mathcal{W}_1$  e, per tale valore, decomporlo rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

ii) Trovare un sottospazio  $\mathcal{W}_3$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$ .

[6] In  $\mathbb{R}^4$ , scrivere le equazioni di due iperpiani vettoriali, diversi, ma entrambi supplementari della retta vettoriale  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2, 0, 4, 3))$ .

[7] Sono dati, in  $\mathbb{R}^4$ , i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y = 2t = 0\},$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5)).$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di  $\mathcal{H}$  sia di  $\mathcal{K}$ .

ii) Determinare la dimensione e una base sia di  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$  sia di  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ .

iii) Il vettore  $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)$  appartiene a  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ ? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di  $\mathcal{H}$  e di un vettore di  $\mathcal{K}$ , in tutti i modi possibili (a meno di un cambiamento di variabile libera).

[8] i) In  $\mathbb{R}_3[x]$ , considerati i polinomi:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x - (h + 1)x^2 \\ p_2(x) &= h + x \\ p_3(x) &= 1 - x^3 \\ p_4(x) &= 4x, \quad h \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

determinare i valori di  $h$  per cui  $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$  è una base di  $\mathbb{R}_3[x]$ .

ii) Fissato uno dei valori determinato nel punto precedente, trovare le componenti di  $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$  rispetto a tale base.

[9] In  $\mathbb{R}^{2,2}$  si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array} \right) / x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array} \right) / x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla. Si dimostri che  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; si determinino le loro dimensioni ed una base per ciascuno di essi.

[10] Dire se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$\mathcal{H} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right) / 2x - y - z = x + 3y - 2t = 0 \right\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right) / x - y + 2 = t = 0 \right\}$$

sono sottospazi vettoriali. In caso affermativo determinarne una base e la dimensione.

[11] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  sono dati i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{L}((0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)). \end{aligned}$$

i) Calcolare la dimensione e una base di  $\mathcal{H}$ .

ii) Calcolare la dimensione e una base di  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ . Si tratta di una somma diretta?

[12] i) Verificare che le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  e determinare le componenti della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  rispetto a tale base.

ii) Dati i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + 2x_2 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = x_2 + 2x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di  $\mathcal{A}$  e di  $\mathcal{B}$ . Determinare una base e la dimensione di  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  e di  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ .

[13] Sono dati in  $\mathbb{R}^4$  i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2z = 2y = 0\},$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 3, -1), (1, 2, 7, 1)).$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di  $\mathcal{H}$  sia di  $\mathcal{K}$ .

ii) Determinare la dimensione e una base di  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ .

[14] In  $\mathbb{R}^5$  i sottospazi:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1))$$

sono supplementari?

[15] In  $\mathbb{R}^4$  si considerino i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{c} = (1, 1, 0, 0).$$

i) Verificare che  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  sono linearmente indipendenti.

ii) Determinare un vettore  $\mathbf{d}$  in modo che  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  siano linearmente indipendenti.

iii) Dire se il sottospazio  $\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = z + t = 0\}$  è contenuto in  $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ .

[16] In  $\mathbb{R}^3$  si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = x + hy + (2 - h)z = -x - h^2y + (3h - 4)z = 0\}.$$

i) Al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , determinare la dimensione e una base di  $\mathcal{W}$ .

ii) Al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , determinare un sottospazio supplementare di  $\mathcal{W}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

[17] In  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$  completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

[18] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

i) provare che i sottoinsiemi:

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA\}, \quad \mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = -XA\}$$

sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.

ii) Determinare una base per i sottospazi vettoriali  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  e  $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ .

iii) Data la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

stabilire per quale valore di  $h$  la matrice  $C$  appartiene al sottospazio vettoriale  $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ .

Assegnato ad  $h$  tale valore, trovare due matrici  $C_1 \in \mathcal{F}$  e  $C_2 \in \mathcal{G}$  in modo tale che  $C = C_1 + C_2$ .

[19] In  $\mathbb{R}^4$  si consideri il sottoinsieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

i) Verificare che  $\mathcal{W}_1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  e determinarne una base e la dimensione.

Si considerino, inoltre, i sottospazi:

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \text{dove } \mathbf{a} = (1, 0, 2, 0), \mathbf{b} = (0, 1, -1, 1), \mathbf{c} = (3, -2, 8, -2),$$

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \text{dove } \mathbf{e} = (0, 1, 2, 1), \mathbf{f} = (2, 1, 3, 1), \mathbf{g} = (1, -2, 4, -2).$$

ii) Si determinino una base e la dimensione di  $\mathcal{W}_2$  e di  $\mathcal{W}_3$ .

iii) Si determinino una base e la dimensione di  $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$ .

[20] Si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{3,3}$ ? In caso affermativo se ne determini una base e la dimensione.

[21] Si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{H} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] / p(x) = ax + bx^2 + x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathcal{K} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] / p(x) = ax + bx^2 + cx^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}_3[x]$ ? In caso affermativo se ne determini una base e la dimensione.

[22] I sottospazi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1, 2, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 3, 0), \mathbf{c} = (2, 1, 0, 0), \mathbf{d} = (5, 4, 0, 0)),$$

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + 3y - z = x - z = 0\}$$

sono supplementari in  $\mathbb{R}^4$  ?

[23] I sottospazi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1, -i, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 2 + i, 0, 0), \mathbf{c} = (3, 1, -1, 0), \mathbf{d} = (3 + i, 2, -1, 0)),$$

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 / ix + y - 3z = y + 4iz = 0\}$$

sono supplementari in  $\mathbb{C}^4$  ?

[24] In  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\};$$

provare che  $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$ .

[25] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}_4[x]$  si considerino i sottospazi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}(x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^4, 2x + 5x^2 - 3x^4),$$

$$\mathcal{K} = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] / p(x) \text{ è divisibile per } x^2 - x - 2\}.$$

Si determinino una base e la dimensione di  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$  e di  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ .

Dato il polinomio  $q(x) = -2 + 2x + 4x^4$ , si verifichi che  $q(x) \in \mathcal{H} + \mathcal{K}$  e si decomponga  $q(x)$  nella somma di un polinomio di  $\mathcal{H}$  e di un polinomio di  $\mathcal{K}$ . Tale decomposizione è unica?

[26] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}_4[x]$  si considerino i sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(1 - x^2 + 5x^3, x + 2x^2 + 3x^3 + x^4, 2 - x - 4x^2 + 7x^3 - x^4),$$

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(x^3 - x^4, x^2 - x^3),$$

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(x^4).$$

Provare che  $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathbb{R}_4[x]$ .

[27] In  $\mathbb{R}^5$ , determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due sottospazi seguenti:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}.$$

[28] In  $\mathbb{R}^5$ , determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due seguenti sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 = 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 13x_1 - 26x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0\}.$$

[29] In  $\mathbb{C}^4$ , determinare un sottospazio supplementare di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / x_1 + ix_2 + (2+i)x_3 = (1-i)x_2 + ix_4 = 0\}.$$

[30] In  $\mathbb{R}_4[x]$  si consideri il sottospazio vettoriale  $\mathcal{W}$  dei polinomi aventi il numero 3 come radice.

- i) Si decomponga  $\mathcal{W}$  nella somma diretta di due sottospazi  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$ .
- ii) Si scriva il polinomio  $-3 - 5x + 5x^2 - 10x^3 + 3x^4$  di  $\mathcal{W}$  come somma di un polinomio di  $\mathcal{W}_1$  e di un polinomio di  $\mathcal{W}_2$ .

[31] In  $\mathbb{R}_4[x]$  si consideri l'insieme  $\mathcal{W}_1$  dei polinomi divisibili per  $p(x) = -3x + x^2$ .

- i) Si verifichi che  $\mathcal{W}_1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_4[x]$ , se ne determini la dimensione e una base.
- ii) Sia  $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$  dove  $p_1(x) = 6x^2 - 5x^3 + x^4$ ,  $p_2(x) = -12 + x + x^2$ ,  $p_3(x) = 36 - 3x + 3x^2 - 5x^3 + x^4$ ,  $p_4(x) = 12 - x + 11x^2 - 10x^3 + 2x^4$ . Si determini una base e la dimensione di  $\mathcal{W}_2$ .
- iii) Si determini  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ .
- iv) Si determini un sottospazio  $\mathcal{W}_3$  di  $\mathbb{R}_4[x]$  tale che  $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathbb{R}_4[x]$ .

[32] In  $\mathbb{R}^5$  si consideri l'insieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}.$$

- i) Si verifichi che  $\mathcal{W}_1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ , se ne determini una base e la dimensione.
- ii) Sia  $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  dove:

$$\mathbf{a} = (0, 3, 1, -2, 0), \mathbf{b} = (0, 0, 2, 1, 1), \mathbf{c} = (0, 6, -10, -10, -6), \mathbf{d} = (0, 3, 7, 1, 3),$$

se ne determini una base e la dimensione.

- iii) Si provi che  $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$ .
- iv) Si determini un sottospazio  $\mathcal{W}_3$  di  $\mathbb{R}^5$  tale che  $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_3) = 1$  e  $\dim \mathcal{W}_3 = 3$ .

[33] In  $\mathbb{R}_3[x]$  si considerino i polinomi:

$$p_1(x) = 3 - x + x^2, p_2(x) = x - x^2 + 2x^3, p_3(x) = 2 - x^2 + x^3, p_4(x) = x - 2x^2 + 3x^3.$$

Si verifichi che l'insieme  $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$  è una base di  $\mathbb{R}_3[x]$  e si esprima il polinomio  $p(x) = x - x^2$  nella base  $\mathcal{B}$ .

[34] In  $\mathbb{R}^{2,2}$  si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che l'insieme  $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  è una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  e si esprima la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  nella base  $\mathcal{B}$ .

[35] i) Date le seguenti matrici dello spazio vettoriale  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si completi l'insieme  $\{A, B\}$  in modo da ottenere una base  $\mathcal{B}'$  di  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$ .

ii) Si determinino le componenti della matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .

[36] Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^3$ .

i) Provare che  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \{\mathbf{o}\}$ .

ii) Determinare tutte le possibili dimensioni di  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  e costruire un esempio in ciascuno dei casi.

[37] i) Verificare che  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right)$  è una base di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ .

ii) Trovare le componenti della matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

[38] i) In  $\mathbb{R}_5[x]$  si consideri l'insieme  $\mathcal{A}$  dei polinomi aventi radici: 1, 2, 3. Si verifichi che  $\mathcal{A}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_5[x]$ , se ne calcoli una base e la dimensione.

ii) Si determini un sottospazio vettoriale  $\mathcal{B}$  supplementare ad  $\mathcal{A}$ .

iii) Si decomponga il polinomio  $p(x) = x^2 + 3x^3$  nella somma di un polinomio di  $\mathcal{A}$  e di un polinomio di  $\mathcal{B}$ . Tale decomposizione è unica?

iv) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}_5[x]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{L}(1 + x + x^2, x^3 + x^5, 2 + 2x + 2x^2 - 3x^3 - 3x^5, x^2 + 3x^3 - x^4) \\ \mathcal{D} &= \mathcal{L}(-2 + x - x^3, x^4 - x^5, x + x^2 + x^3 - x^4). \end{aligned}$$

v) È vero che  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D} = \mathbb{R}_5[x]$  ?

vi) Si determini una base e la dimensione di  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C} + \mathcal{D})$ .

[39] In  $\mathbb{C}^{2,2}$  determinare un sottospazio supplementare  $\mathcal{B}$  di:

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \right).$$

Data la matrice  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , decomporre  $X$  nella somma di una matrice  $X_1 \in \mathcal{A}$  e di una matrice  $X_2 \in \mathcal{B}$ .

[40] i) Si verifichi che:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 + x_4 = x_5 - x_6 = 0 \right\},$$

è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$ , se ne calcoli una base e la dimensione.

ii) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$ :

$$C = \mathcal{L} \left( \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 12 \\ -1 & 2 & -12 & 0 \end{array} \right) \right);$$

$$D = \mathcal{L} \left( \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

iii) È vero che  $\mathcal{B} \oplus C = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$  ?

iv) Si determini una base e la dimensione di  $\mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + C)$ .

v) Si determini un sottospazio vettoriale  $\mathcal{E}$  supplementare a  $\mathcal{D}$ .

vi) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di  $\mathcal{E}$  e di una matrice di  $\mathcal{D}$ .

vii)  $A$  è invertibile? Se sì, si determini  $A^{-1}$ .

[41] In  $\mathbb{C}^{2,2}$  determinare un sottospazio supplementare  $\mathcal{B}$  di:

$$\mathcal{A} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 2 & -i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Data la matrice  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , decomporre  $X$  nella somma di una matrice  $X_1 \in \mathcal{A}$  e di una matrice  $X_2 \in \mathcal{B}$ .

[42] Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ .

i) Determinare una base per il sottospazio  $\mathcal{W} \supseteq \mathbb{R}^{2,2}$  generato da  $A, 'A, A + 'A$ .

ii) Dimostrare che il sottoinsieme:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio di  $\mathbb{R}^{2,2}$  e determinarne una base.

iii) Determinare una base per i sottospazi  $\mathcal{W} + \mathcal{U}$  e  $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$ .

[43] i) In  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$  si consideri l'insieme:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} / x_1 + 2x_4 - x_6 = 2x_6 - x_2 = x_3 + 3x_5 = 0 \right\}$$

e si verifichi che  $\mathcal{A}$  è un sottospazio vettoriale, se ne calcoli una base e la dimensione.

ii) Si determini un sottospazio vettoriale  $\mathcal{B}$  supplementare a  $\mathcal{A}$ .

iii) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di  $\mathcal{A}$  e di una matrice di  $\mathcal{B}$ .

iv)  $A$  è invertibile? Se sì, si determini  $A^{-1}$ .

v) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ :

$$C = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

vi) È vero che  $\mathcal{A} \oplus C = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$  ?

vii) Si determini una base e la dimensione di  $\mathcal{D} \cap (\mathcal{A} + C)$ .

[44] Dato  $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ , sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{2,2}$ ,

i) si determini un altro sottospazio  $\mathcal{V}$  tale che  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathbb{R}^{2,2}$ .

ii) Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ , si decomponga  $A$  nella somma di una matrice  $A_1 \in \mathcal{U}$  e di una matrice  $A_2 \in \mathcal{V}$ .

[45] In  $\mathbb{R}^4$  si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}((1, 3, 0, -1), (2, 5, 1, 2), (1, 2, 1, 0)).$$

i) Si verifichi che  $\mathcal{W}$  è un iperpiano vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  e se ne determini la sua equazione.

ii) Si determinino due sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ , diversi, entrambi supplementari di  $\mathcal{W}$ .

[46] In  $\mathbb{R}^5$  si considerino i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9)), \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1)), \end{aligned}$$

determinare una base  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  e una base di  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ .

[47] Si provi che i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7)) \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14)) \end{aligned}$$

sono uguali.

[48] i) Determinare l'insieme  $C$  di tutte le matrici di  $\mathbb{R}^{3,3}$  che commutano (rispetto al prodotto) con la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Verificare che  $C$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{3,3}$ , determinarne una base e la sua dimensione.

iii) Determinare due sottospazi diversi, entrambi supplementari di  $C$  in  $\mathbb{R}^{3,3}$ .

[49] In  $\mathbb{R}_5[x]$  si consideri l'insieme  $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x^4, 1 + x^5)$ .

i) Verificare che  $\mathcal{B}'$  è una base di  $\mathbb{R}_5[x]$ , usando due metodi diversi.

ii) Determinare le componenti del polinomio  $p(x) = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ , usando due metodi diversi.

[50] In  $\mathbb{C}^5$  si determini un sottospazio supplementare di:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 / 2x_2 + (3 - i)x_4 = ix_1 + 2x_5 = 0\}.$$

Quante sono le risposte possibili? Perché?

[51] Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1, -1, 0, 1, 1), (1, -2, -2, 1, 2), (0, 1, 2, 0, -1), (-1, 3, 4, -1, -3)); \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_4 + 2x_5 = x_2 + x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

i) provare che  $\mathbb{R}^5 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ .

ii) Decomporre il vettore  $\mathbf{a} = (0, 2, 0, 0, 0)$  nella somma di un vettore  $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$  e di un vettore  $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$ .

[52] Si considerino i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1, -1, 0, 2), (0, 2, 1, 3), (2, 0, 1, 7), (3, -5, -1, 3)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 = 3x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

i) Trovare una base per ciascuno dei sottospazi  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ .

ii) Verificare che il vettore  $\mathbf{a} = (0, -2, -1, 3)$  appartiene a  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$  determinando esplicitamente due vettori  $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$  e  $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$  tali che  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ .

[53] Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / \text{tr}(X) = 0\}.$$

i) Determinare una base per i sottospazi  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$  e  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ .

ii) Trovare un sottospazio vettoriale  $\mathcal{W}_3$  che sia supplementare a  $\mathcal{W}_1$ .

[54] Si determinino almeno due sottospazi vettoriali diversi ma entrambi supplementari di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 - x_3 = x_2 + 5x_3 = 0\}.$$

[55] In  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$  completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

[56] Dati i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1, 0, -2, 0, 1), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, -1, 3), (-1, 0, 1, 0, 2)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + 3x_3 - x_5 = x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\}, \end{aligned}$$

- i) determinare una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ ;  
 ii) stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $(1, 2, h, -2, 1)$  appartiene a  $\mathcal{W}_1$ .

[57] In  $\mathbb{R}^5$  sono dati i seguenti sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((2, 1, 1, 0, 2), (-1, 1, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 1, 1)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_5 = x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

- i) Provare che  $\mathcal{W}_2$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$ .  
 ii) Determinare la dimensione e una base per  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$  rispettivamente.  
 iii) Trovare  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$  e  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ .

[58] Completare il seguente insieme:

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in modo da ottenere una base di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ .

[59] Discutere, al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , le soluzioni della seguente equazione vettoriale di  $\mathbb{R}^4$ :

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

dove:

$$\mathbf{a}_1 = (2, -1, 0, 4), \quad \mathbf{a}_2 = (-3, 2, 4, h), \quad \mathbf{a}_3 = (5, -3, h, -1), \quad \mathbf{b} = (14, -8, h, -1).$$

[60] In  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori:  $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3, -1)$ . Considerata l'equazione vettoriale:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

determinare, se possibile, un vettore  $\mathbf{a}_3 = (x, y, z)$  nei seguenti casi:

- i) l'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
- ii) l'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;
- iii) l'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni.

In ii) e iii) (se possibile) determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

[61] Dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{b} = (8, 2, 0, 10),$$

si risolva, se è possibile, l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}.$$

[62] Dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (-1, 1, 0, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1, 4), \quad \mathbf{b} = (2, 0, 2, 3),$$

si risolva, se è possibile, l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}.$$

[63] Determinare, al variare dei parametri reali  $h$  e  $k$  le soluzioni dell'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = \mathbf{d}$$

dove:

$$\mathbf{a} = (h, -k, -h - 2k), \quad \mathbf{b} = (1, 2, h - k), \quad \mathbf{c} = (-2, -4, k - 4), \quad \mathbf{d} = (1, 2, 4 - h).$$

[64] Al variare dei parametri reali  $h$  e  $k$ , determinare, quando esiste, una matrice  $X$  tale che:

$$XA = B$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

[65] Al variare dei parametri reali  $h$  e  $k$ , determinare, quando esiste, una matrice  $X$  tale che:

$$XA = B$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & h & 2h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

[66] Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ h & k \end{pmatrix},$$

stabilire per quali valori di  $h, k \in \mathbb{R}$  l'equazione matriciale  $AX = B$  è compatibile e determinare, quando è possibile, le soluzioni di tale equazione.

[67] Al variare del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale  $AX = B$ , dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \\ \lambda + 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[68] Al variare del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale  $AX = B$ , dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[69] Stabilire per quali valori di  $h$  e  $k$  in  $\mathbb{R}$  le seguenti equazioni matriciali:

$$AX = B, \quad X'A = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & k & h+k \end{pmatrix},$$

sono compatibili. Determinare, quando è possibile, le loro soluzioni.

[70] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

determinare, al variare di  $h, k \in \mathbb{R}$ , le soluzioni dell'equazione matriciale  $AX = B$ .

[71] Al variare di  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , discutere e risolvere, quando possibile, l'equazione matriciale:

$$AX = B$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & \lambda & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu - 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[72] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & h & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, al variare di  $h, k \in \mathbb{R}$ , le soluzioni dell'equazione  $AX = B$ .

[73] Risolvere la seguente equazione matriciale:  $AX = B$ , dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \\ -1 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

## Capitolo 2

# Applicazioni lineari

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

-  $\mathbb{R}^n$  lo spazio vettoriale delle  $n$ -uple di numeri reali, di dimensione  $n$ , riferito alla base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );

-  $\mathbb{C}^n$  lo spazio vettoriale delle  $n$ -uple di numeri complessi, di dimensione  $n$ , riferito alla base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );

-  $\mathbb{R}^{m,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici di tipo  $(m, n)$ , ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathbb{R}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$ , ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

-  $\mathbb{C}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$ , ad elementi complessi, riferito alla base canonica standard (come la precedente);

-  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine  $n$  ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$  lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine  $n$  ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left( \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right) \right);$$

-  $\mathbb{R}_n[x]$  lo spazio vettoriale dei polinomi in  $x$ , a coefficienti reali, di grado minore o uguale a  $n$ , riferito alla base canonica  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ ;

-  $V_3$  lo spazio vettoriale reale, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . In quest'ambito: “ $\wedge$ ” indica il prodotto vettoriale o esterno e “ $\cdot$ ” il prodotto scalare;

-  $'A$  indica la trasposta della matrice  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  o  $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ ;

-  $\text{tr}(A)$  indica la traccia della matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

[1] Sia  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & h^2 & i \\ -i & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare  $\ker f$  e  $\text{im} f$ , al variare di  $h \in \mathbb{C}$ .

[2] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ , riferito alla base canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , si consideri l'endomorfismo  $f$  dato da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Trovare una base di  $\ker f$ .

[3] È data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di  $\ker f$  e una base di  $\text{im} f$ .

[4] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$ , la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $\dim \ker f$  e  $\dim \text{im} f$ .

[5] In  $V_3$ , si consideri un vettore  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ . Determinare il nucleo e l'immagine degli omomorfismi:

$$\begin{aligned} f_1 : V_3 &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}, \\ f_2 : V_3 &\longrightarrow V_3, & f_2(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}. \end{aligned}$$

[6] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

trovato il valore di  $h$  per cui  $f$  non è suriettiva:

- i) determinare  $\text{im} f$ ;
- ii) determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(1, k^2 - k, k) \in \text{im} f$ ;
- iii) trovare un vettore di  $\mathbb{R}^3$  privo di controimmagine;
- iv) determinare  $\ker f$ ;
- v) verificare che  $\ker f \cap \text{im} f = \{\mathbf{o}\}$ ;
- vi) esistono dei vettori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  tali che  $f(\mathbf{x}) = (3, 2, -2)$ ?
- vii) Trovare i vettori  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  tali che  $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})$ , dove  $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ .

[7] In  $\mathbb{R}^3$ , riferito alla base canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , si consideri l'endomorfismo  $f$  dato da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{o}, \\ 2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

- i)  $f$  è iniettivo?  $f$  è suriettivo?
- ii) Trovare  $\ker f$  e  $\text{im} f$ .
- iii) Determinare  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{u} = (t + 1, 2t, -1) \in \text{im} f$ .
- iv) Per il valore di  $t$  ottenuto, calcolare le componenti del vettore  $\mathbf{u}$  rispetto alla base di  $\text{im} f$ .
- v) Trovare un vettore  $\mathbf{x}$  non appartenente a  $\text{im} f$ .
- vi)  $\ker f$  e  $\text{im} f$  sono in somma diretta?
- vii) Determinare le controimmagini del vettore  $\mathbf{y} = (3, 4, -1)$ .

[8] In  $\mathbb{R}^3$ , riferito alla base canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , si consideri l'endomorfismo  $f$  dato da:

$$\begin{aligned} f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) &= 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \text{ e } 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 &\in \ker f. \end{aligned}$$

- i) Trovare la matrice di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
- ii) Trovare  $\ker f$ ,  $\text{im} f$  e le rispettive basi.
- iii) Verificare che  $\ker f \cap \text{im} f = \{\mathbf{o}\}$ .

[9] È dato l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  la cui matrice, rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , è:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & a^2 + 1 & a + 1 \\ 8 & 4 & a^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- i) Per quali valori di  $a$   $f$  è iniettivo?
- ii) Per i restanti valori di  $a$  determinare  $\ker f$  e la sua dimensione.
- iii) Posto  $a = -1$ , trovare le controimmagini del vettore  $(1, -2, 0)$ .  
Posto  $a = 1$ :
- iv) dire se esiste una base di  $\mathbb{R}^3$  che contenga una base di  $\ker f$ .
- v)  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$  sono in somma diretta?
- vi) Esiste  $g \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$  tale che  $\ker g = \operatorname{im} f$  e  $\operatorname{im} g = \ker f$ ?
- vii) Per quali valori di  $h, k, l \in \mathbb{R}$  il vettore  $(h, k, l)$  ammette controimmagini?

[10] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R},$$

associata ad un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$ , rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , è possibile completare  $A$  sapendo che:

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= 2(e_1 + e_2), \\ \ker f &\neq \{\mathbf{o}\}? \end{aligned}$$

[11] In  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$ .

- i) Verificare che  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sono linearmente indipendenti.
- ii) Dire se esiste un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1, \\ f(\mathbf{v}_2) &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ f(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= (2, 2, 1, 1), \\ f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= (2, 6, 0, 1). \end{aligned}$$

[12] In  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori:  $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 4)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 2)$ .

- i) Verificare che  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  sono linearmente indipendenti e trovare una base che li contiene.
- ii) Dire se esiste un'applicazione lineare  $f$  non nulla di  $\mathbb{R}^4$  in  $\mathbb{R}^3$  tale che:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{o}, \quad f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{o}.$$

[13] Sono assegnati l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  individuato, rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ed i vettori  $\mathbf{u} = (1, -2, k)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$ .

- i) Provare che per nessun valore di  $k \in \mathbb{R}$   $\mathbf{u} \in \ker f$ .
- ii) Determinare per quali valori di  $k$  i vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  formano una base  $C$  di  $\mathbb{R}^3$ .

- iii) Posto  $k = 1$ , determinare le componenti dei vettori della base  $\mathcal{B}$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ .  
 iv) Posto  $k = 0$  e considerati i sottospazi vettoriali:  $\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  e  $\mathcal{V} = \mathcal{L}(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_3)$ , trovare un'isomorfismo  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ .  
 v) Scrivere la matrice associata a  $g$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

[14] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  definito da:

$$f(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z).$$

- i) Dire se  $f$  è suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore privo di controimmagine.  
 ii) Dire se  $f$  è iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori che abbiano la stessa immagine.  
 iii) Sia  $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , dove  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ . Dire se il vettore  $\mathbf{w} = (4, 3, -2)$  appartiene a  $f(\mathcal{E})$ .

[15] Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- i) Calcolare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .  
 ii) Posto  $t = 0$ , esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che il vettore  $(k + 3, k, 1, 2k) \in \ker f$ ?  
 iii) Determinare una base di  $\mathbb{R}^4$  contenente una base di  $\ker f$ .  
 iv) Determinare le controimmagini del vettore  $(1, 0, -1)$ .

[16] In  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori  $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 3, 1, -1)$ ,  $\mathbf{d} = (1, -3, 1, 5)$ .

- i) Trovare una base per il sottospazio vettoriale  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ .  
 ii) Scrivere la matrice, rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  di  $\mathbb{R}^4$ , dell'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che:

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{c}, \quad f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}.$$

[17] In  $\mathbb{R}^3$ , rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$ , sono dati i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -2)$ .

- i) Verificare che tali vettori sono linearmente indipendenti e formano una base  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^3$ .  
 ii) Scrivere la matrice, rispetto alla base  $\mathcal{C}$ , dell'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ f(\mathbf{v}_2) &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \\ f(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

- iii) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

[18] Sia  $f$  l'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^{2,2}$  così definita:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y - z & 2z \\ x - y & y \end{pmatrix}.$$

- i) Trovare una base di  $\text{im} f$ .
- ii) Dire se  $f$  è iniettiva.
- iii) Trovare i vettori  $\mathbf{v}$  di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $f(\mathbf{v}) = 3f(1, 2, 1)$ .
- iv) Dire se la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  ammette controimmagine.

[19] In  $\mathbb{R}^4$ , rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ , si consideri il sottospazio  $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , dove:

$$\mathbf{u} = (2, 0, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 3, 1), \quad \mathbf{w} = (0, 1, 0, 1).$$

- i) Provare che  $C = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  è una base di  $\mathcal{V}$ .
  - ii) Trovare una base di  $\mathbb{R}^4$  contenente  $C$ .
- Sia  $f$  l'applicazione lineare di  $\mathcal{V}$  in  $\mathbb{R}^4$  tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} + 2\mathbf{w}, \\ f(\mathbf{v}) &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4, \\ f(\mathbf{w}) &= -\mathbf{v}. \end{aligned}$$

- iii) Scrivere  $M^{C,\mathcal{B}}(f)$ .
- iv) L'applicazione lineare  $f$  è iniettiva?

[20] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  l'applicazione lineare così definita:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  e di  $\mathbb{R}^{2,2}$ .
- ii) Determinare  $\text{im} f$ .

[21] Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5, 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5).$$

- i) Trovare  $\ker f$  e dire se  $f$  è suriettiva.
- ii) Dato  $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , dove  $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (0, 0, 3, 0, 0)$ , determinare la dimensione dell'immagine di  $\mathcal{V}$ .
- iii) Verificare che,  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^5$  e  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ , il vettore  $\mathbf{b} = \mathbf{a} + s(-1, -3, 1, 0, 5) + t(0, -3, 0, 1, 4)$  è controimmagine di  $f(\mathbf{a})$ .

[22] i) Dire se la funzione che ad ogni matrice di  $\mathbb{R}^{3,3}$  associa il suo determinante è un'applicazione lineare di  $\mathbb{R}^{3,3}$  in  $\mathbb{R}$ .

ii) Dire se la funzione di  $\mathbb{R}^{3,3}$  in  $\mathbb{R}$  che ad ogni matrice associa la sua traccia è un'applicazione lineare. In caso positivo, stabilire se è suriettiva e determinare il suo nucleo.

[23] Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^{2,2}$  associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 3 & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & h-2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ , al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}$ .

ii) Posto  $h = -1$ , determinare una base di autovettori per ciascun autospazio e stabilire se  $f$  è semplice.

iii) Posto  $h = -1$ , trovare una base per  $f^{-1}(\mathcal{G})$ , dove  $\mathcal{G}$  è il sottospazio vettoriale definito da:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / 4x_1 + x_2 - x_3 = 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}.$$

[24] Data la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

così definita:

$$f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 9x_4 & x_2 \\ 11x_2 + 8x_3 + 6x_4 & -13x_2 - 8x_3 - 6x_4 \end{pmatrix},$$

i) si verifichi che  $f$  è un'applicazione lineare e si determini la matrice  $A$  associata ad  $f$ .

ii) Si determini una base di  $\ker f$  e una base di  $\operatorname{im} f$ .

iii) Si determinino  $f(\mathcal{H})$ , dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

e  $f^{-1}(\mathcal{K})$ , dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = x_3 = 0 \right\}.$$

iv) Si calcolino gli autovalori di  $f$  e una base per ciascun autospazio.

v)  $f$  è semplice? Se la risposta è affermativa, si scriva una matrice diagonale  $A'$  a cui  $f$  è associata e si determini la matrice  $B$  di un cambiamento di base tale che  $A' = B^{-1}AB$ .

[25] Sia  $\mathcal{V}$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{2,2}$  formato dalle matrici aventi traccia nulla.

i) Verificare che  $\mathcal{V}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{2,2}$  e che  $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$ , dove:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

è una base di  $\mathcal{V}$ .

ii) Trovare, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , la matrice dell'endomorfismo  $f$  di  $\mathcal{V}$  tale che:

$$f(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix},$$

$$f(2A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(A_1 - A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}.$$

- iii) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$   $f$  è, rispettivamente:  
 a) un isomorfismo,  
 b) diagonalizzabile.

[26] i) Si provi che esiste un unico endomorfismo  $f$  di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$  tale che:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2-h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}, \\ f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- ii) Determinare, per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ , una base per gli autospazi di  $f$  e stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$   $f$  è diagonalizzabile.  
 iii) Posto  $h = 0$ , trovare una base per il sottospazio vettoriale  $f^{-1}(\mathcal{G})$ , dove:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}) / x_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

[27] i) Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito ad una base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ; si determini la matrice associata all'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  tale che:

$$\begin{aligned} \ker f &= \mathcal{L}((0, 1, -1)), \\ f(3, 1, -1) &= (9, 0, 0), \quad f(1, 1, 1) = (3, 2, 4). \end{aligned}$$

ii)  $f$  è semplice?

[28] Si considerino le matrici associate, rispetto alla base canonica, alle applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ f(\mathcal{H}) &\supseteq \mathcal{H} \text{ dove } \mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Determinare quali tra queste matrici sono diagonalizzabili, quindi individuare una base di autovettori di  $\mathbb{R}^3$ .

[29] In  $V_3$  è data la funzione  $f : V_3 \rightarrow V_3$ , così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{x} + 2\mathbf{j} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}.$$

- i) Provare che  $f$  è lineare.  
 ii) Determinare una base per  $\ker f$  e una base per  $\text{im} f$ .  
 iii)  $f$  è semplice?

[30] In  $V_3$  è data la funzione  $f : V_3 \rightarrow V_3$ , così definita:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{x} + 2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x})\mathbf{i} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}.$$

- i) Provare che  $f$  è lineare.
- ii) Determinare una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ .
- iii)  $f$  è semplice?

[31] Si considerino gli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$  riferiti alle rispettive basi canoniche  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}''$ . Date le applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & A = M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \\ g : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & B = M^{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(g) &= \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 & 0 \\ -5 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f \circ h = g$ .

[32] Si considerino gli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$  riferiti alle rispettive basi canoniche  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}''$ . Date le applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ g : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & B = M^{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(g) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -8 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f \circ h = g$ .

[33] Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad f(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

- i) Verificare che  $f$  è un'applicazione lineare.
- ii) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ .
- iii) Determinare una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ .
- iv)  $f$  è semplice? In caso affermativo, determinare una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  di autovettori e la matrice a cui  $f$  è associata, rispetto a tale base.

[34] Verificare che le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

e:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono associate allo stesso endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se  $A$  è riferita alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , determinare la base a cui è riferita la matrice  $A'$ .

[35] Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che:

a) l'autospazio relativo all'autovalore 1 è:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

b) L'autospazio relativo all'autovalore  $-1$  è:

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - 2x_2 = x_2 + x_3 = x_4 = 0\}.$$

c) Il nucleo è dato da:

$$\ker f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_2 = x_3 = x_4 = 0\}.$$

i) Determinare la matrice  $A$  associata ad  $f$ , rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

ii)  $f$  è semplice? In caso affermativo, scrivere una matrice diagonale  $A'$  simile ad  $A$  e una matrice  $B$  tale che  $A' = B^{-1}AB$ .

[36] In  $V_3$  sono dati i vettori  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

i) Determinare la matrice associata (rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ) all'applicazione lineare  $f : V_3 \rightarrow V_3$  tale che:

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{b}, \quad f(\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}, \quad f(\mathbf{c}) = \mathbf{o}.$$

ii) Determinare una base e la dimensione di  $\ker f$  e di  $\text{im} f$ .

iii) Determinare una base e la dimensione di  $f(\mathcal{H})$  dove  $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j})$  e di  $f^{-1}(\mathcal{K})$ , dove  $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$ .

iv)  $f$  è semplice?

v) Si scelga un autovalore di  $f$  e si determini un sottospazio supplementare dell'autospazio ad esso relativo.

[37] Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  così definita:

$$f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h+6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h+2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

ii) Al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , determinare una base e la dimensione di  $\ker f$  e una base e la dimensione di  $\text{im} f$ .

iii) Per quali valori di  $h$  esiste  $f^{-1}$ ? Determinare, in questi casi, la matrice associata ad  $f^{-1}$ .

iv) Per quali valori di  $h$   $f$  è semplice?

[38] Determinare, se esiste, un'opportuna applicazione lineare  $g$  tale che:

$$g \circ f = h$$

dove  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è così definita:

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x'_2 &= x_2 - x_3 + 3x_4 \\ x'_3 &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

e  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è definita da:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

[39] Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Determinare esplicitamente una matrice  $A' \in \mathbb{C}^{3,3}$  simile ad  $A$ . Si giustifichi la risposta.

[40] i) Determinare un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che:

$$\text{im} f = \mathcal{L}((1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3)).$$

ii) Determinare un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che:

$$\ker f = \mathcal{L}((1, 0, 1)).$$

iii) Determinare tutte le applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iniettive.

[41] Si consideri la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

i) Determinare il suo polinomio caratteristico.

ii) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associato a  $C$ .

iii) La matrice  $C$  è diagonalizzabile? Se sì, si determini una matrice  $P$  tale che  $P^{-1}CP$  sia una matrice diagonale.

[42] Sia:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{2,2}$  delle matrici triangolari superiori. Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

i)  $f$  è ben definito?

- ii) Scrivere la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathcal{T}$ .
- iii) Determinare una base e la dimensione di  $\ker f$  e di  $\operatorname{im} f$ .
- iv) Dato  $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} / x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$ , determinare una base e la dimensione di  $f(\mathcal{H})$  e di  $f^{-1}(\mathcal{H})$ .
- v)  $f$  è semplice?
- vi) In caso affermativo si scriva una matrice  $A'$  diagonale simile ad  $A$  e la base di  $\mathcal{T}$  a cui  $A'$  è riferita.

[43] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si determinino una base e la dimensione di  $f(\mathcal{H})$  e di  $f^{-1}(\mathcal{H})$  dove  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$ .

[44] Scrivere tutte le applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che:

- i)  $\ker f = \mathcal{L}((1, -1, 0), (0, 1, 1))$ ,
- ii)  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((0, 0, 1))$ .

[45] Sia  $f : V_3 \rightarrow V_3$  la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_3,$$

dove  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ .

- i) Verificare che  $f$  è un'applicazione lineare.
- ii) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .
- iii) Determinare una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ .
- iv) Determinare  $f(\mathcal{W})$  dove  $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$  e  $f^{-1}(\mathcal{U})$  dove  $\mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{o}\}$ .
- v) Verificare che  $\mathcal{C} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, 2\mathbf{k})$  è una base di  $V_3$  e scrivere la matrice  $A'$  associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ .
- vi)  $f$  è semplice?

[46] In uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione 2, rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ , si considerino gli endomorfismi  $f$  e  $g$  individuati dalle matrici:

$$A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Si determinino le componenti del vettore  $(f \circ g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ .
- ii) Si scrivano le componenti dei vettori  $\mathbf{x}$  di  $V$  tali che:

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

e dei vettori  $\mathbf{y}$  di  $V$  tali che:

$$(f \circ g)(\mathbf{y}) = (g \circ f)(\mathbf{y}).$$

[47] Sia data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y - z, 2x - 4y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare un'applicazione lineare  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{im} f = \text{im} g$  e  $\ker f \cap \ker g = \{\mathbf{o}\}$ .

[48] i) L'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

è semplice?

ii) Se si considera, invece,  $A$  come elemento di  $\mathbb{C}^{3,3}$ ,  $A$  è diagonalizzabile? Se la risposta è affermativa, determinare una base di autovettori di  $\mathbb{C}^3$ .

[49] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 8 & 2 \\ 42 & -21 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Si provi che  $f$  è semplice, si determini una base di autovettori di  $\mathbb{R}^3$  e la matrice associata ad  $f$  rispetto a tale base.

ii) Si determini almeno un sottospazio  $\mathcal{W}$  di  $\mathbb{R}^3$ , di dimensione 2, tale che  $f(\mathcal{W}) \supseteq \mathcal{W}$ .

[50] In  $\mathbb{R}^{2,2}$  si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2} \quad / \quad f(A) = {}^t A, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Verificare che  $f$  è un'applicazione lineare.

ii) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

iii)  $f$  è invertibile? In caso positivo, determinare una matrice associata a  $f^{-1}$ .

iv)  $f$  è semplice? In caso positivo, scrivere una matrice diagonale simile ad  $f$  e determinare una base rispetto alla quale tale matrice è data.

[51] Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad A \mapsto A - 2{}^t A, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Trovare una base per i sottospazi  $f(\mathcal{W})$  e  $f^{-1}(\mathcal{W})$ , dove  $\mathcal{W} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} / \text{tr}(A) = 0\}$ .

ii) Stabilire se  $f$  è semplice. In caso affermativo, trovare una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  formata da autovettori e scrivere la matrice di  $f$  rispetto a tale base.

[52] Siano  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali e  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$  tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, & f(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(\mathbf{e}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & f(\mathbf{e}_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Trovare, per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , una base sia per  $\ker f$  sia per  $\operatorname{im} f$ .

[53] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  di matrice, rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se  $f$  è semplice.

ii) Trovare, se esiste, il valore di  $h \in \mathbb{R}$  in modo tale che il vettore  $\mathbf{u} = (2, h, 1)$  sia un autovettore di  $f$ .

[54] i) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ , tale che:

$$f(1, 0, -1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Trovare una base per  $\ker f$  ed  $\operatorname{im} f$  (precisare le basi scelte per scrivere la matrice di  $f$ ).

iii) Determinare una base per il sottospazio vettoriale  $f^{-1}(\mathcal{W})$ , dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / y_1 + 2y_3 = y_2 + y_3 = 0 \right\}.$$

[55] i) In  $V_3$ , fissato il vettore  $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , verificare che la funzione:

$$f : V_3 \rightarrow V_3, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} - 3\mathbf{x},$$

è un endomorfismo di  $V_3$ .

ii) Trovare una base per  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .

iii) Stabilire se  $f$  è semplice e, in caso affermativo, trovare una base di  $V_3$  formata da autovettori. Scrivere la matrice di  $f$  rispetto a tale base, precisando la relativa matrice di passaggio.

[56] Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \mapsto f(X) = AX - XA,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

- i) Determinare, per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , una base di  $\ker f$ .
- ii) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$   $f$  è semplice.
- iii) Posto  $h = 3$ , trovare una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  formata da autovettori di  $f$ .
- iv) Posto  $h = 0$ , determinare una base per il sottospazio vettoriale  $\operatorname{im} f \cap \mathcal{W}$ , dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / 2x_1 + x_3 = 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

[57] Sia  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

- i) Determinare una base per  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- ii) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $(-2, h, h^2)$  appartiene a  $\operatorname{im} f$ .
- iii) Rappresentare mediante equazioni il sottospazio vettoriale  $f(\mathcal{W})$  dove:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_3 = 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0\}.$$

[58] In  $V_3$  si considerino i vettori  $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$  e  $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ . Sia  $f : V_3 \rightarrow V_3$  la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2} \right) \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in V_3.$$

- i) Provare che  $f$  è un'applicazione lineare e precisare il suo significato geometrico.
- ii) Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .
- iii) Dopo aver verificato che  $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  è una base di  $V_3$ , scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .
- iv) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ . Stabilire se  $f$  è semplice e, in caso affermativo, trovare una base di  $V_3$  formata da autovettori di  $f$ . (Questo punto non richiede calcoli se le risposte vengono adeguatamente giustificate).

[59] Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$  tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}.$$

- i) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f$  è semplice.
- ii) Posto  $h = 1$ , trovare una base per il sottospazio vettoriale  $f(\mathcal{W})$ , dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}) / a - b + c = 0 \right\}.$$

[60] Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto B^{-1}XB, \quad \text{dove } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -1 \end{pmatrix}.$$

- i) Trovare per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$   $f$  è un isomorfismo.
- ii) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$   $f$  è semplice.
- iii) Posto  $h = 1$ , trovare una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  formata da autovettori di  $f$ .

[61] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che verifica le seguenti condizioni:

- a)  $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$ ;
- b)  $f((1, 0, 1)) = (1, 2, -3)$ ;
- c)  $(1, -1, 0)$  è un autovettore di  $f$  relativo all'autovalore  $-1$ .

- i) Trovare la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- ii) Stabilire se  $f$  è semplice e, in caso positivo, trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori.

[62] Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto XB, \quad \text{dove } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ h & -6 \end{pmatrix}.$$

- i) Determinare  $\ker f$  e  $\text{im} f$ , per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ .
- ii) Scelto l'unico valore di  $h$  per cui  $f$  non è un isomorfismo, stabilire se  $f$  è semplice.
- iii) Trovare una base per  $f(\mathcal{W})$ , dove:

$$\mathcal{W} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} / X = -X\},$$

(usare il valore di  $h$  determinato nel punto ii).

[63] Si considerino le seguenti matrici ad elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Stabilire se tali matrici sono diagonalizzabili. In ciascun caso affermativo, determinare una matrice diagonale simile alla data, precisando la relativa matrice di passaggio.
- ii) Dire se  $A$  e  $B$  sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , rispetto a basi diverse (giustificare la risposta).

[64] i) Provare che esiste un'unico endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

$$f(2, 1, 0) = (h, 2, 0), \quad f(1, 0, -1) = (0, 1, -h), \quad f(1, 0, 1) = (0, 1, h).$$

- ii) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f$  è semplice.

[65] Negli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$  si considerino, rispettivamente, i vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, 3, 2), & \mathbf{u}_2 &= (-1, 1, 1), & \mathbf{u}_3 &= (1, 0, 2), \\ \mathbf{v}_1 &= (1, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_2 &= (-1, 1, 0, 2), & \mathbf{v}_3 &= (1, 2, 1, 0), & \mathbf{v}_4 &= (2, 0, 1, 2). \end{aligned}$$

i) Verificare, giustificando la risposta, che le condizioni:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \quad f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$$

permettono di definire un'unica applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

ii) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$  e stabilire se  $f$  è un monomorfismo o un epimorfismo.

iii) Trovare una base per  $\operatorname{im} f \cap \mathcal{W}$ , dove:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 = x_4 = 0\}.$$

[66] Dato l'endomorfismo:

$$f: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

tale che  $f(A) = {}^tA$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ :

i) scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ ;

ii) determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ ;

iii) determinare  $f(\mathcal{S})$  e  $f(\mathcal{A})$ , dove  $\mathcal{S}$  è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e  $\mathcal{A}$  è il sottospazio vettoriale delle matrici antisimmetriche;

iv) determinare gli autospazi di  $f$ ;

v)  $f$  è semplice? (Giustificare la risposta).

[67] Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

$$\begin{aligned} f(0, 1, 2) &= (8, -2 + 2k, 16) \\ f(2, 0, -1) &= (-1, -2 - k, -2) \\ f(1, 3, -1) &= (4, -7 - k, 8). \end{aligned}$$

i) Al variare del parametro  $k$  in campo reale, verificare che le relazioni precedenti definiscono un'applicazione lineare.

ii) Per ogni valore di  $k \in \mathbb{R}$ , calcolare la dimensione e una base di  $\ker f$  e di  $\operatorname{im} f$ .

iii) Posto  $k = -3$ , verificare che  $f$  è semplice, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di  $\mathbb{R}^3$  rispetto alla quale questa matrice è data.

[68] In  $\mathbb{R}^{2,2}$  si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche, e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla.

i) Si dimostri che  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , si determinino le loro dimensioni e una base per ciascuno.

ii) Data l'applicazione lineare:

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$$

così definita:

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2x_2 - 2x_3 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 & 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

calcolare la dimensioni e una base sia di  $\ker f$  sia di  $\text{im} f$ .

iii) Determinare  $f(\mathcal{H})$  dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e  $f^{-1}(\mathcal{K})$  dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & -x'_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} / x'_1 + 3x'_3 = 0 \right\}.$$

iv) Detta  $A$  la matrice associata a  $f$  rispetto ad una base di  $\mathcal{S}$  e ad una base di  $\mathcal{T}$ , si stabilisca se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una matrice diagonale  $A'$  simile ad  $A$ .

[69] Considerata l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3),$$

si determini  $f^{-1}(\mathcal{H})$ , dove  $\mathcal{H}$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  dato da:

$$\mathcal{H} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 / y_1 + y_2 = 0\}.$$

[70] i) Stabilire per quali valori del parametro  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito da:

$$f(x, y, z) = (-2hx - y + hz, x + z, hz)$$

è semplice.

ii) Ripetere lo stesso esercizio considerando:

$$f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

con la stessa definizione precedente ma con  $h \in \mathbb{C}$ .

[71] Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , rispetto alla base canonica, sono dati i vettori  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0, 2, -1)$  e  $\mathbf{w} = (2, 0, 4, -1)$ .

i) Provare che  $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

ii) Stabilire se esiste un endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  tale che  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono autovettori di autovalore 2 e  $\mathbf{w}$  è autovettore di autovalore 3. Giustificare la risposta.

iii) Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)\mathbf{u} + (2x_3 - x_4)\mathbf{v}.$$

Scrivere la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  e determinare la dimensione del nucleo di  $f$ .

[72] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare di equazioni:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 + x_3 \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di  $\ker f$  sia di  $\text{im} f$ .

ii) Determinare la dimensione e una base di  $f(\mathcal{H})$  dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

iii) Determinare la dimensione e una base di  $f^{-1}(\mathcal{K})$ , dove:

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

[73] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (-x + y + 6z, -y, 2z).$$

i)  $f$  è invertibile? In caso affermativo determinare le equazioni di  $f^{-1}$ .

ii) Calcolare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali  $f(\mathcal{H})$  e  $f^{-1}(\mathcal{H})$ , dove:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}.$$

iii)  $f$  è semplice? Giustificare accuratamente la risposta.

[74] Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'omomorfismo così definito:

$$f(x, y) = (ax + y, x + ay, x - y), \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^2$  e di  $\mathbb{R}^3$ .

ii) Per quali valori di  $a$ ,  $f$  è un monomorfismo?

iii) Posto  $a = -1$ , determinare  $\ker f$  e  $\text{im} f$ .

[75] Calcolare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.

[76] Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  associato, rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

- i) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ , al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- ii) Trovare il valore di  $h$  per il quale la matrice  $A$  ha un autovalore uguale a 3.
- iii) Posto  $h = -2$ , provare che  $h$  è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale  $D$  e il cambiamento di base che la realizza.

[77] Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita, relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

- i) trovare il valore di  $h$  per cui  $\ker f$  abbia dimensione 2 e determinarne una base;
- ii) posto  $h = 1$ , determinare autovalori e autovettori di  $f$ ;
- iii)  $f$  è semplice?

[78] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo di equazioni:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_3 \\ x'_2 = -x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 - x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

- i) Determinare una base e la dimensione sia di  $\ker f$  sia di  $\operatorname{im} f$ .
- ii) Determinare una base e la dimensione di  $f(\mathcal{H})$  e di  $f^{-1}(\mathcal{H})$ , dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

- iii) Dire se  $f$  è semplice, giustificando la risposta e, in caso affermativo, individuare una base di autovettori di  $\mathbb{R}^3$ .

[79] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione così definita:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) &= \mathbf{0} \\ f(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

con  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

- i) Analizzando le relazioni precedenti dire, giustificando le risposte, se  $f$  così definita sia un'applicazione lineare e, in caso positivo, se  $f$  sia diagonalizzabile.
- ii) Determinare la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .
- iii) Calcolare basi e dimensioni di  $\ker f$  e di  $\operatorname{im} f$ .
- iv) Determinare analiticamente gli autovalori e gli autovettori di  $f$ .

[80] Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

tale che:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (-2a_0 - 9a_1 + 3a_2) + (a_0 + 4a_1 - a_2)x + (a_0 + 3a_1)x^2.$$

- i) Si verifichi che  $f$  è un'applicazione lineare.
- ii) Si determini una base di  $\ker f$  e una base di  $\operatorname{im} f$ .
- iii) Si descriva  $f(\mathcal{H})$ , dove  $\mathcal{H}$  è il sottospazio dei polinomi di  $\mathbb{R}_2[x]$  con radice 2.
- iv) Si determinino gli autovalori di  $f$  e una base per ciascun autospazio.
- v)  $f$  è semplice? In caso affermativo, si scriva una matrice diagonale a cui  $f$  è associata e la base rispetto alla quale tale matrice è data.

[81] Si consideri l'omomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f(A) = 2a - b - d - (3b + 2c - d)x + (4a + 7b + 6c - 5d)x^2 + (3a + c - 2d)x^3.$$

- i) Trovare una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ .
- ii) La matrice associata ad  $f$ , rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^{2,2}$  di  $\mathbb{R}_3[x]$  è diagonalizzabile?
- iii) Verificare che:

$$\mathcal{G} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] / p(x) \text{ è divisibile per } q(x) = x\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_3[x]$  e determinare una base per  $f^{-1}(\mathcal{G})$ .

[82] i) Scrivere la matrice, rispetto alla base canonica, dell'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}_3[x]$  sapendo che:

$$f(1 + x - x^3) = x + x^2 - x^3, \quad f(2 + x^2) = h + 3x - hx^2, \quad h \in \mathbb{R};$$

$$p(x) = x^3 \text{ è un autovettore di } f;$$

$$f(x - x^3) \in \mathcal{F}, \quad \text{dove } \mathcal{F} = \{q(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \in \mathbb{R}_3[x] / a_3 + 4a_4 = 0\};$$

$$-2 + x^3 \in \ker f.$$

- ii) Trovare, per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ , una base per  $\ker f$  e una base per  $\operatorname{im} f$ .
- iii) Stabilire per quali valori del parametro  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile.

[83] Sia  $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tale che:

$$f(a + bx) = a + (a + b)x + (a - 2b)x^2, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

i)  $f$  è un'applicazione lineare?

ii) Scrivere la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}_1[x]$  e  $\mathbb{R}_2[x]$ .

iii) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare  $g : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$  tale che  $f \circ g = 3i$ , dove  $i$  è l'identità di  $\mathbb{R}_2[x]$ .

[84] Sia  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$  tale che:

$$f(a + bx + cx^2) = a + b + c + (2a - 3b)x, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

i)  $f$  è un'applicazione lineare?

ii) Scrivere la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}_2[x]$  e  $\mathbb{R}_1[x]$ .

iii) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare  $g : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tale che  $f \circ g = 4i$ , dove  $i$  è l'identità di  $\mathbb{R}_1[x]$ .

[85] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ -2-i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3},$$

determinare la matrice  $B = A + \bar{A}$ , dove  $\bar{A}$  è la matrice ottenuta da  $A$  considerando i complessi coniugati dei suoi elementi. Verificare che  $B$  è diagonalizzabile.

[86] Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}_2[x]$  così definito:

$$\begin{aligned} f(2 + 3x - 4x^2) &= 2 - 4x + 3kx^2, \\ f(1 - 2x + 3x^2) &= 1 + 3x - 2kx^2, \\ f(5 - 4x + x^2) &= 5 + x - 4kx^2, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

i) Scrivere la matrice  $A$ , associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ .

ii) Determinare  $\text{im} f$  e  $\text{ker} f$ , al variare del parametro  $k$  in campo reale.

iii) Stabilire per quali valori di  $k$   $f$  è invertibile e, in questi casi, scrivere la matrice associata a  $f^{-1}$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

iv) Determinare, al variare di  $k$ , una base e la dimensione di  $f(\mathcal{H})$ , dove:

$$\mathcal{H} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] / p(x) = x(a_0 + a_1x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

e di  $f^{-1}(\mathcal{K})$ , dove:

$$\mathcal{K} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] / p(x) = a_0(x - 2)(x - 3), \quad a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

v) Per quali valori di  $k$  esiste un endomorfismo  $g$  di  $\mathbb{R}_2[x]$  tale che  $g \circ f = 3i$ , ( $i$  indica l'identità in  $\mathbb{R}_2[x]$ )? Determinare, quando è possibile, la matrice associata a  $g$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

vi) Per quali valori di  $k$   $f$  è semplice? In questi casi, scrivere una matrice diagonale  $A'$  associata ad  $f$  e la base rispetto alla quale questa matrice è data.

[87] Si determinino il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

tale che:

$$f(3 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x + x^2 + x^3) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(-2 - 2x^2 + x^3) = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(4 - 2x + x^2) = \begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificare, inoltre, che  $f$  è ben definita.

[88] Si consideri l'operatore di derivazione:

$$d : \mathbb{R}_5[x] \longrightarrow \mathbb{R}_5[x]$$

che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima.

- i) Giustificare che  $d$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}_5[x]$ .
- ii) Determinare tutti gli autovalori di  $d$  e i relativi autospazi.
- iii) Decidere se  $d$  è semplice e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonale ad esso associata.

[89] In  $\mathbb{R}_3[x]$ , si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(1 + x, x + x^2).$$

i) Determinare un sottospazio  $\mathcal{W}_2$  tale che:

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}_3[x].$$

ii) E' noto che ogni polinomio  $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  si può scrivere in modo unico come:

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x), \quad p_1(x) \in \mathcal{W}_1, \quad p_2(x) \in \mathcal{W}_2.$$

Data la funzione:

$$f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], \quad p(x) \longmapsto p_1(x) - p_2(x),$$

verificare che  $f$  è un'applicazione lineare.

- iii) Determinare la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$  di  $\mathbb{R}_3[x]$ .
- iv) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- v) Calcolare  $f(\mathcal{W}_1)$  e  $f^{-1}(\mathcal{W}_1)$ .
- vi)  $f$  è semplice?

[90] Si consideri l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

così definita:

$$f(a_1 + a_2x + a_3x^2) = 2a_1 + (-12a_1 + 8a_2 + 12a_3)x + (8a_1 - 4a_2 - 6a_3)x^2.$$

- i) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- ii) Calcolare  $f(\mathcal{W})$  e  $f^{-1}(\mathcal{W})$  dove  $\mathcal{W}$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_2[x]$  dei polinomi aventi 3 come radice.
- iii)  $f$  è semplice? In caso affermativo, determinare una base di  $\mathbb{R}_2[x]$  che diagonalizzi  $f$ .

[91] Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  tale che:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 3a_2 + (3a_1 - 6a_2)x + (-a_0 - 3a_2)x^2 + (2a_0 + a_1 + ha_2)x^3, \quad h \in \mathbb{R},$$

- i) determinare, per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , una base per  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- ii) Scelto  $h$  in modo tale che  $\dim \ker f = 1$ , trovare una base per i sottospazi vettoriali  $f(\mathcal{W}_1)$  e  $f^{-1}(\mathcal{W}_2)$ , dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] / 3a_0 + 4a_1 + a_2 = 0\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] / q(x) \text{ ha radice } 0\}. \end{aligned}$$

[92] Si consideri l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

così definita:

$$f(a_1 + a_2x + a_3x^2) = (a_2 + a_3) + (a_1 + a_3)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3.$$

- i) Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- ii) Individuare la dimensione e una base di  $f(\mathcal{H})$ , dove  $\mathcal{H}$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_2[x]$  dei polinomi aventi 2 come radice.
- iii) Individuare la dimensione e una base di  $f^{-1}(\mathcal{K})$ , dove  $\mathcal{K}$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_3[x]$  dei polinomi aventi 3 come radice.

[93] Sia  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  l'applicazione lineare definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + (b + c)x^2 + dx^3,$$

- i) trovare la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^{2,2}$  e di  $\mathbb{R}_3[x]$ .
- iii) Determinare basi e dimensioni di  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$ .
- iv)  $f$  è semplice? In caso positivo, scrivere una matrice diagonale  $D$  associata ad  $f$  e la matrice di passaggio da  $A$  a  $D$ .

[94] Per ciascuna delle seguenti coppie di matrici verificare che sono simultaneamente diagonalizzabili e determinare le loro forme diagonali. Trovare, inoltre, una base comune di autovettori.

$$i) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} -66 & 190 & 68 \\ -4 & 13 & 4 \\ -53 & 148 & 55 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -30 & 96 & 32 \\ -2 & 8 & 2 \\ -25 & 75 & 27 \end{pmatrix};$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -24 & 1 & 48 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -16 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ -12 & 3 & 24 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -16 & 0 & 32 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{v) } A = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & -12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -3 & -12 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & -12 & 4 & 12 \\ 9 & -12 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

[95] In  $\mathbb{R}^3$  determinare la base duale di ciascuna delle seguenti basi:

i)  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 3, -1)$ ;

ii)  $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, -2, 7)$ ;

[96] Si considerino le due funzioni seguenti:

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx, \quad p(x) \in \mathbb{R}_1[x].$$

i) Verificare che  $(f_1, f_2)$  è una base dello spazio vettoriale duale  $\mathbb{R}_1[x]^*$ .

ii) Determinare la base duale di  $(f_1, f_2)$ .

[97] Si considerino le tre funzioni seguenti:

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p(x)) = p'(1), \quad f_3(p(x)) = p(0), \quad p(x) \in \mathbb{R}_2[x].$$

i) Verificare che  $(f_1, f_2, f_3)$  è una base dello spazio vettoriale duale  $\mathbb{R}_2[x]^*$ .

ii) Determinare la base duale di  $(f_1, f_2, f_3)$ .

[98] In  $\mathbb{R}^3$  si considerino le basi:

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 3)), \quad \mathcal{B}_2 = ((4, 3, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)).$$

i) Determinare la matrice  $P$  del cambiamento di base da  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$ .

ii) Calcolare le basi duali  $\mathcal{B}_1^*$  e  $\mathcal{B}_2^*$ .

iii) Determinare la matrice  $Q$  del cambiamento di base da  $\mathcal{B}_1^*$  a  $\mathcal{B}_2^*$ .

[99] In  $(\mathbb{R}^2)^*$  si consideri la forma lineare  $f(x, y) = 3x - y$ . Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

determinare la funzione  ${}^tF(f)$ .

[100] In  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1, 1, 2, 0), \mathbf{b} = (0, 0, 1, 2), \mathbf{c} = (3, 3, 5, -2), \mathbf{d} = (2, 2, -1, -10)). \end{aligned}$$

i) Determinare  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$  e  $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ .

ii) Scrivere le equazioni di una forma lineare  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\ker f = \mathcal{H}$ .

## Capitolo 3

# Spazi vettoriali euclidei ed hermitiani

In tutti gli esercizi di questo capitolo, salvo esplicita dichiarazione, si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$  lo spazio vettoriale euclideo delle  $n$ -uple di numeri reali, di dimensione  $n$ , dotato del prodotto scalare standard, che rende ortonormale la base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );
- $\mathbb{C}^n$  lo spazio vettoriale hermitiano delle  $n$ -uple di numeri complessi, di dimensione complessa  $n$ , dotato del prodotto scalare complesso standard, che rende unitaria la base canonica ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ );
- $V_3$  lo spazio vettoriale euclideo reale, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . In quest'ambito: “ $\wedge$ ” indica il prodotto vettoriale o esterno e “ $\cdot$ ” il prodotto scalare.

[1] i) Dato il sottospazio vettoriale  $\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = x_2 = 0\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , trovare una base per  $\mathcal{F}^\perp$  e verificare che  $\mathbb{R}^3 = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp$ .

ii) Se  $\mathbf{u}$  è un generico vettore di  $\mathbb{R}^3$ , si ponga  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ , dove  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$ . Provare che l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} \longmapsto f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

è un'isometria di  $\mathbb{R}^3$ .

iii) Trovare la matrice, rispetto alla base ortonormale canonica di  $\mathbb{R}^3$ , di  $f$  e stabilire se  $f$  è un'isometria diretta o inversa.

[2] i) Trovare una base per  $\mathcal{F}^\perp$ , sottospazio ortogonale a:

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}.$$

ii) Se  $\mathbf{u}$  è un generico vettore di  $\mathbb{R}^3$ , si ponga  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ , dove  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$ . Provare che l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} \longmapsto f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

è un'isometria di  $\mathbb{R}^3$  e scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

iii) Calcolare  $f^{-1}(\mathbf{a}) \cdot f^{-1}(\mathbf{b})$  e  $\|f(\mathbf{b})\|$ , dove  $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$  e  $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$ .

[3] Nello spazio vettoriale euclideo ordinario  $V_3$ , è dato il piano vettoriale:

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

- i) Si determini il complemento ortogonale  $\mathcal{V}^\perp$  di  $\mathcal{V}$ .
- ii) Si scrivano tutti i vettori  $\mathbf{v}$  di  $V_3$  tali che il volume del tetraedro generato da  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}$  sia 2. L'insieme dei vettori  $\mathbf{v}$  così individuato è un sottospazio vettoriale di  $V_3$ ?
- iii) Dato il vettore  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  si calcolino le proiezioni ortogonali di  $\mathbf{a}$  su  $\mathcal{V}$  e su  $\mathcal{V}^\perp$ .

[4] Si consideri il sottospazio vettoriale  $\mathcal{H}$  di  $\mathbb{C}^4$  così definito:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / x_1 + ix_2 + x_3 = 2x_3 - ix_4 = x_1 + x_3 = 0\}.$$

Rispetto al prodotto hermitiano standard di  $\mathbb{C}^4$ , si determini una base unitaria del complemento ortogonale  $\mathcal{H}^\perp$  di  $\mathcal{H}$ .

[5] In  $V_3$ , dati i vettori:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

- i) si verifichi che  $C = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  è una base di  $V_3$ .
- ii) A partire da  $C$ , utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt, si determini una base ortonormale  $C' = (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ .
- iii) Si consideri l'applicazione  $f : V_3 \rightarrow V_3$  così definita:

$$f(\mathbf{i}) = \mathbf{a}', \quad f(\mathbf{j}) = \mathbf{b}', \quad f(\mathbf{k}) = \mathbf{c}'$$

e si verifichi che si tratta di un'applicazione lineare.

iv) Si scriva la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  e si verifichi che  $A \in O(3)$ . Si giustifichi teoricamente questo fatto.

[6] Si considerino i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0, \quad 2x - y - z = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + y - z = 0\}, \\ \mathcal{A} &= \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) / f(1, 2, 1) \in \mathcal{U}, \quad f(3, 1, 2) \in \mathcal{U}^\perp, \quad f((1, 1, 2)) \in \mathcal{V}^\perp\}, \end{aligned}$$

dove  $\mathcal{U}^\perp$  e  $\mathcal{V}^\perp$  sono i complementi ortogonali di  $\mathcal{U}$  e di  $\mathcal{V}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

- i) Si verifichi che  $\mathcal{A}$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ .
- ii) Si determini la dimensione di  $\mathcal{A}$ .

[7] Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$  si verifichi che i due vettori:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -2, 1, 3), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 1, -3, 1)$$

sono ortogonali. Si completi l'insieme  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  fino ad ottenere una base ortogonale di  $\mathbb{R}^4$ .

[8] Si consideri la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Osservare che gli autovalori di  $A$  non sono reali.

ii) Questo risultato è in contrasto con la teoria studiata per le matrici simmetriche? Giustificare bene la risposta data.

[9] Dato:

$$\mathcal{W} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA, \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , determinare il suo complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare  $X \cdot Y = \text{tr}(XY)$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}^{2,2}$ ).

[10] i) In  $\mathbb{C}^4$  si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / 2x_1 + ix_3 = 0\}$$

e se ne determini una base unitaria.

ii) Si individuino le equazioni che definiscono un sottospazio  $\mathcal{K}$  supplementare di  $\mathcal{H}$  in  $\mathbb{C}^4$  e il complemento ortogonale  $\mathcal{H}^\perp$  di  $\mathcal{H}$  in  $\mathbb{C}^4$ .

[11] Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (2, -2, 4), \quad \mathbf{v}_4 = (4, 2, 4)$$

e sia  $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ .

i) Trovare una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{W}$ .

ii) Completare  $\mathcal{B}$  fino ad ottenere una base ortonormale  $\mathcal{D}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

iii) Determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^3$  alla base  $\mathcal{D}$  e viceversa.

[12] Dato il sottospazio  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, -1, 3, 1))$  dello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , trovare una base ortonormale per il sottospazio  $\mathcal{H}^\perp$ .

[13] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

e indicati con  $\mathcal{R}(A)$  e  $\mathcal{C}(A)$  gli spazi vettoriali generati dalle righe e dalle colonne di  $A$ , rispettivamente, si determinino:

i) base e dimensione di  $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{C}(A)$  e di  $\mathcal{R}(A) + \mathcal{C}(A)$ ;

ii) il complemento ortogonale di  $\mathcal{C}(A)$  in  $\mathbb{R}^4$ , rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^4$ .

[14] Dati i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + t = z - t = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = y - z = x + t = 0\},\end{aligned}$$

- i) verificare che la somma di  $\mathcal{U}$  e di  $\mathcal{V}$  è diretta;
- ii) trovare una base ortonormale di  $\mathcal{U}^\perp$ .

[15] Dato il sottoinsieme:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 2x - y - z = 0\}$$

determinare una base ortonormale di  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ .

[16] i) In  $\mathbb{R}^5$ , i sottospazi:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 = 0\}, \\ \mathcal{B} &= \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1)),\end{aligned}$$

sono supplementari?

- ii) Determinare le equazioni del complemento ortogonale di  $\mathcal{A}$  rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^5$  e una sua base ortonormale.

[17] Data la base:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (2, 1, 2))$$

di  $\mathbb{R}^3$ , determinare una base ortonormale, a partire da  $\mathcal{B}$ , utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

[18] In  $V_3$  è dato il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ . Determinare una base ortonormale del piano vettoriale ortogonale a  $\mathbf{v}$ .

[19] Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1).$$

- i) Verificare che  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  formano una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ .
- ii) Trovare una base ortonormale di  $\mathcal{W}$  a partire dalla base  $\mathcal{B}$ .

[20] Determinare una matrice ortogonale in modo tale che la sua prima riga sia data da:

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

## Capitolo 4

# Forme quadratiche

[1] Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, riferito alla base ortonormale canonica  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Detto  $\mathcal{F}$  il piano vettoriale di equazione  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ ,  $((x_1, x_2, x_3))$  sono le componenti di un generico vettore  $\mathbf{x}$  di  $V$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , si consideri l'endomorfismo  $p : V \rightarrow V$ , proiezione ortogonale di  $V$  su  $\mathcal{F}$ , così definito: se  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ , dove  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$ , allora  $p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$ .

i) Verificare che la funzione:

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \mapsto Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot p(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

è una forma quadratica su  $V$  e classificarla.

ii) Trovare una base di  $V$  rispetto alla quale  $Q$  si scriva in forma canonica.

[2] Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Si consideri la forma quadratica:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \in V.$$

Classificare  $Q$  e trovare una base rispetto alla quale  $Q$  si scrive in forma canonica.

[3] Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, riferito alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ . Si consideri la forma quadratica su  $V$ :

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i\mathbf{v}_i \in V.$$

i) Verificare che  $Q$  è un prodotto scalare su  $V$ .

ii) Trovare una base ortonormale, rispetto a  $Q$ , di  $V$ .

iii) Dato il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i\mathbf{v}_i \in V / x_1 - 2x_2 + x_3 = 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\},$$

determinare una base per  $\mathcal{F}^\perp$ , sottospazio ortogonale ad  $\mathcal{F}$  rispetto a  $Q$ , e verificare che  $V = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp$ .

[4] Si consideri la funzione:

$$\varphi : \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \longmapsto \text{tr}(A^t B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{2,2},$$

dove  $\text{tr}(A)$  denota la traccia della matrice  $A$ .

i) Verificare che  $\varphi$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

ii) Dato il sottospazio vettoriale  $\mathcal{F} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} / \text{tr}(A) = 0\}$ , trovare una base per  $\mathcal{F}^\perp$ , complemento ortogonale, rispetto a  $\varphi$ , di  $\mathcal{F}$ .

iii) Si consideri una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  del tipo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ , dove  $\mathcal{B}_1$  è una base di  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{B}_2$  è una base di  $\mathcal{F}^\perp$ . Scrivere l'espressione di  $\varphi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

[5] Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ .

i) Trovare la matrice, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , del prodotto scalare  $\varphi$  definito in modo opportuno sapendo che  $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$  è una base ortonormale (rispetto a  $\varphi$ ).

ii) Determinare una base per  $\mathcal{F}^\perp$ , complemento ortogonale (rispetto a  $\varphi$ ) del piano vettoriale  $\mathcal{F}$  di equazione  $x_1 + x_3 = 0$ .

iii) Calcolare la norma del vettore  $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$  (rispetto a  $\varphi$ ).

[6] Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Data la funzione  $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (x_1y_3 + x_3y_1), \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^3 y_j \mathbf{v}_j \in V,$$

i) verificare che  $(V, \varphi)$  è uno spazio vettoriale euclideo e trovarne una base ortonormale;

ii) stabilire se l'automorfismo  $f : V \longrightarrow V$  di matrice, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ ,

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

è un'isometria di  $(V, \varphi)$ ;

iii) calcolare  $\|f^{-1}(\mathbf{a})\|$  e  $\cos(\widehat{f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})})$ , dove  $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{b} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ .

[7] Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Data la funzione  $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^3 y_j \mathbf{v}_j \in V,$$

i) verificare che  $(V, \varphi)$  è uno spazio vettoriale euclideo e trovarne una base ortonormale;

ii) stabilire se l'automorfismo  $f : V \longrightarrow V$  di matrice, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ :

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

è un'isometria di  $(V, \varphi)$  e calcolare  $\cos(\widehat{f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})})$ , dove  $\mathbf{a} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ .

[8] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica di  $\mathbb{R}^{3,3}$ .

i) Determinare una matrice  $B$  tale che  ${}^tBAB$  sia una matrice diagonale.

ii) Classificare la forma quadratica  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  associata ad  $A$ , rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

[9] Classificare e determinare la segnatura della seguente forma quadratica  $Q : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , che, rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^5$ , è associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[10] i) Verificare che lo spazio vettoriale  $V_3$ , rispetto alla forma quadratica

$$Q(\mathbf{x}) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

è uno spazio vettoriale euclideo, ( $\mathbf{x}$  è un vettore di  $V_3$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  sono le componenti di  $\mathbf{x}$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ).

ii) Determinare una base ortonormale di  $V_3$ , rispetto al prodotto scalare così introdotto.

[11] Classificare la seguente forma quadratica su  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4.$$

[12] Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h+1 & 1 \\ -h^2-2h & h+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h+1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Discutere, al variare del parametro  $h$ , le soluzioni dell'equazione  $AX = B$ .

ii) Posto  $h = 0$  nella matrice  $A$ , scrivere la forma quadratica associata alla matrice  $A^tA$  e ridurla a forma canonica.

iii) Posto  $h = 1$  nella matrice  $A$ , trovare una base ortonormale dello spazio euclideo  $\mathcal{R}(A)$  (spazio vettoriale generato dalle righe di  $A$ ).

[13] Determinare la segnatura delle seguenti forme quadratiche definite su  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2;$$

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2;$$

$$Q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3x_4 + 4x_3^2;$$

$$Q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_3x_4 - 4x_4^2.$$

[14] Data la forma quadratica  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2(xy - xz + yz),$$

la si classifichi e si determini una base rispetto alla quale  $Q$  assuma una forma canonica.

[15] Si consideri la forma quadratica  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2.$$

i) Classificare  $Q$ , determinandone la segnatura.

ii) Individuare una base di  $\mathbb{R}^3$ , rispetto alla quale  $Q$  possa essere scritta in forma canonica.

[16] Classificare la seguente forma quadratica  $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 8xy + y^2 + 6xz + z^2 + t^2,$$

ridurla a forma canonica e determinare la matrice del cambiamento di base che la realizza.

[17] Classificare la seguente forma quadratica  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 2xy + 5y^2 + 6xz + 6yz + 3z^2$$

e ridurla a forma canonica.

[18] Si consideri la seguente forma quadratica su  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

i) Classificare  $Q$  e scriverla in forma normale.

ii) Scrivere  $Q$  in forma canonica e determinare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$  rispetto alla quale  $Q$  assume tale espressione.

[19] Si consideri la seguente forma quadratica su  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2x_3.$$

i) Classificare  $Q$  e scriverla in forma normale.

ii) Scrivere  $Q$  in forma canonica e determinare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$  rispetto alla quale  $Q$  assume tale espressione.

## Capitolo 5

# Soluzioni - Sottospazi vettoriali

[1]

```
m = {{1, 1, 2}, {2, -1, 3}, {3, 0, h}};  
Solve[Det[m] == 0, h]  
{ {h -> 5} }
```

$h \neq 5$ .

[2]

```
m = {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}, {3, 0, 1, 1}, {0, 1, -1, 0}};  
RowReduce[m]  
{ {1, 0, 0, 1/2}, {0, 1, 0, -1/2}, {0, 0, 1, -1/2}, {0, 0, 0, 0} }  
RowReduce[{m[[1]], m[[2]], m[[4]]}]  
{ {1, 0, 0, 1/2}, {0, 1, 0, -1/2}, {0, 0, 1, -1/2} }  
Solve[Det[A = {m[[1]], m[[2]], m[[4]], {1, -1, 2t - 8, t + 1}}] == 0]  
{ {t -> 2} }  
c = A[[4]] /. t -> 2  
{ 1, -1, -4, 3 }  
LinearSolve[Transpose[{m[[1]], m[[2]], m[[4]]}], c]  
{ 3, -1, 3 }
```

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4), t = 2, (3, -1, 3)$ .

[3]

```
u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};  
RowReduce[{u, v}]  
{ {1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7} }  
Solve[w == a u + b v, {t, a, b}]  
{ {t -> 7, a -> 1, b -> -3} }
```

$t = 7, (1, -3)$ .

[4]  $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2, 3, -3))$ .

[5]

```

m = {{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}, {0, 3, -1, -1}, {5, -h, 1, h}};
Solve[Det[m] == 0]
{{h -> -2}}
a = m[[4]] /. h -> -2;
Solve[Transpose[{m[[1]], m[[2]], m[[3]]}] . {x1, x2, x3} == a]
{{x1 -> 2, x2 -> -1, x3 -> 1}}
    
```

i)  $h = -2$ ,  $(2, -1, 1)$ . ii) Per esempio:  $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0, 1, 5, 0), (0, 0, 2, 0))$ .

[6] Per esempio:  $x + 2y - z + t = 0$ ,  $y + z - t = 0$ .

[7] i)  $\dim \mathcal{H} = 2$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 0))$ ,  $\dim \mathcal{K} = 3$ ,

$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (0, 3, 0, -4), (0, 0, 1, 1))$ .

ii)  $\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathbb{R}^4$ ,  $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) = 1$ ,  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathcal{L}((-6, 3, 26, 0))$ .

iii)  $(1, 2, 3, 4) = \left(1 + \frac{3}{13}w, 2 - \frac{3}{26}w, 3 - w, 4\right) + \left(-\frac{3}{13}w, \frac{3}{26}w, w, 0\right)$ ,  $w \in \mathbb{R}$ .

[8]

```

m = {{0, 1, -h - 1, 1}, {h, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, -1}, {0, 4, 0, 0}};
Solve[Det[m] == 0]
{{h -> -1}, {h -> 0}}
LinearSolve[Transpose[m /. h -> 1], {1, 1, 1, 1}]
{-1/2, 5/2, -3/2, -1/4}
    
```

i)  $h \neq -1$ ,  $h \neq 0$ . ii) Per esempio, per  $h = 1$ :  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ .

[9]  $\dim \mathcal{S} = 3$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ;

$\dim \mathcal{T} = 3$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ .

[10]  $\mathcal{K}$  non è un sottospazio vettoriale.  $\dim \mathcal{H} = 2$ ;

$\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)$ .

[11] i)  $\dim \mathcal{H} = 2$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, 2, 0, 3), (-1, 1, 3, 0))$ .

ii)  $\dim(\mathcal{H} + \mathcal{K}) = 4$ ,  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ .

[12]

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {1, 0, 2, -1}, {0, 2, -2, 1}, {4, 1, -2, 3}};
```

```
Det[m]
```

```
-13
```

```
LinearSolve[Transpose[m], {1, 0, 0, 1}]
```

```
{-10/13, 7/13, 8/13, 4/13}
```

$$i) A = -\frac{10}{13}A_1 + \frac{7}{13}A_2 + \frac{8}{13}A_3 + \frac{4}{13}A_4.$$

$$ii) \dim \mathcal{A} = 3, \mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$\dim \mathcal{B} = 2, \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right);$$

$$\dim(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = 4, \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$\dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1, \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right).$$

$$[13] i) \dim \mathcal{H} = 2, \mathcal{H} = \mathcal{L}((2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1));$$

$$\dim \mathcal{K} = 3, \mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 7, 1)).$$

$$ii) \dim(\mathcal{H} + \mathcal{K}) = 4, \mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathcal{L}((2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1)).$$

[14] Sì.

$$[15] ii) \text{ Per esempio: } \mathbf{d} = (0, 0, 0, 1). \quad iii) \mathcal{H} \not\subseteq \mathcal{K}.$$

[16]

```
Reduce[{x + y + z == 0, x + h y + (2 - h) z == 0,
  -x - h^2 y + (3h - 4) z == 0}, {x, y, z}]
h == 1 && x == -y - z | h == 2 && x == -2 z && y == z |
x == 0 && y == 0 && z == 0 && -2 + h != 0 && -1 + h != 0
```

Se  $h \notin \{1, 2\}$ :  $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ ;

se  $h = 1$ :  $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ ;

se  $h = 2$ :  $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-2, 1, 1))$ .

ii) Se  $h \notin \{1, 2\}$ :  $\mathbb{R}^3$ ;

se  $h = 1$ : per esempio  $\mathcal{L}((1, 0, 0))$ ;

se  $h = 2$ : per esempio  $\mathcal{L}((0, 1, 2), (0, 0, 1))$ .

$$[17] \mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

[18]

```

A = {{6, -9}, {4, -6}}; X := {{x1, x2}, {x3, x4}};

Solve[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> 3 x3 + x4, x2 -> - $\frac{9 x^3}{4}$ }}

Solve[A.X == -X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 ->  $\frac{9 x^3}{4} + 3 x4$ }}

Solve[{A.X == X.A, A.X == -X.A}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 ->  $\frac{3 x4}{2}$ , x3 -> - $\frac{2 x4}{3}$ }}

A1 = {12, -9, 4, 0}; A2 = {1, 0, 0, 1}; A3 = {0, 9, 4, 0};
A4 = {-1, 3, 0, 1}; c = {0, h - 2, 0, h - 3};

d = Solve[c == x A1 + y A2 + z A3 + w A4, {x, y, z, w, h}][[1]]

Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{x -> - $\frac{1}{6} + \frac{w}{6}$ , y -> 2 - w, z ->  $\frac{1}{6} - \frac{w}{6}$ , h -> 5}

Simplify[(x/.d[[1]]) A1 + (y/.d[[2]]) A2]
{w, - $\frac{3}{2}(-1 + w)$ ,  $\frac{2}{3}(-1 + w)$ , 2 - w}

Simplify[(z/.d[[3]]) A3 + (w/.d[[4]]) A4]
{-w,  $\frac{3(1+w)}{2}$ , - $\frac{2}{3}(-1 + w)$ , w}
    
```

i)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

ii)  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}\right),$

$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$

iii)  $h = -5, C_1 = \left( \begin{matrix} w & -\frac{3}{2}(-1+w) \\ \frac{2}{3}(-1+w) & 2-w \end{matrix} \right), C_2 = \left( \begin{matrix} -w & \frac{3}{2}(1+w) \\ -\frac{2}{3}(-1+w) & w \end{matrix} \right), w \in \mathbb{R}.$

[19] i)  $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((0, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 1)), \dim \mathcal{W}_1 = 2.$

ii)  $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, 0, 2, 0), (0, 1, -1, 1)), \dim \mathcal{W}_2 = 2;$

$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0, 1, 2, 1), (2, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0)), \dim \mathcal{W}_3 = 3.$

iii)  $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = \mathcal{L}((-3, 1, 1, 1)), \dim(\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)) = 1.$

[20]  $\mathcal{H}$  non è un sottospazio vettoriale;

$\mathcal{K} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$   
 $\dim \mathcal{K} = 6.$

[21]  $\mathcal{H}$  non è un sottospazio vettoriale;

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((x, x^2, x^3)), \dim \mathcal{K} = 3.$$

[22] No.

[23] No.

[24]  $\mathcal{W}_1 = \{(-2t_3 - 3t_2 - t_1, t_3, t_2, t_1), t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{W}_2 = \{(0, 0, 0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ , da cui segue la tesi.

$$[25] \mathcal{H} = \mathcal{L}(2x + 5x^2 - 3x^4, -x^2 + x^4, x^3 + x^4), \dim \mathcal{H} = 3,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}(-2 - x + x^2, -2x - x^2 + x^3, -2x^2 - x^3 + x^4), \dim \mathcal{K} = 3,$$

$$\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathcal{L}(-2 - x + x^2, 2x + 5x^2 - 3x^4, -x^2 + x^4, x^3 + x^4), \dim(\mathcal{H} + \mathcal{K}) = 4,$$

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathcal{L}(-2x - x^2 + x^3, -2x^2 - x^3 + x^4), \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{K}) = 2.$$

$$-2 + 2x + 4x^4 = [(3 + 2\lambda)x + (-1 + \lambda + 2\mu)x^2 + (-\lambda + \mu)x^3 + (4 - \mu)x^4] +$$

$$+ [-2 - (1 + 2\lambda)x + (1 - \lambda - 2\mu)x^2 + (\lambda - \mu)x^3 + \mu x^4], \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

[26] Il rango della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è 5.

$$[27] \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, 2, 0, 0, 0), (0, 8, -8, 3, 1)),$$

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$$

$$[28] \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0, 0, 3, 2, 0), (0, 0, 3, 0, 2)),$$

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$$

$$[29] \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

$$[30] \text{ i) } \mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(3 - x, 3x - x^2), \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(3x^2 - x^3, 3x^3 - x^4).$$

$$\text{ii) } -3 - 5x + 5x^2 - 10x^3 + 3x^4 = (-3 - 5x + 2x^2) + (3x^2 - 10x^3 + 3x^4).$$

[31] i)  $\dim \mathcal{W}_1 = 3, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(-3x + x^2, -3x^2 + x^3, -3x^3 + x^4).$

ii)  $\dim \mathcal{W}_2 = 2, \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x)).$

iii)  $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1, \quad \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(6x^2 - 5x^3 + x^4).$

iv)  $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(1, x).$

[32] i)  $\dim \mathcal{W}_1 = 3, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1, -2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1));$

ii)  $\dim \mathcal{W}_2 = 2, \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$

iv)  $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((1, -2, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)).$

[33]

```
m = {{3, -1, 1, 0}, {0, 1, -1, 2}, {2, 0, -1, 1}, {0, 1, -2, 3}};
```

```
Det[m]
```

```
-4
```

```
LinearSolve[Transpose[m], {0, 1, -1, 0}]
```

```
{-1, 3/2, 3/2, -3/2}
```

$$x - x^2 = -p_1(x) + \frac{3}{2}p_2(x) + \frac{3}{2}p_3(x) - \frac{3}{2}p_4(x).$$

[34]

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {0, 3, -1, -2}, {1, -1, 0, 1}, {3, 2, -1, 1}};
```

```
a = {2, -1, -1, 2};
```

```
LinearSolve[Transpose[m], a]
```

```
{2, 0, 3, -1}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1 + 3A_3 - A_4.$$

[35]

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 2, 1}; d = {0, 1, 0}; c = {1, 2, 3};
```

```
LinearSolve[Transpose[{a, b, d}], c]
```

```
{1, 3, -6}
```

i)  $\mathcal{B}' = \left( A, B, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$

ii)  $C = A + 3B - 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

[36] i) Poiché  $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , dalla relazione di Grassmann segue che  $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \geq 1$ .

ii) Si possono avere solo i seguenti casi:

1.  $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$  se  $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 3$ , per esempio:  $\mathcal{U} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ ,

$\mathcal{V} = \mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ , quindi  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

2.  $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$  se  $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 2 = \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$ , per esempio:

$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ .

[37]

```
a1 = {1, -2, 1}; a2 = {2, 1, 3}; a3 = {4, -1, -5}; a = {4, -11, -7};
```

```
Det[{a1, a2, a3}]
```

```
-52
```

```
LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}], a]
```

```
{4, -2, 1}
```

ii)  $A = (4, -2, 1)$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

[38] i)  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(6 - 11x + 6x^2 - x^3, 6x - 11x^2 + 6x^3 - x^4, 6x^2 - 11x^3 + 6x^4 - x^5)$ ,  $\dim \mathcal{A} = 3$ .

ii)  $\mathcal{B} = \mathcal{L}(x^3, x^4, x^5)$ .

iii)  $x^2 + 3x^3 = \frac{1}{6}(6x^2 - 11x^3 + 6x^4 - x^5) + \frac{1}{6}(29x^3 - 6x^4 + x^5)$ , la decomposizione è unica.

iv)  $\mathcal{C} = \mathcal{L}(1 + x + x^2, x^2 + 3x^3 - x^4, x^3 + x^5)$ ,  $\dim \mathcal{C} = 3$ ,

$\mathcal{D} = \mathcal{L}(-2 + x - x^3, x^4 - x^5, x + x^2 + x^3 - x^4)$ ,  $\dim \mathcal{D} = 3$ .

v) Sì. vi)  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C} + \mathcal{D}) = \mathcal{A}$ .

$$[39] \quad \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i & -1 \\ 3 & 3i \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - i & 0 \\ 0 & 4 - 3i \end{pmatrix}\right).$$

[40]

```
a = {{0, -1, -1, -1}, {1, 0, 2, 1}, {1, -2, 0, 1}, {1, -1, -1, 0}};
```

```
Det[a]
```

```
4
```

```
MatrixForm[Inverse[a]]
```

```

0      1/2    -1/2    1
 1/2    0      -1/2    1/2
 1/2    1/2    0      -1/2
-1     -1/2    1/2    0

```

$$i) \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \dim \mathcal{B} = 3.$$

$$\text{ii) } C = \mathcal{L} \left( \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 12 \\ -1 & 2 & -12 & 0 \end{array} \right) \right),$$

$\dim C = 3$ .

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \left( \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \right), \dim \mathcal{D} = 2.$$

iii)  $\mathcal{B} + C = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$ , non si tratta di somma diretta.

iv)  $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + C)$ .

$$\text{v) } \mathcal{E} = \mathcal{L} \left( \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

$$\text{vi) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{vii) } \det A = 4, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[41] \quad \mathcal{B} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i-2 \\ 6-3i & 8 \end{pmatrix}.$$

$$[42] \quad \text{i) } \mathcal{W} = \mathcal{L}(A, {}^t A). \quad \text{ii) } \mathcal{U} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{iii) } \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

[43]

$$\mathbf{a} = \{\{0, 1, 2\}, \{1, 3, 1\}, \{2, 1, 5\}\};$$

Det[a]

-13

MatrixForm[Inverse[a]]

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{13}{3} & \frac{13}{4} & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{5} & \frac{13}{2} & \frac{13}{1} \\ \frac{13}{13} & -\frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } \mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \dim \mathcal{A} = 3.$$

$$\text{ii) } \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{iv) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

$$\text{v) } \mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right); \dim \mathcal{C} = 3.$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right); \dim \mathcal{D} = 3.$$

vi) Sì, vii)  $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C})$ .

$$[44] \text{ i) } \mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{ii) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[45] i)  $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$ .ii) Per esempio:  $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0)), \mathcal{L}((0, 1, 0, 0))$ .

$$[46] \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 3, -2, 2, 3), (0, 1, -1, 2, -1), (0, 0, 1, 0, -1)); \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 4, -3, 4, 2)).$$

[47]  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 2, -1, 3), (0, 0, 3, -8)).$

[48]

```

X = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}, {x7, x8, x9}};
A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}};

Reduce[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9}]
x1 == x5&&x2 == x6&&x4 == 0&&x7 == 0&&x8 == 0&&x9 == x5
    
```

i)  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$

ii)  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$

iii) Per esempio:

$$\mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

[49]

```

m = {{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 0, 0},
      {1, 0, 0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 1}};

Det[m]
1

RowReduce[m]
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}

LinearSolve[Transpose[m], {1, -1, -1, 1, -1, 1}]
{2, -1, -1, 1, -1, 1}
    
```

ii)  $p(x) = (2, -1, -1, 1, -1, 1)$ , rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .

[50]  $\mathcal{L}((0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$ , ci sono infinite risposte che dipendono da due parametri perché  $\dim \mathcal{H} = 3$ .

[51] ii)  $(0, 2, 0, 0, 0) = (1, 0, 2, 1, 0) + (-1, 2, -2, -1, 0).$

[52] i)  $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1, -1, 0, 2), (0, 2, 1, 3)), \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2, 0, 1, 3), (-1, 1, 0, 0)),$   
 $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, -1, 0, 2), (0, 2, 1, 3), (0, 0, 0, 1)), \quad \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0, 2, 1, 3)).$

ii)  $\mathbf{a}_1 = 3(1, -1, 0, 2), \quad \mathbf{a}_2 = (-3, 1, -1, -3).$

[53] i)  $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$

$$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}.$$

ii) Per esempio:  $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

[54]  $\mathcal{L}((0, 1, 0), (1, 0, 0)), \mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1)).$

[55]  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

[56]

```

a1 = {1, 0, -2, 0, 1}; a2 = {0, 1, 0, -1, 0};
a3 = {0, 0, -1, 0, 3}; x = {1, 2, h, -2, 1};
Solve[x == x1 a1 + x2 a2 + x3 a3, h]
{{h -> -2}}

```

i)  $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1, 0, -2, 0, 1), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, -1, 0, 3)),$

$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, 0, 0, -2, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 1));$

$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-2, -1, 3, 1)), \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5.$

ii)  $h = -2.$

[57] i)  $\mathcal{W}_2$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$  perché i suoi elementi sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo; si può direttamente dimostrare che  $\mathcal{W}_2$  è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per numeri reali.

ii)  $\dim \mathcal{W}_1 = 3, ((2, 1, 1, 0, 2), (-1, 1, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 1, 1))$  è una base di  $\mathcal{W}_1.$

$\dim \mathcal{W}_2 = 2, \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0, 0)).$

iii)  $\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 4, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 0, 3), (0, 0, 2, 0, 3), (0, 0, 0, 1, -2));$

$\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2, 1, 1, 0, 2)).$

[58] Per esempio:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

[59]

```

a1 = {2, -1, 0, 4}; a2 = {-3, 2, 4, h};
a3 = {5, -3, h, -1}; b = {14, -8, h, -1};
Reduce[x1 a1 + x2 a2 + x3 a3 == b, {x1, x2, x3}]
h == -2 && x1 == 1 && x2 == 1 && x3 == 3 ||
h == 14 && x1 == 25/9 && x2 == -7/9 && x3 == 11/9

```

Se  $h \notin \{-2, 14\}$ : non esistono soluzioni; se  $h = -2$  o  $h = 14$ : esiste una sola soluzione.

[60]

```

a1 = {1, 1, 0}; a2 = {0, 1, -1}; a3 = {x, y, z}; b = {2, 3, -1};

Reduce[x1 a1 + x2 a2 + x3 a3 == b, {x1, x2, x3}]
x == y + z && x1 == 2 - x3 y - x3 z && x2 == 1 + x3 z ||
x1 == 2 && x2 == 1 && x3 == 0 && x - y - z != 0
    
```

- i)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ : l'equazione vettoriale ha sempre soluzioni;
- ii)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}/x \neq y + z$ : esiste una sola soluzione;
- iii)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}/x = y + z$ : esistono infinite soluzioni dipendenti da un'incognita libera.

[61]

```

m = {{1, -1, 1, 1}, {1, 1, -1, 1}, {-1, 1, 1, 1}};

Solve[Transpose[m].{x1, x2, x3} == {8, 2, 0, 10}, {x1, x2, x3}]
{{x1 -> 4, x2 -> 5, x3 -> 1}}
    
```

$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1.$

[62]

```

m = {{1, 0, 1, 1}, {-1, 1, 0, 3}, {-1, 1, 1, 4}};

Solve[Transpose[m].{x, x2, x3} == {2, 0, 2, 3}, {x1, x2, x3}]
{}
    
```

L'equazione è incompatibile.

[63]

```

a = {h, -k, -h - 2k}; b = {1, 2, h - k};
c = {-2, -4, k - 4}; d = {1, 2, 4 - h};

Reduce[a x + b y + c z == d, {x, y, z}]
h == 1 && k == -2 && z == 1/2 (-1 + x + y) ||
2 h == -k && y == 1/4 (-4 - k x) && z == 1/8 (-8 - 3 k x) && 2 + k != 0 ||
k == -4 + 2 h && x == 0 && z == 1/2 (-1 + y) && -1 + h != 0 ||
x == 0 && y == -1 && z == -1 && -4 + 2 h - k != 0 && 2 h + k != 0
    
```

Se  $h = 1, k = -2$ : esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;

se  $h = -\frac{1}{2}k, k \neq -2$ : esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se  $k = 2h - 4, h \neq 1$ : esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se  $h \neq 1, k \neq -2$ : esiste una sola soluzione.

[64]

```

a = {{1, 2}, {0, 1}, {3, 5}, {0, h}}; b = {{3, 1}, {-1, 2}, {k, 0}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};

Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
k == 3 x11 + x9 && x1 == -3 (-1 + x3) && x10 == -5 x11 - h x12 - 2 x9 &&
x2 == -5 + x3 - h x4 && x5 == -1 - 3 x7 && x6 == 4 + x7 - h x8
    
```

$$X = \begin{pmatrix} 3 - 3a & -5 + a - hd & a & d \\ -1 - 3b & 4 + b - he & b & e \\ k - 3c & -2k + a - hf & c & f \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f, h, k \in \mathbb{R}.$$

[65]

```

a = {{1, 2, 3}, {-1, h, 2h}};
b = {{0, 1, -1}, {-2, 1, 0}, {-3, 0, k}, {0, 0, k}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};

Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
False

```

L'equazione matriciale è incompatibile, per ogni  $h, k \in \mathbb{R}$ .

[66]

```

a = {{5, 1, 0}, {3, 0, 1}, {4, -1, 3}};
b = {{2, 1}, {2, 0}, {h, k}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};

Reduce[a.x == b]
h == 4 && k == -1 && x3 == 2 - 5 x1 &&
x4 == 1 - 5 x2 && x5 == 2 - 3 x1 && x6 == -3 x2

```

Se  $h \neq 4$  o  $k \neq -1$ : non esistono soluzioni;

se  $h = 4$  e  $k = -1$ : l'equazione matriciale ha infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 - 5a & 1 - 5b \\ 2 - 3a & -3b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[67]

```

a = {{1, 1, -1}, {0, 2, 1}, {0, 1, 1}};
b = {{1, 1}, {0, 1}, {1 + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};

Reduce[a.x == b]
x1 == \frac{2(3+1+1^2)}{1(-1+21)} && x2 == \frac{-2+1}{1(-1+21)} &&
x3 == \frac{-2-1}{-1+21} && x4 == \frac{1}{-1+21} && x5 == \frac{2(2+1)}{-1+21} && x6 == \frac{1}{1-21}

```

Se  $\lambda \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ : non esistono soluzioni;

$$\text{se } \lambda \notin \left\{0, \frac{1}{2}\right\}: \text{ allora } X = \begin{pmatrix} \frac{-2(\lambda^2+\lambda+3)}{\lambda(1-2\lambda)} & \frac{2-\lambda}{\lambda(1-2\lambda)} \\ \frac{\lambda+2}{1-2\lambda} & \frac{-\lambda}{1-2\lambda} \\ \frac{-2(\lambda+2)}{1-2\lambda} & \frac{1}{1-2\lambda} \end{pmatrix}.$$

[68]

```

a = {{1, 1}, {1, 2}, {-1, 1}};
b = {{1, 1}, {0, 0}, {1 + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};

Reduce[a.x == b]
1 == -2 && x1 == \frac{4}{5} && x2 == -\frac{2}{5} && x3 == -\frac{2}{5} && x4 == \frac{1}{5}

```

Se  $\lambda \neq -2$ : non esistono soluzioni;

$$\text{se } \lambda = -2: X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

[69]

$$\mathbf{a} = \{\{3, -1\}, \{1, 2\}, \{2, h\}\}; \mathbf{b} = \{\{1, 1, -1\}, \{0, 1, 3\}, \{0, k, h+k\}\};$$

$$\mathbf{x} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\};$$

Reduce[a.x == b]

$$h == 4 \&\&k == 2 \&\&x_1 == \frac{2}{7} \&\&x_2 == \frac{3}{7} \&\&$$

$$x_3 == \frac{1}{7} \&\&x_4 == -\frac{1}{7} \&\&x_5 == \frac{2}{7} \&\&x_6 == \frac{10}{7}$$

Se  $h \neq 4$  o  $k \neq 2$ : l'equazione matriciale  $AX = B$  è incompatibile;

se  $h = 4$  e  $k = 2$ :  $X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ .

L'equazione  $X'A = B$  è priva di significato.

[70]

$$\mathbf{a} = \{\{2, -1\}, \{h, 2\}, \{1, 0\}\}; \mathbf{b} = \{\{3, -1, k\}, \{-2, 0, -3\}, \{4, -k, 1\}\};$$

$$\mathbf{x} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\};$$

Reduce[a.x == b]

$$h == -3 \&\&k == 2 \&\&x_1 == 4 \&\&$$

$$x_2 == -2 \&\&x_3 == 1 \&\&x_4 == 5 \&\&x_5 == -3 \&\&x_6 == 0$$

Se  $h \neq -3$  o  $k \neq 2$ : l'equazione matriciale è incompatibile;

se  $h = -3$  e  $k = 2$ :  $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

[71]

$$\mathbf{a} = \{\{1, 2, 1, -3\}, \{0, 3, 1, 5\}, \{1, 1, 0, -8\}\};$$

$$\mathbf{b} = \{\{2, 1\}, \{0, 1\}, \{m-3, 0\}\};$$

$$\mathbf{x} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_7, x_8\}\};$$

Reduce[a.x == b]

$$1 == -1 \&\&m == 5 \&\&x_1 == 2 + x_3 + 8 x_7 \&\&$$

$$x_2 == x_4 + 8 x_8 \&\&x_5 == -3 x_3 - 5 x_7 \&\&x_6 == 1 - 3 x_4 - 5 x_8 \quad ||$$

$$m == 5 + x_3 + 1 x_3 \&\&x_1 == 2 + x_3 + 8 x_7 \&\&x_2 == 8 x_8 \&\&$$

$$x_4 == 0 \&\&x_5 == -3 x_3 - 5 x_7 \&\&x_6 == 1 - 5 x_8 \&\&1 + 1 \neq 0$$

Se  $\lambda \neq -1$ : l'equazione matriciale ammette infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:

$$X_4 = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R};$$

se  $\lambda = -1, \mu \neq 5$ : non esistono soluzioni;

se  $\lambda = -1, \mu = 5$ : esistono infinite soluzioni che dipendono da due vettori liberi:

$$X_4 = (a, b), \quad X_3 = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

[72]

$$\mathbf{a} = \{\{1, -1, 2, 3\}, \{-1, 0, 5, 6\}, \{3, h, -1, 0\}\};$$

$$\mathbf{b} = \{\{1, -1\}, \{5, -3\}, \{k, -1\}\};$$

$$\mathbf{x} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_7, x_8\}\};$$

Reduce[a.x == b]

$$k == -3 + 2 x_3 + h x_3 \&\&x_1 == \frac{1}{3} (-3 + 2 x_3 + x_5) \&\&x_2 == \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{2+h} + x_6\right) \&\&$$

$$x_4 == -\frac{2}{2+h} \&\&x_7 == \frac{1}{9} (6 + x_3 - 7 x_5) \&\&x_8 == \frac{1}{9} \left(-4 - \frac{2}{2+h} - 7 x_6\right)$$

Se  $h = -2$ : non esistono soluzioni;

se  $h \neq -2$ : esistono infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:  $X_4 = (a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

[73]

```

A = {{1, 1}, {2, k}, {-1, h}};
B = {{0, -1}, {1, 1}, {0, k}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[A.X == B]
h == -1 && k == 1 && x1 == 1 && x2 == 2 && x3 == -1 && x4 == -3

```

Se  $h = -1$  e  $k = 1$ :  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ; in tutti gli altri casi non esistono soluzioni.

## Capitolo 6

# Soluzioni - Applicazioni lineari

[1]

```
A = {{1, I, 1}, {I, h^2, I}, {-I, 1, -2}};  
Reduce[A.{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]  
h == -i&&x == -i y&&z == 0 |  
h == i&&x == -i y&&z == 0 | x == 0&&y == 0&&z == 0&&1 + h^2 != 0
```

Se  $h \neq \pm i$ :  $\ker f = \{0\}$ ,  $\text{im} f = \mathbb{C}^3$ ;

se  $h = \pm i$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-i, 1, 0))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((1, i, -i), (1, i, -2))$ .

[2]

```
A = {{2, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, -1}};  
NullSpace[Transpose[A]]  
{}
```

$\ker f = \{0\}$ .

[3]

```
A = {{1, 0, 1, 1}, {2, 1, 1, 3}, {1, 1, 0, 2}};  
NullSpace[A]  
{{-1, -1, 0, 1}, {-1, 1, 1, 0}}
```

$\ker f = \mathcal{L}((-1, -1, 0, 1), (-1, 1, 1, 0))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((1, 2, 1), (0, 1, 1))$ .

[4]

```
A = {{2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}};  
Det[A]  
-2
```

$\dim \ker f = 0$ ,  $\dim \text{im} f = 4$ .

[5]  $M(f_1) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ ;

$\ker f_1 = \{x \in V_3 / x \perp u\}$ ;  $\text{im} f_1 = \mathbb{R}$ ;

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\ker f_2 = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} // \mathbf{u}\}, \quad \text{im} f = \{\mathbf{x} \in V_3 / \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\}.$$

[6]

```

A = {{2, 1, -1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, h}};
Solve[Det[A] == 0, h]
{{h -> 6/3}}
n = {{1, k^2 - k, k}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}};
Solve[Det[n] == 0]
{{k -> 1 - sqrt[2]}, {k -> 1 + sqrt[2]}}
Det[{{1, 0, 0}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}]
3
NullSpace[A/.h -> 2]
{{1, -1, 1}}
Det[{{1, -1, 1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}]
9
LinearSolve[A/.h -> 2, {3, 2, -2}]
LinearSolve::"nosol": Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{2, 1, -1}, {1, 2, 1}, {-1, 1, 2}}, {3, 2, -2}]
Solve[(A/.h -> 2).{x, y, z} == (A/.h -> 2).{1, 2, -1}, {x, y, z}]
Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x -> 2 + z, y -> 1 - z}}

```

i)  $h = 2$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((1, 2, 1), (-1, 1, 2))$ ;

ii)  $k = 1 \pm \sqrt{2}$ ;    iii) per esempio:  $(1, 0, 0)$ ;

iv)  $\ker f = \mathcal{L}((1, -1, 1))$ ;

v)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$ ;    vi) no;    vii)  $\mathbf{v} = (2 + t, 1 - t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

[7]

```

a = LinearSolve[{{1, -1, -1}, {2, -1, 0}, {-1, 1, 0}},
  {{0, 0, 0}, {3, 2, -1}, {3, -1, 2}}]
{{6, 1, 1}, {9, 0, 3}, {-3, 1, -2}}

MatrixForm[A = Transpose[a]]

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$


Det[A]
0

NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}

Solve[{t + 1, 2t, -1] == x{6, 1, 1} + y{3, 0, 1}, {t, x, y}]
{{t -> 4/5, x -> 8/5, y -> -13/5}}

Det[{{1, 0, 0}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

Det[{{1, -1, 1}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

LinearSolve[A, {3, 4, -1}]
LinearSolve::"nosol": Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{6, 9, 3}, {1, 0, -1}, {1, 3, 2}}, {3, 4, -1}]

```

i)  $A = M(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 0$ , quindi  $f$  non è né iniettiva né suriettiva.

ii)  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((6, 1, 1), (3, 0, 1))$ . iii)  $t = \frac{4}{5}$ .

iv)  $\mathbf{u} = \left(\frac{8}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ . v) per esempio:  $(1, 0, 0)$ .

vi) Sì. vii) Non esistono.

[8]

```

A = LinearSolve[{{2, 0, 1}, {1, 1, -2}, {3, -1, -2}},
  {{3, 6, -3}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}]
{{1, 2, -1}, {1, 2, -1}, {1, 2, -1}}

MatrixForm[Transpose[A]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$


Det[{{1, 1, -2}, {3, -1, -2}, {1, 2, -1}}]
-8

```

i)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

ii)  $\ker f = \mathcal{L}((1, 1, -2), (3, -1, -2))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 2, -1))$ .

$$\text{iii) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

[9]

```

A = {{4, 2, 2}, {4, a^2 + 1, a + 1}, {8, 4, a^2 + 3}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a -> -1}, {a -> -1}, {a -> 1}, {a -> 1}}
NullSpace[A/.a -> -1]
{{-1, 2, 0}}
NullSpace[A/.a -> 1]
{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}}
Solve[{A/.a -> -1}.{x, y, z} == {1, -2, 0}, {x, y, z}]
{}
Det[{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}, {1, 1, 2}}]
-10
B = {{-1, -1, 1}, {0, 2, -1}, {2, 0, -1}};
NullSpace[B]
{{1, 1, 2}}
Reduce[(A/.a -> 1).{x, y, z} == {h, k, 1}, {x, y, z}]
2 h == 1&&2 k == 1&&x == 1/8 (1 - 4 y - 4 z)

```

i)  $a \neq \pm 1$ .ii) se  $a = -1$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 2, 0))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((1, 1, 2), (1, 0, 2))$ ;se  $a = 1$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 0, 2), (-1, 2, 0))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((1, 1, 2))$ .

iii) Non esistono. iv) Sì (teorema del completamento della base). v) Sì.

vi) Per esempio:  $M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .vii) Se  $l = 2h = 2k$ , allora  $f^{-1}(h, k, l) = \left\{ \left( \frac{1}{8}l - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t', t, t' \right), l, t, t' \in \mathbb{R} \right\}$ .

[10]

```
Solve[{1, 2, -1} + {x, y, z} + {2, -3, t} == {2, 2, 0}, {x, y, z, t}]
Solve :: "svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x -> -1, y -> 3, z -> 1 - t}}
Solve[Det[{{1, -1, 2}, {2, 3, -3}, {-1, 1 - t, t}}] == 0]
{{t -> 5}}
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

[11]

```
v1 = {1, 2, 0, 1}; v2 = {1, 0, 1, 0}; v3 = {-1, 0, 0, 2};
RowReduce[{v1, v2, v3}]
{{1, 0, 0, -2}, {0, 1, 0, 3/2}, {0, 0, 1, 2}}
LinearSolve[{v1, v2, v3, v1 + v2 + v3, v1 + v2 + v3},
  {v1, 2v1 + v2, -v2 + v3, {2, 2, 1, 1}, {2, 6, 0, 1}}]
LinearSolve :: "nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[
  {{1, 2, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 2}, {1, 2, 1, 3}, {1, 2, 1, 3}},
  {{1, 2, 0, 1}, {3, 4, 1, 2}, {-2, 0, -1, 2}, {2, 2, 1, 1}, {2, 6, 0, 1}}]
```

ii) No.

[12]

```
u1 = {1, -2, 0, 4}; u2 = {-1, 1, 1, 0}; u3 = {0, 0, 1, 2};
RowReduce[{u1, u2, u3}]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 2}}
```

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_1 & -2\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & -2\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_3 & -2\lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

[13]

```

A = {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {2, 1, 5}};

NullSpace[A]
{{-2, -1, 1}}

u = {1, -2, k}; v = {1, 0, 2}; w = {0, 1, 0};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{k → 2}}

p = Transpose[{u/.k → 1, v, w}];

LinearSolve[p, {1, 0, 0}]
{2, -1, 4}

LinearSolve[p, {0, 1, 0}]
{0, 0, 1}

LinearSolve[p, {0, 0, 1}]
{-1, 1, -2}

m = LinearSolve[{u/.k → 0, v, w}, {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}]
{{1, 0, 4}, {0, 0, 1}, {-1/2, 1/2, -3/2}}

MatrixForm[Transpose[m]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$


```

i)  $\ker f = \mathcal{L}((-2, -1, 1))$  da cui segue la tesi.    ii)  $k \neq 2$ .

iii)  $\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ .

iv) Per esempio:  $M^{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

v)  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ .

[14]

```
A = {{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}};
NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}
LinearSolve[A, {0, 0, 1}]
LinearSolve::"nosol": Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}}, {0, 0, 1}]
Det[{A.{1, 0, 1}, A.{0, 1, 1}, {4, 3, -2}}]
4
{}
```

i), ii)  $f$  non è né iniettiva né suriettiva:  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((2, 0, 3), (0, 1, -2))$ ,

per esempio  $e_3$  non ha controimmagine,  $f(-1, 1, 1) = \mathbf{o}$  e  $f(-2, 2, 2) = \mathbf{o}$ .

iii) No.

[15]

```
A = {{1, 2, 3/2, 0}, {t, -t, 0, 0}, {1, 1, 1, -1}};
Reduce[A.{x, y, z, w} == {0, 0, 0}, {x, y, z, w}]
t == 0 && w == 1/2 (-2 y - z) && x == 1/2 (-4 y - 3 z) || w == 0 && x == y && z == -2 y
Solve[a{-2, 1, -1, 0} + b{-3, 0, 2, -2} == {k + 3, k, 1, 2k}]
{}
Reduce[A.{x, y, z, w} == {1, 0, -1}, {x, y, z, w}]
t == 0 && w == 1/2 (4 - 2 y - z) && x == 1/2 (2 - 4 y - 3 z) ||
w == 5/3 && x == y && z == -2/3 (-1 + 3 y)
```

i) Se  $t = 0$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0, -1), (-3, 0, 2, -1))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 1), (2, 0, 1))$ ;

se  $t \neq 0$ :  $\ker f = \mathcal{L}((1, 1, -2, 0))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ .

ii) No; iii) se  $t = 0$ :  $((-2, 1, 0, -1), (-3, 0, 2, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ ;

se  $t \neq 0$ :  $((1, 1, -2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

iv) Se  $t = 0$ :  $f^{-1}(1, 0, -1) = \left(1 - 2t_1 - \frac{3}{2}t_2, t_1, t_2, 2 - t_1 - \frac{1}{2}t_2\right)$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ;

se  $t \neq 0$ :  $f^{-1}(1, 0, -1) = \left(t, t, \frac{2}{3} - 2t, \frac{5}{3}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

[16]

```
a = {1, 0, 1, 2}; b = {2, 3, 2, 1}; c = {1, 3, 1, -1}; d = {1, -3, 1, 5};
RowReduce[{a, b, c, d}]
{{1, 0, 1, 2}, {0, 1, 0, -1}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
Transpose[LinearSolve[
  {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, a}, {a, b, c, 2a}]]
{{1, 2, 1, 0}, {0, 3, 3, -3/2}, {1, 2, 1, 0}, {2, 1, -1, 3/2}}
```

i)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

$$\text{ii) } M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

[17]

```
v1 = {1, 2, 0}; v2 = {1, 0, 1}; v3 = {-1, 0, -2};
RowReduce[{v1, v2, v3}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
Transpose[{v1, v2, v3}].{{1, 2, 0}, {1, -1, -1}, {0, 0, 1}}.
Inverse[Transpose[{v1, v2, v3}]]
{{0, 1, 1}, {8, -3, -4}, {-5, 3, 4}}
{}
```

$$\text{ii) } M^{C, C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii) } M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & -4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

[18]

```
A = {{0, 3, 1}, {0, 0, 2}, {1, -1, 0}, {0, 1, 0}};
NullSpace[A]
{}
Solve[A.{x, y, z} == 3A.{1, 2, 1}, {x, y, z}]
{{x -> 3, y -> 6, z -> 3}}
Solve[A.{x, y, z} == {1, 2, 3, 4}, {x, y, z}]
{}
```

$$\text{i) } \text{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

ii) Sì; iii)  $\mathbf{v} = (3, 6, 3)$ . iv) No.

[19]

```
u = {2, 0, 1, 1}; v = {0, 1, 3, 1}; w = {0, 1, 0, 1};
RowReduce[{u, v, w}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}
u + 2w
{2, 2, 1, 3}
NullSpace[{{2, 1, 0}, {2, 2, -1}, {1, 7, -3}, {3, 3, -1}}]
{}
```

ii) Per esempio:  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, (0, 0, 0, 1))$ .

iii)  $M^{C,B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ . iv) Sì.

[20] i)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

ii)  $\text{im}f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ .

[21]

```
A = {{1, 0, 1, 0, 0}, {2, 1, 0, -1, 1}, {0, 3, -1, 1, 2}};
NullSpace[A]
{{-1, -3, 1, 0, 5}, {4, -3, -4, 5, 0}}
RowReduce[{A.{1, -1, 0, 0, 0}, A.{0, 1, 0, 1, 1}, A.{0, 0, 3, 0, 0}}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
b = {x1, x2, x3, x4, x5} + s {-1, -3, 1, 0, 5} + t {0, -3, 0, 1, 4};
Simplify[A.b == A.{x1, x2, x3, x4, x5}]
True
```

i)  $\ker f = \mathcal{L}((-1, -3, 1, 0, 5), (4, -3, -4, 5, 0))$ ,  $\text{im}f = \mathbb{R}^3$ . ii)  $f(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^3$ .

[22] i) No. ii) Sì, è suriettiva, quindi il nucleo ha dimensione 8 ed è costituito da tutte le matrici aventi traccia nulla.

[23]

```
A = {{1, 0, h, 0}, {0, 1, 0, h}, {3, 0, h - 2, 0}, {0, 3, 0, h - 2}};
Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
h == -1&&x1 == x3&&x2 == x4 ||
x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&x4 == 0&&1 + h != 0
B = A/.h -> -1;
Eigensystem[B]
{{-2, -2, 0, 0}, {{0, 1, 0, 3}, {1, 0, 3, 0}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}}}
Solve[{4x1 + x2 - x3 == 0, 3x2 - 3x3 - 4x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4/3, x2 -> x3 + 4x4/3}}
Reduce[B . {x1, x2, x3, x4} == {-t/3, 4t/3 + z, z, t}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 1/3 (-t + 3x3) &&x2 == 1/3 (t + 3x4) &&z == -t
```

i) Se  $h \neq -1$ :  $\ker f = \{0\}$ ,  $\text{im}f = \mathbb{R}^{2,2}$ ,

se  $h = -1$ :  $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $\text{im}f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ .

ii)  $\lambda_1 = -2$ ,  $m_{\lambda_1} = 2$ ,  $V_{\lambda_1} = \text{im}f$ ;  $\lambda_2 = 0$ ,  $m_{\lambda_2} = 2$ ,  $V_{\lambda_2} = \ker f$ ;  $f$  è semplice.

$$\text{iii) } f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

[24]

```

A = {{1, 17, 10, 9}, {0, 1, 0, 0}, {0, 11, 8, 6}, {0, -13, -8, -6}};

NullSpace[A]
{{-6, 0, -3, 4}}

A.{1, 0, 0, 4}
{37, 0, 24, -24}

A.{0, 0, 1, 2}
{28, 0, 20, -20}

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {-t1, t2, 0, t1}, {x1, x2, x3, x4}]
2 t2 == -t1&&x1 == 1/8 (5 t1 - 12 x4) &&x2 == -t1/2 &&x3 == 1/16 (11 t1 - 12 x4)

Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2},
 {{-6, 0, -3, 4}, {0, -1, -1, 3}, {1, 0, 0, 0}, {-1, 0, -1, 1}}}

```

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 6 \\ 0 & -13 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right), \text{ im}f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{iii) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 37 & 0 \\ 24 & -24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\right),$$

$$f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right).$$

iv)  $\lambda_1 = 0$ ,  $m_{\lambda_1} = 1$ ;  $\lambda_2 = 1$ ,  $m_{\lambda_2} = 2$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $m_{\lambda_3} = 1$ .

$$\text{v) } f \text{ è semplice, } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[25]

```

LinearSolve[{{1, 1, 0}, {0, 2, 1}, {1, -1, 1}},
  {{1, 2 + h, -h - 1}, {1, 3, 0}, {-2, h - 3, 3 - h}}]
{{0, h, -h}, {1, 2, -1}, {-1, -1, 2}}

MatrixForm[c = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$$


Solve[Det[c] == 0]
{{h -> 0}}

b = Eigenvalues[c]
 $\left\{1, \frac{1}{2} (3 - \sqrt{9 + 8h}), \frac{1}{2} (3 + \sqrt{9 + 8h})\right\}$ 

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]

Solve :: "ifun": Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve :: "ifun": Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

{{{}}, {{h -> -1}}, {}, {{h -> -1}},
  {{}}, {{h -> -9/8}}, {}, {{h -> -9/8}}, {{}}]

Eigensystem[c/.h -> -1]
{{1, 1, 2}, {-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}]

Eigensystem[c/.h -> -9/8]
{{1, 3/2, 3/2}, {0, 1, 1}, {-4/3, -1, 1}, {0, 0, 0}}]

```

ii)  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}; \quad \text{iii) a) } h \neq 0; \quad \text{b) } h > -\frac{9}{8}.$

[26]

```

a = {{1, 0, 1}, {0, 1, 1}, {2, 0, -1}};
b = {{1, -2, 3}, {h, 0, 2 - h}, {2, -1, 0}};

LinearSolve[a, b]
{{1, -1, 1}, {h, 1, -h}, {0, -1, 2}}

MatrixForm[m = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{pmatrix}$$


Eigensystem[m]
{{1, 1, 2}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}, {-h/(1+h), -1/(1+h), 1}}]

Eigensystem[m/.h -> -1]
{{1, 1, 2}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}, {-1, 1, 0}}]

Eigensystem[m/.h -> 0]
{{1, 1, 2}, {-1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, -1, 1}}]

Reduce[(m/.h -> 0) . {x1, x2, x3} == {-3t, t, -2t}, {x1, x2, x3}]
x1 == -3 t && x2 == -3/2 t && x3 == t/2

```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

ii) Se  $h = 0$ :  $f$  è semplice, se  $h \neq 0$ :  $f$  non è semplice.

$$\text{iii) } f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

[27]

```

m1 = {{0, 1, -1}, {3, 1, -1}, {1, 1, 1}};
m2 = {{0, 0, 0}, {9, 0, 0}, {3, 2, 4}};

LinearSolve[m1, m2]
{{3, 0, 0}, {0, 1, 2}, {0, 1, 2}}

MatrixForm[a = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$


Eigensystem[a]
{{0, 3, 3}, {{0, -1, 1}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}}
```

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{ii) Sì.}$$

[28]

```

m = {{a, a, a}, {b, b, b}, {0, 0, 0}};

Eigensystem[m]
{{0, 0, a+b}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {{a/b, 1, 0}}}}
```

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

$A$  è diagonalizzabile se  $a + b \neq 0$ , oppure se  $a = b = 0$ . Nel primo caso una base di autovettori è data da:  $((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (a, b, 0))$ .

[29]

```

i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1}; x = {x1, x2, x3};

Cross[i, x] + Cross[2j, x] - Cross[k, x]
{x2 + 2 x3, -x1 - x3, -2 x1 + x2}

m = {{0, 1, 2}, {-1, 0, -1}, {-2, 1, 0}};

NullSpace[m]
{{-1, -2, 1}}

Eigensystem[m]
{{0, -i sqrt(6), i sqrt(6)},
 {{-1, -2, 1}, {1/5 i (-i + 2 sqrt(6)), -1/5 i (2 i + sqrt(6)), 1},
 {-1/5 i (i + 2 sqrt(6)), 1/5 i (-2 i + sqrt(6)), 1}}}
```

i) La linearità segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\ker f = \mathcal{L}(-i - 2j + k)$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}(j + 2k, i + k)$ .   iii) No.

[30]

```

i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1}; x = {x1, x2, x3};

Cross[(i + j), x] + 2(j.x) i - (k.x) j
{2 x2 + x3, -2 x3, -x1 + x2}

m = {{0, 2, 1}, {0, 0, -2}, {-1, 1, 0}};

NullSpace[m]
{}

Eigensystem[m]
{{1, -1/2 i (-i + sqrt(15)), 1/2 i (i + sqrt(15))}, {-3, -2, 1},
{-3 i - sqrt(15), -4 i, 1}, {-3 i - sqrt(15), 4 i, 1}}

```

i) La linearità segue dalle proprietà del prodotto scalare e vettoriale.

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker f = \{0\}$ ,  $\text{im} f = V_3$ .   iii) No.

[31]

```

a = {{1, -1, 2}, {1, -2, 3}}; b = {{-3, -4, 3, 0}, {-5, -9, 4, -1}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};

Reduce[a.x == b]
x1 == -1 - x9&&x10 == -5 + x6&&x11 == 1 + x7&&x12 == -1 + x8&&
x2 == 6 - x6&&x3 == 1 - x7&&x4 == 2 - x8&&x5 == 2 + x9

```

$$M^{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 1 & -\lambda_2 + 1 & -\lambda_3 + 2 & -\lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 + 2 & \lambda_2 + 5 & \lambda_3 - 1 & \lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

[32]

```

a = {{1, 0}, {-1, 2}, {0, 1}};
b = {{1, 2, -1, 0}, {-1, -8, 11, 0}, {0, -3, 5, 0}};

LinearSolve[a, b]
{{1, 2, -1, 0}, {0, -3, 5, 0}}

```

$$M^{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

[33]

```

x = {{x1, x2}, {x3, x4}};
1/2 {x + Transpose[x]}
{{{x1,  $\frac{\mathbf{x2} + \mathbf{x3}}{2}$ }, { $\frac{\mathbf{x2} + \mathbf{x3}}{2}$ , x4}}}
a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 0, 0, 1}};
NullSpace[a]
{{0, -1, 1, 0}}
Eigensystem[a]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}

```

i) La linearità segue dalle proprietà della matrice trasposta.

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii) } \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{im}f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

[34]

```

a = {{2, 14, -7}, {0, -2, 2}, {0, -6, 5}};
Eigensystem[a]
{{1, 2, 2}, {{-7, 2, 3}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}

```

$$A' = P^{-1}AP, \quad P = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[35]

```

a' = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0}};
b = {{0, 0, 2, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}, {1, 0, 0, 0}};
MatrixForm[b.a'.Inverse[b]
 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

```

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = BA'B^{-1}.$$

[36]

```

a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1}; c = {1, 1, 1}; i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0};

LinearSolve[{a, b, c}, {Cross[i, a] + Cross[j, b], 2 a . b b, {0, 0, 0}}]
{{0, -4, -4}, {1/2, 2, 3}, {-1/2, 2, 1}}

NullSpace[A = Transpose[%]]
{{1, 1, 1}}

A. {1, 1, 0}
{1/2, -2, -1}

A. {1, -1, 0}
{-1/2, -6, -7}

Reduce[A. {x1, x2, x3} == {1, 0, -1}, {x1, x2, x3}]
1 == 0&&x1 == x3&&x2 == x3

Eigensystem[A]
{{-1, 0, 4}, {{1/2, 0, 1}, {1, 1, 1}, {0, 1, 1}}}
    
```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } \text{im} f = \mathcal{L}(-4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}), \ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$\text{iii) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, -\frac{1}{2}\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}), f^{-1}(\mathcal{K}) = \ker f.$$

$$\text{iv) Si; v) } \lambda_1 = 0, \ker f \oplus \mathcal{L}(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = V_3.$$

[37]

```

m1 = {{2, 0, -1, 1}, {1, 2, 0, -1}, {0, -1, 3, 1}, {1, 2, 1, -2}};
m2 = {{2h, -2, -1, -1},
      {h, -2h, 4, 1}, {0, h + 6, 1, -1}, {h, -2h + 2, 5, 2}};

MatrixForm[M = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]]

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$


Reduce[M.{x, y, z, t} == {0, 0, 0, 0}, {x, y, z, t}]
h == -4 && t == 0 && x == 0 && z == -2 y | h == 0 && t == 0 && y == 0 && z == 0 | |
t == 0 && x == 0 && y == 0 && z == 0 && 4 + h != 0

Solve[Det[M] == 0]
{{h -> -4}, {h -> 0}}

MatrixForm[Simplify[Inverse[M]]]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$


b = Eigenvalues[M]
{-1, h,  $\frac{1}{2} (1 - h - \sqrt{17 + 2h + h^2})$ ,  $\frac{1}{2} (1 - h + \sqrt{17 + 2h + h^2})$ }

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {}, {{h -> -1}}, {{}}, {{h -> -1}},
{{h -> 2}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{}}, {{h -> -1 - 4 i}, {h -> -1 + 4 i}},
{{}}, {{h -> 2}}, {{h -> -1 - 4 i}, {h -> -1 + 4 i}}, {{}}}}

Eigensystem[M/.h -> -1]
{{-1, -1, -1, 3},
 {{0, 0, 0, 1}, {0, -1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}}}}

Eigensystem[M/.h -> 2]
{{-3, -1, 2, 2},
 {{0, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 2, 0}, {1, 0, 0, 0}}}}

```

$$i) M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

ii) Se  $h \neq 0, h \neq -4$ :  $\ker f = \{\mathbf{o}\}$ ,  $\text{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$ ;

$$\text{se } h = 0: \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \text{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$\text{se } h = -4: \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right), \text{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

iii) Se  $h \neq 0, h \neq -4$ : esiste  $f^{-1}$ ,  $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

iv)  $f$  è semplice per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .

[38]

```

a = {{1, 1, 1, 1}, {0, 1, -1, 3}, {2, 2, -1, -1}};
b = {{1, 2, -3, 0}, {1, 1, 1, -2}};

LinearSolve[Transpose[a], Transpose[b]]

LinearSolve::"nosol": Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{1, 0, 2}, {1, 1, 2}, {1, -1, -1}, {1, 3, -1}},
  {{1, 1}, {2, 1}, {-3, 1}, {0, -2}}]
    
```

Non esiste  $g$ .

[39]  $A' = P^{-1}AP$ ,  $P \in \mathbb{C}^{3,3}$ ,  $\det P \neq 0$ .

[40] i)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ .    ii)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

iii) Non ne esistono.

[41]

```

c = {{4, 1, -1}, {2, 5, -2}, {1, 1, 2}};

CharacteristicPolynomial[c, x]
45 - 39 x + 11 x^2 - x^3

Eigensystem[c]
{{3, 3, 5}, {{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 2, 1}}}

{}
    
```

i)  $P(\lambda) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45$ .    ii)  $\lambda_1 = 3, m_{\lambda_1} = 2; \lambda_2 = 5, m_{\lambda_2} = 1$ .

iii) Sì;  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

[42]

```

m1 = {{1, 2, -1}, {0, 1, -1}, {1, 2, 0}};
m2 = {{-8, -10, -10}, {-6, -8, -10}, {-5, -7, -6}};

a = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]
{{1, -3, 3}, {3, -5, 3}, {6, -6, 4}}

MatrixForm[a]

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$


NullSpace[a]
{}

a.{-3, 1, 0}
{-6, -14, -24}

Inverse[a].{-3, 1, 0}
{0, -2, -3}

Inverse[a].{0, 0, 1}
 $\left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}$ 

Eigensystem[a]
{{-2, -2, 4}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, 2}}}

```

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{iii) } \ker f = \{\mathbf{o}\}, \quad \text{im} f = \mathcal{T}.$$

$$\text{iv) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right), \quad f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

v) Sì (la molteplicità degli autovalori coincide con la dimensione degli autospazi);

$$\text{vi) } A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

[43]

```

a = {{1, 2, 1}, {0, 1, 3}, {2, 5, 5}};

a. {1, 0, 1}
{2, 3, 7}

a. {-1, 0, 1}
{0, 3, 3}

Reduce[a . {x, y, z} == {1 - m, 0, 1 + m}, {x, y, z}]
1 == 3 m && x == 2 m + 5 z && y == -3 z

```

$$f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2, 3, 7), (0, 1, 1)), \quad f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((5, -3, 1), (1, 0, 0)).$$

$$[44] \quad M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

[45]

```

x = {x1, x2, x3}; a = {1, -1, 1}; b = {1, 0, 1};

Simplify[Cross[a, x] + b.aCross[b, x]]
{-3 x2 - x3, 3 (x1 - x3), x1 + 3 x2}

a = {{0, -3, -1}, {3, 0, -3}, {1, 3, 0}};

NullSpace[a]
{{3, -1, 3}}

a.{-1, 0, 1}
{-1, -6, -1}

a.{1, 1, 0}
{-3, 3, 4}

Reduce[a.x == 1 b, x]
1 == 0 && x1 == x3 && x2 == - $\frac{x3}{3}$ 

p = {{1, 1, 0}, {1, -1, 0}, {0, 1, 2}};

MatrixForm[Inverse[p].a.p]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$


Eigensystem[a]
{{0, -i  $\sqrt{19}$ , i  $\sqrt{19}$ },
 {{3, -1, 3}, { $\frac{1}{10}(-9 - i\sqrt{19})$ , - $\frac{3}{10}i(i + \sqrt{19})$ , 1},
 { $\frac{1}{10}(-9 + i\sqrt{19})$ ,  $\frac{3}{10}i(-i + \sqrt{19})$ , 1}}}]

```

i) La linearità di  $f$  segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii)  $A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

iii)  $\ker f = \mathcal{L}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}(3\mathbf{j} + \mathbf{k}, -\mathbf{i} + \mathbf{k})$ .

iv)  $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}, -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ ,  $f^{-1}(\mathcal{U}) = \ker f$ .

v)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ . vi) No.

[46]

```

a = {{1, 2}, {1, 0}}; b = {{3, 1}, {-1, 1}};

(a.b) . {1, 1}
{4, 4}

Solve[a . {x, y} == b . {x, y}, {x, y}]

Solve :: "svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x -> Y/2}}

Solve[(a.b) . {x, y} == (b.a) . {x, y}, {x, y}]

Solve :: "svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x -> -y}}

```

i)  $(f \circ g)(v_1 + v_2) = 4v_1 + 4v_2$ . ii)  $x = (\lambda, 2\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $y = (t, -t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

$$[47] M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 2)), \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 2), (1, 2, -4)),$$

per esempio:  $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \ker g = \mathcal{L}((0, 0, 1)), \operatorname{img} = \operatorname{im} f.$

[48]

```

a = {{1, 1, 0}, {-1, 1, 0}, {2, -1, -3}};

Eigensystem[a]
{{-3, 1 - i, 1 + i},
 {{0, 0, 1}, {7 - 6 i, -6 - 7 i, 5}, {7 + 6 i, -6 + 7 i, 5}}}

```

i) No. ii) Sì;  $\mathcal{B} = ((0, 0, 1), (7 - 6i, -6 - 7i, 5), (7 + 6i, -6 + 7i, 5)).$

[49]

```

a = {{1, 0, 0}, {-14, 8, 2}, {42, -21, -5}};

Eigensystem[a]
{{1, 1, 2}, {{1, 0, 7}, {1, 2, 0}, {0, -1, 3}}}

```

$$i) M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B}' = ((1, 0, 7), (1, 2, 0), (0, 1, -3)).$$

ii)  $\mathcal{W} = V_{\lambda=1} = \mathcal{L}((1, 0, 7), (1, 2, 0)).$

[50]

```

a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}};

Inverse[a]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}

NullSpace[a]
{}

Eigensystem[a]
{{-1, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
    
```

i) La linearità di  $f$  segue dalle proprietà della matrice trasposta.

ii)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .    iii)  $M(f^{-1}) = M(f)$ .

iv)  $f$  è semplice;  $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

[51]

```

a = {{x1, x2}, {x3, x4}};

MatrixForm[a - 2Transpose[a]]
( -x1      x2 - 2 x3
  -2 x2 + x3  -x4 )

A = {{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, -2, 0}, {0, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, -1}};

A. {1, 0, 0, -1}
{-1, 0, 0, 1}

Reduce[A. {x1, x2, x3, x4} == {t1, t2, t3, -t1}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == -t1 && x2 == 1/3 (-t2 - 2 t3) && x3 == 1/3 (-2 t2 - t3) && x4 == t1

Eigensystem[A]
{{-1, -1, -1, 3},
 {{0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}
    
```

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

i)  $f(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ ,  $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ .

ii)  $f$  è semplice,  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  è riferita alla base:

$$\mathcal{B}' = \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

[52]

```
m = {{1, -1, 1, 1}, {2, 1, 0, 1}, {3, 0, 1, k}};
Reduce[m.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
k == 2&&x2 == -2 x1 - x4&&x3 == -3 x1 - 2 x4 ||
x2 == -2 x1&&x3 == -3 x1&&x4 == 0&&-2 + k != 0
```

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R};$$

se  $k \neq 2$ :  $\text{im} f = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ ,  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 2, 3, 0))$ ;

se  $k = 2$ :  $\text{im} f = \mathcal{L}\left(\left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)$ ,  $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 3), (1, 0, 1, -2))$ .

[53]

```
a = {{1, 0, 2}, {-1, 2, 2}, {1, -1, -1}};
Eigensystem[a]
{{-1, 1, 2}, {{-1, -1, 1}, {1, 1, 0}, {2, -1, 1}}}
```

i) Sì. ii)  $h = -1$ .

[54]

```
a = {{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, -1}};
b = {{2, -1, -3}, {0, 2, 2}, {1, -1, -2}, {1, 3, 2}};
m = Transpose[LinearSolve[a, b]]
{{2, -1, 0, 1}, {2, 3, 3, -1}, {0, 4, 3, -2}}
NullSpace[m]
{{-1, 2, 0, 4}, {-3, -6, 8, 0}}
Solve[m.{x1, x2, x3, x4} == {-2t, -t, t}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve :: "svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -7t/8 - 3x3/8 - x4/4, x2 -> t/4 - 3x3/4 + x4/2}}
```

i) Esiste una sola  $f$  perché i vettori:  $(1, 0, -1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, -1)$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^4$ .

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ dove } \mathcal{B} \text{ è la base canonica di } \mathbb{R}^4 \text{ e } \mathcal{B}' \text{ è la base canonica di } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}).$$

ii)  $\ker f = \mathcal{L}((3, 6, -8, 0), (1, -2, 0, -4))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{array}\right)\right)$ .

iii)  $f^{-1}(\mathcal{W}) = \ker f \oplus \mathcal{L}((-7, 2, 0, 0))$ .

[55]

```

x = {x1, x2, x3}; u = {1, -1, 1};

(u . x) u - 3x
{-2 x1 - x2 + x3, -x1 - 2 x2 - x3, x1 - x2 - 2 x3}

m = {{-2, -1, 1}, {-1, -2, -1}, {1, -1, -2}};

NullSpace[m]
{{1, -1, 1}}

Eigensystem[m]
{{-3, -3, 0}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}
    
```

i) La linearità di  $f$  segue dalle proprietà del prodotto scalare.

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

ii)  $\ker f = \mathcal{L}(i - j + k)$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(2i + j - k, i + 2j + k)$ .

$$\text{iii) } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[56]

```

a = {{1, h}, {1, -1}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};

b = a . x - x . a
{{-x2 + h x3, -h x1 + 2 x2 + h x4}, {x1 - 2 x3 - x4, x2 - h x3}}

Reduce[b == {{0, 0}, {0, 0}}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 2 x3 + x4 && x2 == h x3

m = {{0, -1, h, 0}, {-h, 2, 0, h}, {1, 0, -2, -1}, {0, 1, -h, 0}};

c = Eigenvalues[m]
{0, 0, -2  $\sqrt{1+\mathbf{h}}$ , 2  $\sqrt{1+\mathbf{h}}$ }

Flatten[Table[c[[i]] == c[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}}, {{{}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{{}}, {{{}},
  {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{{}},
  {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{h -> -1}}, {{{}}}

Eigensystem[m /. h -> -1]
{{0, 0, 0, 0}, {{1, 0, 0, 1}, {2, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[m /. h -> 3]
{{-4, 0, 0, 4},
  {{-1, -1, 1, 1}, {1, 0, 0, 1}, {2, 3, 1, 0}, {-3, 9, -1, 3}}}
    
```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & h & 0 \\ -h & 2 & 0 & h \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -h & 0 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad h \in \mathbb{R}. \quad \text{ii) } h > -1.$$

$$\text{iii) } \mathcal{B} = \left(\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)\right).$$

$$\text{iv) } \text{im} f \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

[57]

```
A = {{1, 0, -1, 2, 3}, {2, -1, 0, 1, 2}, {-3, 1, 1, -3, -5}};
NullSpace[A]
{{-3, -4, 0, 0, 1}, {-2, -3, 0, 1, 0}, {1, 2, 1, 0, 0}}
m = {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-2, h, h^2}};
Solve[Det[m] == 0]
{{h -> -2}, {h -> 1}}
```

i)  $\ker f = \mathcal{L}((-3, -4, 0, 0, 1), (-2, -3, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 0, 0))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((0, -1, 1), (-1, 0, 1))$ .

ii)  $h = -2$ ,  $h = 1$ . iii)  $f(\mathcal{W}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ .

[58]

```
a = {1, -1, 0}; b = {0, 1, 1}; x = {x, y, z};
Simplify[x - ((x.Cross[a, b]) / (Cross[a, b].Cross[a, b])) Cross[a, b]]
{1/3 (2x - y + z), 1/3 (-x + 2y + z), 1/3 (x + y + 2z)}
m = {{2/3, -1/3, 1/3}, {-1/3, 2/3, 1/3}, {1/3, 1/3, 2/3}};
NullSpace[m]
{{-1, -1, 1}}
Eigensystem[m]
{{0, 1, 1}, {-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}
```

i)  $f$  associa ad ogni vettore  $\mathbf{x} \in V_3$  la sua proiezione ortogonale sul piano vettoriale individuato da  $\mathbf{a}$  e da  $\mathbf{b}$ .

$$\text{ii) } M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{iii) } M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv)  $\ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ .

$f$  è semplice,  $\mathcal{B} = (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$ .

I risultati conseguiti nel punto iv) si possono ottenere tenendo conto del significato geometrico di  $f$ ; infatti gli autospazi di  $f$  sono, rispettivamente, generati dai vettori paralleli e ortogonali a  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ .

[59]

```

B = LinearSolve[{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}},
  {{1, 0, h}, {0, 2, 1}, {1 + h, 0, 1 + h}}];
A = Transpose[B]
{{1, 0, h}, {0, 2, 0}, {h, 1, 1}}

b = Eigenvalues[A]
{2, 1 - h, 1 + h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h -> -1}}, {{h -> 1}}, {{h -> -1}},
  {{{}}, {{h -> 0}}, {{h -> 1}}, {{h -> 0}}, {{{}}}

Eigensystem[A/.h -> -1]
{{0, 2, 2}, {{1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

Eigensystem[A/.h -> 1]
{{0, 2, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

Eigensystem[A/.h -> 0]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 1}}}

(A/.h -> 1) . {1, 0, -1}
{0, 0, 0}

(A/.h -> 1) . {0, 1, 1}
{1, 2, 2}

```

i)  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R};$

$f$  è semplice per  $h \notin \{-1, 1\}$ ; ii)  $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$ .

[60]

```

X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{1, 0}, {h, -1}};

Simplify[Inverse[B].X.B]
{{x1 + h x2, -x2}, {h^2 x2 - x3 + h (x1 - x4), -h x2 + x4}}

A = {{1, h, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {h, h^2, -1, -h}, {0, -h, 0, 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{}

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 1},
  {{-1, 2/h, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 1}, {2/h, 0, 1, 0}}}

Eigensystem[A/.h -> 0]
{{-1, -1, 1, 1}, {{0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[A/.h -> 1]
{{-1, -1, 1, 1},
  {{-1, 2, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 1}, {2, 0, 1, 0}}}

```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ h & h^2 & -1 & -h \\ 0 & -h & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R};$$

$f$  è un isomorfismo per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .

ii)  $f$  è semplice per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .

$$\text{iii) } \mathcal{B} = \left( \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

[61]

```

a = {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {1, -1, 0}};
b = {{0, 0, 0}, {1, 2, -3}, {-1, 1, 0}};

LinearSolve[a, b]
{{0, 1, -1}, {1, 0, -1}, {1, 1, -2}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$


Eigensystem[A]
{{-1, -1, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}

```

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

ii)  $f$  è semplice,  $\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ .

[62]

```

X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{-1, 2}, {h, -6}};

X.B
{{-x1 + h x2, 2 x1 - 6 x2}, {-x3 + h x4, 2 x3 - 6 x4}}

A = {{-1, h, 0, 0}, {2, -6, 0, 0}, {0, 0, -1, h}, {0, 0, 2, -6}};

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}]
h == 3 && x1 == 3 x2 && x3 == 3 x4 |
x1 == 0 && x2 == 0 && x3 == 0 && x4 == 0 && -3 + h != 0

(A/.h -> 3) . {0, 1, -1, 0}
{3, -6, 1, -2}

Eigensystem[A/.h -> 3]
{{-7, -7, 0, 0},
{{0, 0, -1, 2}, {-1, 2, 0, 0}, {0, 0, 3, 1}, {3, 1, 0, 0}}}

```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} -1 & h & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R};$$

se  $h \neq 3$ :  $f$  è un isomorfismo,

se  $h = 3$ :  $\ker f = \mathcal{L}\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ .

ii)  $h = 3$ :  $f$  è semplice.    iii)  $f(W) = \mathcal{L}\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ .

[63]

```
A = {{2, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}};
B = {{1, 0, 0}, {1, 2, 0}, {-1, -1, 1}};

Eigensystem[A]
{{1, 1, 2}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}}

Eigensystem[B]
{{1, 1, 2}, {0, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {0, -1, 1}}
```

$$\text{i) } A' = C^{-1}AC, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B' = D^{-1}BD, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii)  $A$  e  $B$  sono associate allo stesso endomorfismo perché  $A' = B'$ , quindi:

$$B = (CD^{-1})^{-1}A(CD^{-1}).$$

[64]

```
a = {{2, 1, 0}, {1, 0, -1}, {1, 0, 1}};
b = {{h, 2, 0}, {0, 1, -h}, {0, 1, h}};

LinearSolve[a, b]
{{0, 1, 0}, {h, 0, 0}, {0, 0, h}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$


Eigensystem[A]
{{{-\sqrt{h}, \sqrt{h}, h}, {{-\sqrt{h}, 1, 0}, {\sqrt{h}, 1, 0}, {0, 0, 1}}}}
```

i) Esiste una sola  $f$  perché i vettori  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(1, 0, 1)$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}; \quad f \text{ è semplice se } h > 0.$$

[65]

```

u1 = {1, 3, 2}; u2 = {-1, 1, 1}; u3 = {1, 0, 2}; v1 = {1, 0, 1, 0};
v2 = {-1, 1, 0, 2}; v3 = {1, 2, 1, 0}; v4 = {2, 0, 1, 2};

LinearSolve[{u1, u2, u3}, {v1 - v3, v2 + v4, v2 - v4}]
{{-1, -1, -7/9, -8/3}, {1, -1, 1/3, 0}, {-1, 1, -1/9, 4/3}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]
  -1   1   -1
  (-1  -1   1
   7    1   -1
  -7/9  1/3 -1/9
  -8/3  0    4/3)

NullSpace[A]
{}

```

i)  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}; \quad f \text{ è un monomorfismo.}$$

iii)  $\text{im} f \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}((3, -5, -1, 0))$ .

$$[66] \text{ i) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{ii) } \ker f = \{\mathbf{0}\}, \quad \text{im} f = \mathbb{R}^{2,2};$$

iii)  $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ,  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ; iv)  $\mathcal{S}, \mathcal{A}$ ; v) sì perché  $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{R}^{2,2}$ .

[67]

```

a = {{0, 1, 2}, {2, 0, -1}, {1, 3, -1}};
b = {{8, -2 + 2k, 16}, {-1, -2 - k, -2}, {4, -7 - k, 8}};

LinearSolve[a, b]
{{1, -1, 2}, {2, -2, 4}, {3, k, 6}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]
  1   2   3
 (-1  -2   k
  2    4   6)

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}]
x1 == -2 x2 && x3 == 0 | k == -3 && x1 == -2 x2 - 3 x3 && x3 != 0

Eigensystem[A/.k -> -3]
{{0, 0, 5}, {-3, 0, 1}, {-2, 1, 0}, {1, -1, 2}}

```

i)  $f$  è lineare ( $\forall k \in \mathbb{R}$ ) perché  $((0, 1, 2), (2, 0, -1), (1, 3, -1))$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{ii) } A = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & k \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R};$$

se  $k \neq -3$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, -1, 2), (3, k, 6))$ ;

se  $k = -3$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, -1, 2))$ .

$$\text{iii) } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (-3, 0, 1), (-1, 1, -2)).$$

[68]

```
A = {{0, -2, -2}, {2, 4, 2}, {-2, -2, 0}};
NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}
A.{-1, 0, 1}
{-2, 0, 2}
A.{-1, 1, 0}
{-2, 2, 0}
Reduce[A.{{x1, x2, x3}} == {-3t1, t2, t1}, {x1, x2, x3}]
t2 == 2 t1&&x1 == 1/2 (-t1 - 2 x2)&&x3 == 1/2 (3 t1 - 2 x2)
Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

$$\text{i) Base di } \mathcal{S}: \mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{base di } \mathcal{T}: \mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{ii) } A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\ker f = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right), \quad \operatorname{im} f = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{iii) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{iv) } A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[69]

```
A = {{1, 1, 0}, {2, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 1, -1}};
Reduce[A.{{x1, x2, x3}} == {t1, -t1, t2, t3}, {x1, x2, x3}]
t2 == -2 t1&&t3 == 3 t1&&x1 == -2 t1 - x3&&x2 == 3 t1 + x3
```

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-2, 3, 0), (-1, 1, 1)).$$

[70]

```

A = {{-2h, -1, h}, {1, 0, 1}, {0, 0, h}};
b = Eigenvalues[A]
{h, -h - sqrt(-1+h^2), -h + sqrt(-1+h^2)}
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];
Map[Solve, %]
{{{ {} }, {{h -> -i/sqrt[3]}}, {{h -> i/sqrt[3]}}, {{h -> -i/sqrt[3]}}, {{ {} },
  {{h -> -1}, {h -> 1}}, {{h -> i/sqrt[3]}}, {{h -> -1}, {h -> 1}}, {{ {} }}}
Eigensystem[A/.h -> 1]
{{-1, -1, 1}, {{-1, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 1, 1}}}
Eigensystem[A/.h -> -1]
{{-1, 1, 1}, {{0, -1, 1}, {1, 1, 0}, {0, 0, 0}}}
Eigensystem[A/.h -> I/Sqrt[3]]
{{{i/sqrt[3], i/sqrt[3], -i sqrt[3]}, {{i/sqrt[3], 1, 0}, {0, 0, 0}, {-i sqrt[3], 1, 0}}}
Eigensystem[A/.h -> -I/Sqrt[3]]
{{{ -i/sqrt[3], -i/sqrt[3], i sqrt[3]}, {{-i/sqrt[3], 1, 0}, {0, 0, 0}, {i sqrt[3], 1, 0}}}

```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} -2h & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}; \quad f \text{ è semplice se } |h| > 1.$$

$$\text{ii) } f \text{ è semplice se } h \neq \pm 1, \text{ e } h \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

[71]

```

u = {1, 0, -1, 1}; v = {0, 0, 2, -1}; w = {2, 0, 4, -1};
RowReduce[{v, w, u}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 0, 1, -1/2}, {0, 0, 0, 0}}
RowReduce[{u, v, w}]
{{1, 0, 0, 1/2}, {0, 0, 1, -1/2}, {0, 0, 0, 0}}
A = {{1, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-1, -1, 4, -2}, {1, 1, -2, 1}};
NullSpace[A]
{{0, 0, 1, 2}, {-1, 1, 0, 0}}

```

$$\text{i) } \mathbf{u} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

$$\text{ii) } \text{No perché } \mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \supseteq V_{\lambda=2}, \text{ quindi } \mathbf{w} \text{ deve essere autovettore di autovalore 2.}$$

$$\text{iii) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \dim \ker f = 2.$$

[72]

```
A = {{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 1}, {1, 2, 2}};
NullSpace[A]
{{0, -1, 1}}
A.{-2, 1, 0}
{-1, 1, -3, 0}
Reduce[A.{y1, y2, y3} == {-2x2, x2, x3, x4}, {y1, y2, y3}]
x3 == -5 x2&&x4 == -x2&&y1 == -3 x2&&y2 == x2 - y3
```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\ker f = \mathcal{L}((0, -1, 1)), \quad \text{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 2, 1), (1, 1, 1, 2)).$$

$$\text{ii) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1, 1, 1, 2), (-1, 1, -3, 0)).$$

$$\text{iii) } f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((0, -1, 1), (-3, 1, 0)).$$

[73]

```
A = {{-1, 1, 6}, {0, -1, 0}, {0, 0, 2}};
MatrixForm[B = Inverse[A]]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A.{-1, 1, 0}
{2, -1, 0}
B.{-1, 1, 0}
{0, -1, 0}
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 2}, {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {2, 0, 1}}}
```

$$\text{i) Equazioni di } f^{-1}: \begin{cases} x = -x' - y' + 3z' \\ y = -y' \\ z = \frac{1}{2}z'. \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-2, 1, 0), (6, 0, 2)), \quad f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((0, 1, 0), (3, 0, \frac{1}{2})).$$

iii)  $f$  non è semplice.

[74]

```

A = {{a, 1}, {1, a}, {1, -1}};
Reduce[A.{x1, x2} == {0, 0, 0}, {x1, x2}]
a == -1&&x1 == x2 | x1 == 0&&x2 == 0&&1 + a != 0
NullSpace[A/.a -> -1]
{{1, 1}}

```

i)  $M(f) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad \text{ii) } a \neq -1.$

iii)  $\ker f = \mathcal{L}((1, 1)), \quad \text{im} f = \mathcal{L}((-1, 1, 1)).$

[75]

```

A = {{0, 2 + I, 0}, {2 - I, 0, 1}, {0, 1, 0}};
Eigensystem[A]
{{0, -sqrt(6), sqrt(6)}, {-2 - i, 0, 5}, {2 + i, -sqrt(6), 1}, {2 + i, sqrt(6), 1}}

```

$A$  è diagonalizzabile: autovalori:  $\lambda_1 = -\sqrt{6}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{6}$ ;

base di autovettori:  $\mathcal{B} = ((2 + i, -\sqrt{6}, 1), (-2 - i, 0, 5), (2 + i, \sqrt{6}, 1)).$

[76]

```

A = {{3, 2, 1}, {-3, -2, h + 1}, {6, 4, 2}};
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == -2&&x1 == 1/3 (-2 x2 - x3) | x1 == -2 x2 / 3 &&x3 == 0 &&2 + h != 0
Eigenvalues[A]
{0, 1/2 (3 - sqrt(41 + 16 h)), 1/2 (3 + sqrt(41 + 16 h))}
Solve[%[[3]] == 3]
{{h -> -2}}
Eigensystem[A/.h -> -2]
{{0, 0, 3}, {-1, 0, 3}, {-2, 3, 0}, {1, -1, 2}}

```

i) Se  $h = -2$ :  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 0, 3), (-2, 3, 0)), \quad \text{im} f = \mathcal{L}((1, -1, 2)),$

se  $h \neq -2$ :  $\ker f = \mathcal{L}((2, -3, 0)), \quad \text{im} f = \mathcal{L}((1, -1, 2), (1, h + 1, 2)). \quad \text{ii) } h = -2.$

iii)  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

[77]

```
A = {{0, h, h}, {1, h^2 - h, 1}, {h - 1, 0, h - 1}};
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == 0 && x1 == -x3 || h == 0 && x1 == x2 && x3 == -x2 ||
h == 1 && x1 == x2 && x3 == -x2 ||
x1 == 0 && x2 == 0 && x3 == 0 && -1 + h != 0 && h != 0
Eigensystem[A/.h -> 1]
{{-1, 0, 1}, {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 0}}}
```

i)  $h = 0$ ,  $\ker f = \mathcal{L}((-1, 0, 1), (0, 1, 0))$ .

ii)  $\lambda_1 = -1$ ,  $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 1, 0))$ ;  $\lambda_2 = 0$ ,  $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1, -1, 1))$ ;  $\lambda_3 = 1$ ,  $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, 1, 0))$ .

iii)  $f$  è semplice.

[78]

```
A = {{0, -1, -1}, {-1, 0, 1}, {1, -1, -2}};
NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}
A.{1, 2, 0}
{-2, -1, -1}
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {a, 2a, b}, {x1, x2, x3}]
b == -a && x1 == -2a + x3 && x2 == -a - x3
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 0}, {{1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}
```

i)  $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ;

$\ker f = \mathcal{L}((1, -1, 1))$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}((0, -1, 1), (1, 0, 1))$ .

ii)  $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2, 1, 1), (-1, 1, -2))$ ;  $f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1, -1, 1), (2, 1, 0))$ .

iii)  $f$  è semplice,  $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ .

[79]

```
a = {{0, 1, -1}, {1, -1, 1}, {-1, -1, 0}};
b = {{0, 1, -1}, {0, 0, 0}, {1, 1, 0}};
LinearSolve[a, b]
{{0, 1, -1}, {-1, -2, 1}, {-1, -3, 2}}
MatrixForm[A = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}
Eigensystem[A]
{{-1, 0, 1}, {{1, 1, 0}, {1, -1, 1}, {0, -1, 1}}}
```

i)  $f$  è un'applicazione lineare perché è definita mediante l'immagine dei vettori di una base di  $\mathbb{R}^3$ , inoltre, dalla definizione, è chiaro che ammette tre autovalori distinti:  $(-1, 0, 1)$ , quindi è semplice.

$$\text{ii) } M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii) } \ker f = \mathcal{L}((1, -1, 1)), \quad \text{im} f = \mathcal{L}((0, 1, -1), (-1, -2, 1)).$$

[80]

```
A = {{-2, -9, 3}, {1, 4, -1}, {1, 3, 0}};
```

```
Nullspace[A]
```

```
{{-3, 1, 1}}
```

```
A.{-2, 1, 0}
```

```
{-5, 2, 1}
```

```
A.{0, -2, 1}
```

```
{21, -9, -6}
```

```
Eigensystem[A]
```

```
{{0, 1, 1}, {{-3, 1, 1}, {1, 0, 1}, {-3, 1, 0}}}
```

$$\text{ii) } M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\ker f = \mathcal{L}(-3 + x + x^2), \quad \text{im} f = \mathcal{L}(-2 + x + x^2, 3 - x).$$

$$\text{iii) } \mathcal{H} = \mathcal{L}(-2 + x, -2x + x^2), \quad f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(-5 + 2x + x^2, 7 - 3x - 2x^2).$$

$$\text{iv) } \lambda_1 = 0, \quad m_{\lambda_1} = 1, \quad V_{\lambda_1} = \ker f; \quad \lambda_2 = 1, \quad m_{\lambda_2} = 2, \quad V_{\lambda_2} = \mathcal{L}(1 + x^2, -3 + x).$$

$$\text{v) } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = (-3 + x + x^2, 1 + x^2, -3 + x).$$

[81]

```
A = {{2, -1, 0, -1}, {0, -3, -2, 1}, {4, 7, 6, -5}, {3, 0, 1, -2}};
```

```
Nullspace[A]
```

```
{{2, 1, 0, 3}, {-1, -2, 3, 0}}
```

```
Eigensystem[A]
```

```
{{0, 0, 0, 3},
```

```
 {{2, 1, 0, 3}, {-1, -2, 3, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, -5, 17, 4}}}
```

```
Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, a, b, c}, {x1, x2, x3, x4}]
```

```
b == -3 a && 2 c == -a && x1 == 1/6 (-a - 2 x3 + 4 x4) && x2 == 1/3 (-a - 2 x3 + x4)
```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{array}\right)\right), \operatorname{im} f = \mathcal{L}(2 + 4x^2 + 3x^3, -1 - 3x + 7x^2).$$

ii) No; iii)  $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right)\right).$

[82]

```

a = {{1, 1, 0, -1}, {2, 0, 1, 0},
      {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, -1}, {-2, 0, 0, 1}};

b = {{0, 1, 1, -1}, {h, 3, -h, 0}, {0, 0, 0, 1},
      {a1, a2, -4a4, a4}, {0, 0, 0, 0}}; X = {{x1, x2, x3, x4},
      {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}, {x13, x14, x15, x16}};

Reduce[a.X == b]
a1 == 0 && a2 == 1 && a4 == -1/4 && 1 == -3/2 &&
x1 == 0 && x10 == 3 && x11 == -h && x12 == 3/2 && x13 == 0 &&
x14 == 0 && x15 == 0 && x16 == -3/2 && x2 == 0 && x3 == 0 &&
x4 == -3/4 && x5 == 0 && x6 == 1 && x7 == 1 && x8 == -7/4 && x9 == h

LinearSolve[a, b /. {a1 -> 0, a2 -> 1, a4 -> -1/4, 1 -> -3/2}]
{{0, 0, 0, -3/4}, {0, 1, 1, -7/4}, {h, 3, -h, 3/2}, {0, 0, 0, -3/2}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]
( 0 0 h 0
  0 1 3 0
  0 1 -h 0
 -3/4 -7/4 3/2 -3/2 )

Solve[Det[A] == 0]
{{}}

B = Eigenvalues[A]
{-3/2, 0, 1/2 (1 - h - sqrt(13 + 2h + h^2)), 1/2 (1 - h + sqrt(13 + 2h + h^2))}

Flatten[Table[B[[i]] == B[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {}, {{h -> 3/10}}, {}, {}, {}, {{h -> -3}}, {}, {{h -> 3/10}},
 {{h -> -3}}, {}, {{h -> -1 - 2 i sqrt(3)}, {h -> -1 + 2 i sqrt(3)}},
 {}, {}, {{h -> -1 - 2 i sqrt(3)}, {h -> -1 + 2 i sqrt(3)}}, {}},
 {{{}}, {{h -> 1}}, {{h -> 1}}, {{h -> 1}},
 {{}}, {{h -> 1}}, {{h -> 1}}, {{h -> 1}}, {}},

Eigensystem[A/.h -> 3/10]
{{-3/2, -3/2, 0, 11/5},
 {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}, {-2, 0, 0, 1}, {-111/655, -407/131, -814/655, 1}}},

Eigensystem[A/.h -> -3]
{{-3/2, 0, 0, 4},
 {{0, 0, 0, 1}, {-2, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}, {-66/5, 88/5, 88/5, 1}}},

Eigensystem[A/.h -> 1]
{{-2, -3/2, 0, 2}, {{2/29, 4/29, -4/29, 1},
 {0, 0, 0, 1}, {-2, 0, 0, 1}, {-14/33, -28/11, -28/33, 1}}},

```

$$\text{i) } M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

ii)  $f$  è un isomorfismo per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .

iii)  $f$  è semplice se  $h \notin \left\{-3, \frac{3}{10}\right\}$ .

[83]

```
A = {{1, 0}, {1, 1}, {1, -2}};
```

```
LinearSolve[A, 3IdentityMatrix[3]]
```

```
LinearSolve::"nosol": Linear equation encountered which has no solution.
```

```
LinearSolve[{{1, 0}, {1, 1}, {1, -2}}, {{3, 0, 0}, {0, 3, 0}, {0, 0, 3}}]
```

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{iii) Non esiste } g.$$

[84]

```
A = {{1, 1, 1}, {2, -3, 0}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
```

```
Reduce[A.X == 4IdentityMatrix[2]]
```

```
x1 == \frac{3x3}{2} && x2 == \frac{1}{2}(4 + 3x4) && x5 == \frac{1}{2}(8 - 5x3) && x6 == \frac{1}{2}(-4 - 5x4)
```

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii) } M(g) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_3 & 2 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 & x_4 \\ 4 - \frac{5}{2}x_3 & -2 - \frac{5}{2}x_4 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

[85]

```

A = {{1, 1 + I, -I}, {-2 - I, 0, 0}, {2, 0, 1}};

MatrixForm[B = A + Transpose[Conjugate[A]]]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 + 2i & 2 - i \\ -1 - 2i & 0 & 0 \\ 2 + i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$


Eigenvalues[B]

$$\left\{ \frac{4}{3} + \frac{34}{3(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3}} + \frac{1}{3}(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3}, \right.$$


$$\frac{4}{3} - \frac{17(1 + i\sqrt{3})}{3(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3}} - \frac{1}{6}(1 - i\sqrt{3})(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3},$$


$$\left. \frac{4}{3} - \frac{17(1 - i\sqrt{3})}{3(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3}} - \frac{1}{6}(1 + i\sqrt{3})(37 + 3i\sqrt{4215})^{1/3} \right\}$$


```

Si verifica che  $B$  è una matrice hermitiana, quindi diagonalizzabile.

[86]

```

a = {{2, 3, -4}, {1, -2, 3}, {5, -4, 1}};
b = {{2, -4, 3k}, {1, 3, -2k}, {5, 1, -4k}};

LinearSolve[a, b]
{{1, 0, 0}, {0, 0, k}, {0, 1, 0}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$


Reduce[A.{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
k == 0 && x == 0 && z == 0 | x == 0 && y == 0 && z == 0

Inverse[A]
{{1, 0, 0}, {0, 0, 1/k}, {0, 1, 0}}

Reduce[A.{x, y, z} == {6t, -5t, t}, {x, y, z}]
k == 0 && t == 0 && x == 0 && z == 0 | x == 6t && y == t/k && z == -5t && k != 0

LinearSolve[A, 3IdentityMatrix[3]]
{{3, 0, 0}, {0, 0, 3/k}, {0, 3, 0}}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$


Eigensystem[A]
{{1, -sqrt(k), sqrt(k)}, {1, 0, 0}, {0, -1/sqrt(k), 1}, {0, 1/sqrt(k), 1}}

Eigensystem[A/.k -> 0]
{{0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}}

```

i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$

ii) Se  $k = 0$ :  $\ker f = \mathcal{L}(x)$ ,  $\text{im} f = \mathcal{L}(1, x)$ ;

se  $k \neq 0$ :  $\ker f = \{0\}$ ,  $\text{im} f = \mathbb{R}_2[x]$ .

$$\text{iii) } k \neq 0: A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iv) } \mathcal{H} = \mathcal{L}(x, x^2), f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(x, kx^2);$$

$$\text{se } k = 0: \dim f(\mathcal{H}) = 1, \text{ se } k \neq 0: \dim f(\mathcal{H}) = 2;$$

$$\text{se } k = 0: f^{-1}(\mathcal{K}) = \ker f, \text{ se } k \neq 0: f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}\left(6 + \frac{1}{k}x - 5x^2\right).$$

$$\text{v) Esiste } g \text{ solo se } k \neq 0: M(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{vi) } f \text{ è semplice solo se } k \neq 0, A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix},$$

$$\text{base di autovettori: } \left(1, -\frac{1}{\sqrt{k}}x + x^2, \frac{1}{\sqrt{k}}x + x^2\right).$$

[87]

```
a = {{3, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 1}, {-2, 0, -2, 1}, {4, -2, 1, 0}};
b = {{4, 12, 3, 2}, {2, 6, 2, -1}, {-5, -15, -5, 0}, {8, 24, 0, 3}};
```

```
LinearSolve[a, b]
```

```
{{1, 3, 0, 1}, {-1, -3, 1, 0}, {2, 6, 2, -1}, {1, 3, -1, 0}}
```

```
MatrixForm[m = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
NullSpace[m]
```

```
{{0, 1, 0, 1}}
```

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ker f = \mathcal{L}(x + x^3), \text{ im } f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

[88]

```

A = {{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 3, 0, 0},
      {0, 0, 0, 0, 4, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 5}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}};

Eigensystem[A]
{{0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}}
    
```

i) La linearità di  $d$  segue dalle proprietà di derivazione.

$$\text{ii) } M(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii)  $\lambda_1 = 0$ ,  $m_{\lambda_1} = 6$ ,  $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}(1)$ ; quindi  $d$  non è semplice.

[89]

```

a' = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, -1}};

p = {{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

a = p.a'.Inverse[p]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-2, 2, -1, 0}, {0, 0, 0, -1}}

NullSpace[a]
{}

Eigensystem[a]
{{-1, -1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {-1, 0, 1, 0}, {1, 1, 0, 0}}}
    
```

i)  $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(x^2, x^3)$ ,  $C = (1 + x, x + x^2, x^2, x^3)$ .

$$\text{iii) } A' = M^{C,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = M^{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iv)  $\ker f = \{0\}$ ,  $\text{im} f = \mathbb{R}_3[x]$ .    iv)  $f(\mathcal{W}_1) = f^{-1}(\mathcal{W}_1) = \mathcal{W}_1$ .    vi) Sì.

[90]

```

A = {{2, 0, 0}, {-12, 8, 12}, {8, -4, -6}};

NullSpace[A]
{0, -3, 2}

A.{-3, 1, 0}
{-6, 44, -28}

A.{0, -3, 1}
{0, -12, 6}

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {-3a, a - 3b, b}, {x1, x2, x3}]
7 a == b&&x1 == - $\frac{3b}{14}$ &&x2 ==  $\frac{1}{28}$  (-19 b - 42 x3)

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {0, -3, 2}, {1, 0, 1}, {1, 2, 0}}

```

i)  $\ker f = \mathcal{L}(-3x + 2x^2)$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(1 - 6x + 4x^2, 2x - x^2)$ .

ii)  $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(-3 + 22x - 14x^2, -2x + x^2)$ ,  $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(-6 - 19x, -3x + 2x^2)$ .

iii) Sì,  $\mathcal{B} = (-3x + 2x^2, 1 + x^2, 1 + 2x)$ .

[91]

```

A = {{1, 0, 3}, {0, 3, -6}, {-1, 0, -3}, {2, 1, h}};

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == 4&&x1 == -3 x3&&x2 == 2 x3 | |x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&- 4 + h ≠ 0

a = A/.h → 4;

a.{1, 0, -3}
{-8, 18, 8, -10}

a.{0, 1, -4}
{-12, 27, 12, -15}

Reduce[a.{x1, x2, x3} == {0, 1, m, n}, {x1, x2, x3}]
1 == 3 n&&m == 0&&x1 == -3 x3&&x2 == n + 2 x3

```

i) Se  $h = 4$ :  $\ker f = \mathcal{L}(-3 + 2x + x^3)$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(1 - x^2 + 2x^3, 3x + x^3)$ ;

se  $h \neq 4$ :  $\ker f = \{0\}$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(1 - x^2 + 2x^3, 3x + x^3, 3 - 6x - 3x^2 + hx^3)$ .

ii)  $f(\mathcal{W}_1) = \mathcal{L}(-4 + 9x + 4x^2 - 5x^3)$ ,  $f(\mathcal{W}_2) = \mathcal{L}(-3 + 2x + x^2, x)$ .

[92]

```

A = {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, 1}};
NullSpace[A]
{}
A.{-2, 1, 0}
{1, -2, -1, -1}
A.{0, -2, 1}
{-1, 1, -2, -1}
Reduce[A.{x1, x2, x3} == {-3a, a - 3b, b - 3c, c}, {x1, x2, x3}]
2 b == -2 a - 5 c &&x1 == 3 a + c &&x2 ==  $\frac{1}{2} (-8 a - 13 c)$  &&x3 ==  $\frac{1}{2} (2 a + 13 c)$ 
    
```

i)  $\ker f = \mathbf{o}$ ,  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(x + x^2 + x^3, 1 + x^2 + x^3, 1 + x + x^3)$ .

ii)  $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(1 - 2x - x^2 - x^3, -1 + x - 2x^2 - x^3)$ ,  $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(3 - 4x + x^2, 2 - 13x + 13x^2)$ .

[93]

```

A = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
NullSpace[A]
{{0, -1, 1, 0}}
Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
    
```

i)  $\mathcal{B} = \left( \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \right)$ ,  $\mathcal{B}' = (1, x, x^2, x^3)$ .

ii)  $A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

iii)  $\ker f = \mathcal{L}((0, -1, 1, 0))$ ;  $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

iv) Sì,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

[94] i)

```

A = {{2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {-1, 0, 3}};
B = {{1, 0, 0}, {-2, 3, 0}, {-2, 0, 3}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{2, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}}
Eigensystem[B]
{{1, 3, 3}, {{1, 1, 1}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}}}
    
```

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

ii)

```

A = {{3, -2, -2}, {0, 2, 0}, {0, -1, 1}};
B = {{-2, 1, 1}, {0, 0, 0}, {0, -1, -1}};

A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {1, 0, 1}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}

Eigensystem[B]
{{-2, -1, 0}, {1, 0, 0}, {1, 0, 1}, {0, -1, 1}}

```

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 0)).$$

iii)

```

A = {{-66, 190, 68}, {-4, 13, 4}, {-53, 148, 55}};
B = {{-30, 96, 32}, {-2, 8, 2}, {-25, 75, 27}};

A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {32, 2, 25}, {14, 1, 11}, {1, 0, 1}}

Eigensystem[B]
{{1, 2, 2}, {32, 2, 25}, {1, 0, 1}, {3, 1, 0}}

B . {14, 1, 11}
{28, 2, 22}

```

$$\mathcal{B} = ((32, 2, 25), (14, 1, 11), (-1, 0, -1)).$$

iv)

```

A = {{1, 0, 2, 0}, {-24, 1, 48, 6}, {0, 0, 2, 0}, {8, 0, -16, -1}};
B = {{-2, 0, 8, 0}, {-12, 3, 24, 3}, {0, 0, 2, 0}, {-16, 0, 32, 2}};

A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 1, 2}, {0, -3, 0, 1}, {1, 0, 0, 4}, {0, 1, 0, 0}, {2, 0, 1, 0}}

Eigensystem[B]
{{-2, 2, 2, 3}, {1, 0, 0, 4}, {0, -3, 0, 1}, {2, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}}

```

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 4), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1)).$$

v)

```

A = {{16, -16, 4, 16}, {0, 0, 0, 0}, {-48, 48, -12, -48}, {0, 0, 0, 0}};
B = {{-9, 12, -3, -12}, {3, -3, 1, 3}, {12, -12, 4, 12}, {9, -12, 3, 12}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Eigensystem[A]
{{0, 0, 0, 4}, {{-1, 0, 0, 1}, {-1, 0, 4, 0}, {1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 3, 0}}}

Eigensystem[B]
{{0, 0, 1, 3}, {{0, 1, 0, 1}, {-1, 0, 3, 0}, {0, 1, 4, 0}, {-1, 0, 0, 1}}}

A.{0, 1, 4, 0}
{0, 0, 0, 0}

A.{0, 1, 0, 1}
{0, 0, 0, 0}
    
```

$$\mathcal{B} = ((0, 1, 4, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -3, 0)).$$

[95]

```

A = {{1, -1, 3}, {0, 1, 1}, {0, 3, -1}};
P = Inverse[A]
{{1, -2, 1}, {0, 1/4, 1/4}, {0, 3/4, -1/4}}

MatrixForm[Transpose[P]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

B = {{1, -2, 3}, {1, -1, 1}, {2, -2, 7}};

Q = Inverse[B]
{{-1, 8/5, 1/5}, {-1, 1/5, 2/5}, {0, -2/5, 1/5}}

MatrixForm[Transpose[Q]]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

    
```

i)  $f_1 = x, f_2 = -2x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z, f_3 = x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z.$

ii)  $f_1 = -x - y, f_2 = \frac{8}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z, f_3 = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z.$

[96] i)  $f_1, f_2$  sono forme lineari linearmente indipendenti (la verifica segue dalla loro definizione e dalle proprietà del calcolo integrale).

ii) Se  $p(x) = a + bx$ , allora:  $f_1(p(x)) = a + \frac{b}{2}, f_2(p(x)) = 2a + 2b$ ; quindi la base duale è data da  $p_1(x) = 2 - 2x, p_2(x) = -\frac{1}{2} + x.$

[97]

$$A = \{\{1, 1/2, 1/3\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 0, 0\}\};$$

MatrixForm[Inverse[A]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

i)  $f_1, f_2, f_3$  sono forme lineari linearmente indipendenti.

ii) Se  $p(x) = a + bx + cx^2$ , allora:  $f_1(p(x)) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ ,  $f_2(p(x)) = b + 2c$ ,  $f_3(p(x)) = a$ .

La base duale è data da:  $p_1(x) = 3x - \frac{3}{2}x^2$ ,  $p_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ ,  $p_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2$ .

[98]

$$A = \{\{1, 0, 1\}, \{1, 2, 0\}, \{1, 3, 3\}\};$$

$$B = \{\{4, 0, 1\}, \{3, 1, 0\}, \{1, 2, 1\}\};$$

P = LinearSolve[A, B]

$$\left\{ \left\{ \frac{31}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{4}{7} \right\}, \left\{ -\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{2}{7} \right\}, \left\{ -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7} \right\} \right\}$$

MatrixForm[P]

$$\begin{pmatrix} \frac{31}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

X = Inverse[Transpose[A]]

$$\left\{ \left\{ \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7} \right\}, \left\{ \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7} \right\}, \left\{ -\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right\} \right\}$$

Y = Inverse[Transpose[B]]

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{9} \right\}, \left\{ \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9} \right\}, \left\{ -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9} \right\} \right\}$$

Q = LinearSolve[X, Y]

$$\left\{ \left\{ \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \right\}, \left\{ \frac{1}{9}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{9} \right\}, \left\{ -\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{17}{9} \right\} \right\}$$

Inverse[Transpose[P]]

$$\left\{ \left\{ \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \right\}, \left\{ \frac{1}{9}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{9} \right\}, \left\{ -\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{17}{9} \right\} \right\}$$

MatrixForm[Q]

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

$$i) P = \begin{pmatrix} \frac{31}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

$$ii) \mathcal{B}_1^* = \left( \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z, -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{1}{7}z, \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z \right);$$

$$\mathcal{B}_2^* = \left( \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{1}{9}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{5}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z \right).$$

$$\text{iii) } Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

[99]

```

A = {{1, 1, 0}, {0, 1, 1}};
Transpose[A] . {3, -1}
{3, 2, -1}

```

$${}^tF(f) = 3x + 2y - z.$$

[100] i)  $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,

$$\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathcal{L}((1, 1, -1, -6)).$$

$$\text{ii) } f = \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3, \quad \lambda \neq 0.$$

## Capitolo 7

# Soluzioni - Spazi vettoriali euclidei ed hermitiani

[1]

```
A' = {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, -1}};  
P = {{-1, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 1, 0}};  
MatrixForm[A = P.A'.Inverse[P]]  
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
Det[A]  
1
```

i)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 1))$ ,  $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (0, 1, 0))$ .

ii) Segue dalla definizione di isometria e dal fatto che  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$ .

iii) Sia  $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $A' = M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$\det A = 1$ , quindi  $f$  è un'isometria diretta.

[2]

```
P = {{2, 1, 0}, {1, 0, 1}, {-1, 2, 1}};  
A' = {{-1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};  
MatrixForm[A = P.A'.Inverse[P]]  
 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$   
Transpose[A].A  
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

i)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1))$ ,  $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{a}_2 = (1, 0, 2), \mathbf{a}_3 = (0, 1, 1))$ .

ii) Segue dalla definizione di isometria e dal fatto che  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$ .

Sia  $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $A' = M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

iii)  $f$  e  $f^{-1}$  sono isometrie quindi:  $f^{-1}(\mathbf{a}) \cdot f^{-1}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ ,  $\|f(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$ .

[3] i)  $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{a}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ .

ii)  $\mathbf{v} = (12 + x_2 + 2x_3)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ ,  $x_2, x_3 \in V_3$ ; l'insieme di tali vettori non costituisce un sottospazio vettoriale di  $V_3$ .

iii)  $\mathbf{a} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \frac{1}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ .

[4]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
m = {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}, {2I, 0, 0, 1}};
GramSchmidt[m, InnerProduct -> (#1 . Conjugate[#2]&)]
{{0, 1, 0, 0}, {1/sqrt(2), 0, 1/sqrt(2), 0}, {i/sqrt(3), 0, -i/sqrt(3), 1/sqrt(3)}}
```

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\left((0, 1, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

[5]

```
a = {1, 1, -1}; b = {1, 1, 0}; c = {0, 1, -1};
RowReduce[{a, b, c}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = GramSchmidt[{a, b, c}]
{{1/sqrt(3), 1/sqrt(3), -1/sqrt(3)}, {1/sqrt(6), 1/sqrt(6), sqrt(2)/3}, {-1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 0}}
Transpose[A].A
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

ii)  $C' = \left(\mathbf{a}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right), \mathbf{b}' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \mathbf{c}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)$ .

iv)  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix};$

$A \in O(3)$  perché le sue colonne sono le componenti di una base ortonormale di  $V_3$ .

[6]

```

A = NullSpace[{{1, 1, -2}, {2, -1, -1}}]
{1, 1, 1}

NullSpace[A]
{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}

B = NullSpace[{{-1, 1, -1}}]
{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}

NullSpace[B]
{1, -1, 1}

RowReduce[{{1, 2, 1}, {3, 1, 2}, {1, 1, 2}}]
{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}

LinearSolve[{{1, 2, 1}, {3, 1, 2}, {1, 1, 2}},
{a {1, 1, 1}, b{-1, 0, 1} + c{-1, 1, 0}, d{1, -1, 1}}]
{ $\frac{1}{2}(-b-c-d)$ ,  $\frac{c+d}{2}$ ,  $\frac{b-d}{2}$ },
{ $\frac{1}{6}(4a+b+c-d)$ ,  $\frac{1}{6}(4a-c+d)$ ,  $\frac{1}{6}(4a-b-d)$ },
{ $\frac{1}{6}(-2a+b+c+5d)$ ,  $\frac{1}{6}(-2a-c-5d)$ ,  $\frac{1}{6}(-2a-b+5d)$ }}]

MatrixForm[Transpose[%]]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-b-c-d) & \frac{1}{6}(4a+b+c-d) & \frac{1}{6}(-2a+b+c+5d) \\ \frac{c+d}{2} & \frac{1}{6}(4a-c+d) & \frac{1}{6}(-2a-c-5d) \\ \frac{b-d}{2} & \frac{1}{6}(4a-b-d) & \frac{1}{6}(-2a-b+5d) \end{pmatrix}$$


```

i)  $\mathcal{U} = \mathcal{L}(v_1 = (1, 1, 1)), \mathcal{U}^\perp = \mathcal{L}(v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, 0))$ ;

$\mathcal{V} = \mathcal{L}((-1, 0, 1), (1, 1, 0)), \mathcal{V}^\perp = \mathcal{L}(v_4 = (1, -1, 1))$ ;

$\mathcal{A} = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) / f(1, 2, 1) = av_1, f(3, 1, 2) = bv_2 + cv_3, f(1, 1, 2) = dv_4, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ,  $\dim \mathcal{A} = 4$ .

[7]

```

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
a1 = {1, -2, 1, 3}; a2 = {2, 1, -3, 1};
a1.a2
0

GramSchmidt[{a1, a2, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}, Normalized -> False]
{1, -2, 1, 3}, {2, 1, -3, 1}, { $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0$ }, { $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$ }

```

$(a_1, a_2, (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}))$ .

[8]

```

A = {{1, 4I}, {4I, 3}};

Eigenvalues[A]
{2 - i√15, 2 + i√15}

```

ii) Si dimostra che gli autovalori di una matrice simmetrica reale e quelli di una matrice hermitiana sono reali. Il teorema è falso (come afferma il controesempio considerato) nel caso di matrici simmetriche complesse.

[9]

```

A = {{1, 3}, {0, -1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};

Solve[A.X == X.A]

Solve :: "svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x3 -> 0, x1 -> (2 x2)/3 + x4}}

a = Tr[Transpose[X].{{2, 3}, {0, 0}}];

b = Tr[Transpose[X]];

Solve[{a == 0, b == 0}]

Solve :: "svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> (2 x4)/3}}
    
```

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{W}^\perp = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

[10]

```

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`

m = {{-1, 0, 2, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}};

GramSchmidt[m, InnerProduct -> (#1 . Conjugate[#2]&)]
{{-i/sqrt(5), 0, 2/sqrt(5), 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}
    
```

i)  $\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{i}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\right)$ .

ii) Per esempio:  $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = x_2 = x_3 - x_4 = 0\}$ ;

$\mathcal{H}^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = x_2 = x_4 = 0\}$ .

[11]

```

m = {{3, 0, 4}, {1, 2, 0}, {2, -2, 4}, {4, 2, 4}};

b = RowReduce[m]
{{1, 0, 4/3}, {0, 1, -2/3}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{b[[1]], b[[2]]}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 sqrt(29)), 5/sqrt(29), -6/(5 sqrt(29))}}

A = GramSchmidt[{{%[[1]], %[[2]], {0, 0, 1}}}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 sqrt(29)), 5/sqrt(29), -6/(5 sqrt(29))}, {-4/sqrt(29), 2/sqrt(29), 3/sqrt(29)}}

MatrixForm[Transpose[A]]
(
  3/5      8/(5 sqrt(29))  -4/sqrt(29)
  0        5              2
  4        sqrt(29)      sqrt(29)
  5        -6            3
  5        5 sqrt(29)    sqrt(29)
)

A.Transpose[A]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
    
```

i)  $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}}\right)\right)$ .

$$\text{ii) } C = \left( \left( \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right), \left( \frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}} \right), \left( -\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}} \right) \right).$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{8}{5\sqrt{29}} & -\frac{4}{\sqrt{29}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{6}{5\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \text{ è la matrice del cambiamento di base da } C \text{ a } \mathcal{D};$$

$A^{-1}$  è la matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{D}$  a  $C$ .

$$[12] \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left( -\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \sqrt{\frac{2}{11}}, 0 \right), \left( -\frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \right) \right).$$

[13] i) La somma  $\mathcal{R}(A) + C(A)$  è diretta, quindi la loro intersezione è  $\{\mathbf{o}\}$ ;

$$\text{ii) } C(A)^\perp = \mathcal{L}((3, -2, 1, 0), (-4, 1, 0, 1)).$$

[14]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
GramSchmidt[{{2, -1, 0, 1}, {2, -1, 1, 0}}]
```

```
{{{sqrt(2)/3, -1/sqrt(6), 0, 1/sqrt(6)}, {sqrt(2)/33, -1/sqrt(66), sqrt(6)/11, -5/sqrt(66)}}
```

$$\text{ii) } \mathcal{U}^\perp = \mathcal{L}\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}\right)\right).$$

[15]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
GramSchmidt[{{1, 1, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, 0, 1}}]
```

```
{{{1/sqrt(3), 1/sqrt(3), 1/sqrt(3)}, {-1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 0}, {-1/sqrt(6), -1/sqrt(6), sqrt(2)/3}}
```

$$\left( \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right).$$

[16] i) Sì;

$$\text{ii) } \mathcal{A}^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 = x_4 = x_5 = 0\} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0)\right).$$

[17]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
GramSchmidt[{{1, 0, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 2}}]
```

```
{{{1/sqrt(2), 0, 1/sqrt(2)}, {-1/sqrt(6), sqrt(2)/3, 1/sqrt(6)}, {1/sqrt(3), 1/sqrt(3), -1/sqrt(3)}}
```

$$\left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right).$$

[18]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
GramSchmidt[{{-1, 1, 0}, {1, 0, 1}}]
```

```
{{-1/√2, 1/√2, 0}, {1/√6, 1/√6, √(2/3)}}
```

$$\left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

[19]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
m = {{1, 0, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}};
```

```
RowReduce[m]
```

```
{{1, 0, 0, -2}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 1}}
```

```
GramSchmidt[m]
```

```
{{1/√3, 0, 1/√3, -1/√3},  
{2/√15, -√(3/5), -1/√15, 1/√15}, {0, 0, 1/√2, 1/√2}}
```

ii)  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{15}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right), \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$

[20]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
MatrixForm[
```

```
GramSchmidt[{{0, Sqrt[2]/2, -Sqrt[2]/2}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}]
```

```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```

Per esempio:  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

## Capitolo 8

# Soluzioni - Forme quadratiche

[1]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`  
GramSchmidt[{{2, 1, 0}, {-1, 0, 1}, {1, -2, 1}}]  
{{{2/√5, 1/√5, 0}, {-1/√30, √(2/15), √(5/6)}, {1/√6, -√(2/3), 1/√6}}}
```

i) Il fatto che  $Q$  sia una forma quadratica segue dalle proprietà del prodotto scalare e delle applicazioni lineari; dalla definizione si ha che la segnatura è  $(2, 0)$ .

ii) Una base richiesta è  $\mathcal{B} = \left( \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{5}{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right)$ .

[2]

```
A = {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}};  
B = Eigensystem[A]  
{{-1, -1, 2}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}  
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`  
GramSchmidt[B[[2]]]  
{{{-1/√2, 0, 1/√2}, {-1/√6, √(2/3), -1/√6}, {1/√3, 1/√3, 1/√3}}}
```

Segnatura:  $(1, 2)$ ; base ortonormale:

$\mathcal{B} = \left( \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)$ .

[3]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{2, 1, 0, 0}, {1, 2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, 2}};
B = Eigensystem[A]
{{1, 1, 3, 3}, {{0, 0, 1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1}, {1, 1, 0, 0}}}

GramSchmidt[B[[2]], InnerProduct ->
(2 #1 [[1]] #2 [[1]] + 2 #1 [[2]] #2 [[2]] + 2 #1 [[3]] #2 [[3]] +
2 #1 [[4]] #2 [[4]] + 2 #1 [[1]] #2 [[2]] - 2 #1 [[3]] #2 [[4]] &)]
{{0, 0,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ }, {- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 0, 0},
{0, 0, - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 0}, { $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 0, 0, 0}}
X = {x1, x2, x3, x4};
Solve[{X.A.Transpose[{{1, 0, -1, 2}}] == 0,
X.A.Transpose[{{0, 1, 2, 1}}] == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 ->  $\frac{11x3}{3} - \frac{10x4}{3}$ , x2 ->  $-\frac{10x3}{3} + \frac{5x4}{3}$ }}
Det[{{1, 0, -1, 2}, {0, 1, 2, 1},
{11/3, -10/3, 1, 0}, {-10/3, 5/3, 0, 1}}]
 $\frac{124}{3}$ 
```

i) Segnatura: (4, 0).

ii)  $\mathcal{B} = \left( (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0) \right)$ .

iii)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}((1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, 1)), \mathcal{F}^\perp = \mathcal{L}\left(\left(\frac{11}{3}, -\frac{10}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1\right)\right)$ .

[4]

```
P = {{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, -1}};
MatrixForm[Transpose[P].P]
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 
```

i) Se  $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ , allora:  $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ .

ii)  $\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{F}^\perp = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ .

iii) La matrice richiesta è:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

[5]

```

Reduce[{a11 + 2 a12 + 2 a13 + 2 a23 + a22 + a33 == 1,
  a11 + a22 + 2 a12 == 1,
  a11 + a33 - 2 a13 == 1,
  a11 + 2 a12 + a22 + a13 + a23 == 0,
  - a11 - a12 + a23 + a33 == 0,
  - a11 + a13 - a12 + a23 == 0}, {a11, a12, a13, a22, a23, a33}]
a11 == 3 && a12 == -4 && a13 == 2 && a22 == 6 && a23 == -3 && a33 == 2

A = {{3, -4, 2}, {-4, 6, -3}, {2, -3, 2}}; X = {x1, x2, x3};

Solve[{X.A.Transpose[{{1, 0, -1}}] == 0,
  X.A.Transpose[{{0, 1, 0}}] == 0}, {x1, x2, x3}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> 3 x3 / 2, x2 -> 3 x3 / 2}}

Sqrt[{1, 1, -1}.A.Transpose[{{1, 1, -1}}]]
{sqrt(5)}

```

$$i) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$ii) \mathcal{F}^\perp = \mathcal{L}\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)\right).$$

$$iii) \|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}.$$

[6]

```

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{2, 0, -1}, {0, 2, 0}, {-1, 0, 2}};
B = Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}}}

GramSchmidt[B[[2]],
  InnerProduct -> (2 #1 [[1]] #2 [[1]] + 2 #1 [[2]] #2 [[2]] +
    2 #1 [[3]] #2 [[3]] - #1 [[1]] #2 [[3]] - #1 [[3]] #2 [[1]] &)]
{{1/sqrt(2), 0, 1/sqrt(2)}, {0, 1/sqrt(2), 0}, {-1/sqrt(6), 0, 1/sqrt(6)}}

```

$$i) \mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right).$$

ii)  $f$  è un'isometria.

$$iii) \|f^{-1}(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\| = 2\sqrt{2}, \quad \cos(\widehat{f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})}) = \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

[7]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{3, 0, 1}, {0, 4, 0}, {1, 0, 3}};
B = Eigensystem[A]
{{2, 4, 4}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 1, 0}}}
GramSchmidt[B[[2]],
  InnerProduct -> (3 #1 [[1]] #2 [[1]] + 4 #1 [[2]] #2 [[2]] +
    3 #1 [[3]] #2 [[3]] + #1 [[1]] #2 [[3]] + #1 [[3]] #2 [[1]] &)]
{{-1/2, 0, 1/2}, {1/(2*sqrt(2)), 0, 1/(2*sqrt(2))}, {0, 1/2, 0}}
```

i)  $\mathcal{B} = \left( \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \right)$ .

ii)  $f$  non è un'isometria;  $\cos(\widehat{f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})}) = \frac{8}{5\sqrt{3}}$ .

[8]

```
A = {{1, 1, 1}, {1, 1, 1}, {1, 1, 1}};
Eigensystem[A]
{{0, 0, 3}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}
```

i)  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

ii) Segnatura: (1, 0).

[9]

```
A = {{1, 3, 4, -1, 2}, {3, 0, 0, 7, -1},
      {4, 0, 0, 0, 0}, {-1, 7, 0, 2, -1}, {2, -1, 0, -1, 3}};
CharacteristicPolynomial[A, x]
2160 - 649 x - 366 x^2 + 70 x^3 + 6 x^4 - x^5
```

Segnatura: (3, 2).

[10]

```
A = {{3, -1, -1}, {-1, 3, -1}, {-1, -1, 3}};
B = Eigensystem[A]
{{1, 4, 4}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
RootReduce[GramSchmidt[B[[2]], InnerProduct ->
  (3 #1 [[1]] #2 [[1]] + 3 #1 [[2]] #2 [[2]] + 3 #1 [[3]] #2 [[3]] -
    2 #1 [[1]] #2 [[2]] - 2 #1 [[2]] #2 [[3]] - 2 #1 [[1]] #2 [[3]] &)]
{{1/sqrt(3), 1/sqrt(3), 1/sqrt(3)}, {-7/(2*sqrt(30)), -sqrt(2/15), -1/(2*sqrt(30))},
  {-193/(2*sqrt(32430)), 11*sqrt(2/16215), -79/(2*sqrt(32430))}}
```

i) Segnatura: (3, 0).

$$\text{ii) } \mathcal{B} = \left( \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{7}{2\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}, -\frac{1}{2\sqrt{30}} \right), \left( -\frac{193}{2\sqrt{32430}}, 11\sqrt{\frac{2}{16215}}, -\frac{79}{2\sqrt{32430}} \right) \right).$$

[11]

```
A = {{1, 0, -1, -2}, {0, 4, 2, 0}, {-1, 2, 11, 8}, {-2, 0, 8, 24}}; s
```

```
CharacteristicPolynomial[A, x]
```

```
576 - 984 x + 370 x^2 - 40 x^3 + x^4
```

Si tratta di un prodotto scalare.

[12]

```
A = {{1, 0, 1}, {2, h + 1, 1}, {-h^2 - 2h, h + 1, -1}};
```

```
X = {x, y, z}; B = {0, 1, h + 1};
```

```
Reduce[A.X == B, {x, y, z}]
```

```
h == 0 && y == 1 - x && z == -x | x == \frac{1}{-2 - h} &&
  y == \frac{3 + h}{(1 + h)(2 + h)} && z == \frac{1}{2 + h} && h \neq 0 && 1 + h \neq 0 && 2 + h \neq 0
```

```
A1 = A /. h -> 0;
```

```
MatrixForm[c = Transpose[A1] . A1]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[c]
```

```
{0, 5 - \sqrt{7}, 5 + \sqrt{7}}
```

```
A2 = A /. h -> 1;
```

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

```
GramSchmidt[A2]
```

```
{{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}}, {\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}}, {-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}}}
```

i) Se  $h = 0$ :  $x = t, y = 1 - t, z = -t, \quad t \in \mathbb{R}$ ;

se  $h = -2$  e se  $h = -1$ : non esistono soluzioni;

se  $h \notin \{-2, -1, 0\}$ :  $x = \frac{1}{-2-h}, y = \frac{3+h}{(1+h)(2+h)}, z = \frac{1}{2+h}$ .

ii)  $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ ;  $Q(\mathbf{x}) = (5 - \sqrt{7})(x_2')^2 + (5 + \sqrt{7})(x_3')^2$ .

iii)  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ .

[13]

```

A1 = {{2, 1, 0, 0}, {1, 2, 0, 0}, {0, 0, 2, 1}, {0, 0, 1, 2}};

Eigenvalues[A1]
{1, 1, 3, 3}

A2 = {{2, -1, 0, 0}, {-1, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, -2}};

Eigenvalues[A2]
{-√5, -√5, √5, √5}

A3 = {{1, -2, -1, 0}, {-2, 0, 0, 0}, {-1, 0, 4, 2}, {0, 0, 2, 0}};

B = Eigenvalues[A3]
{5/4 - √13/4 - 1/2 √(51/2 - 5√13/2), 5/4 - √13/4 + 1/2 √(51/2 - 5√13/2),
 5/4 + √13/4 - 1/2 √(51/2 + 5√13/2), 5/4 + √13/4 + 1/2 √(51/2 + 5√13/2)}

<<Algebra`AlgebraicInequalities`

SemialgebraicComponents[{B[[1]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{False}]

SemialgebraicComponents[{B[[2]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{True}]

SemialgebraicComponents[{B[[3]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{False}]

SemialgebraicComponents[{B[[4]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{True}]

A4 = {{3, -1, 0, 0}, {-1, 3, 0, 0}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 1, -4}};

Eigenvalues[A4]
{2, 4, -√17, √17}

```

Segnatura di  $Q_1$ : (4, 0);segnatura di  $Q_2$ : (2, 2);segnatura di  $Q_3$ : (2, 2);segnatura di  $Q_4$ : (3, 1).

[14]

```

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{2, 1, -1}, {1, 1, 1}, {-1, 1, 5}};

B = FullSimplify[Eigensystem[A]]
{{0, 4 - √2, 4 + √2},
 {{2, -3, 1}, {4 + 3√2, 3 + 2√2, 1}, {4 - 3√2, 3 - 2√2, 1}}}

FullSimplify[GramSchmidt[B[[2]]]]
{{√(2/7), -3/√14, 1/√14},
 {√(1/14 (5 + 3√2)), √(5/28 + 3/14√2), √(13/28 - 9/14√2)},
 {-√(1/14 (5 - 3√2)), √(5/28 - 3/14√2), √(13/28 + 9/14√2)}}

```

Segnatura: (2, 0); base ortonormale:

$$\mathcal{B} = \left( \left( \sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right), \left( \sqrt{\frac{1}{14}(5+3\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{5}{28} + \frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28} - \frac{9}{14\sqrt{2}}} \right), \right. \\ \left. \left( -\sqrt{\frac{1}{14}(5-3\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{5}{28} - \frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28} + \frac{9}{14\sqrt{2}}} \right) \right).$$

[15]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{2, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, -1}};
B = Eigensystem[A]
{{-2, 1, 3}, {-1, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, 1}}
GramSchmidt[B[[2]]]
{{-1/sqrt(5), 0, 2/sqrt(5)}, {0, 1, 0}, {2/sqrt(5), 0, 1/sqrt(5)}}
```

i) Segnatura: (2, 1).

ii) Forma canonica:  $Q(\mathbf{x}) = -2(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + 3(x'_3)^2$ ;

base ortonormale:  $\mathcal{B} = \left( \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), (0, 1, 0), \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right)$ .

[16]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{1, -4, 3, 0}, {-4, 1, 0, 0}, {3, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
B = Eigensystem[A]
{{-4, 1, 1, 6},
{-5, -4, 3, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 3, 4, 0}, {5, -4, 3, 0}}
GramSchmidt[B[[2]]]
{{-1/sqrt(2), -2*sqrt(2)/5, 3/(5*sqrt(2)), 0}, {0, 0, 0, 1},
{0, 3/5, 4/5, 0}, {1/sqrt(2), -2*sqrt(2)/5, 3/(5*sqrt(2)), 0}}
```

Forma canonica:  $Q(\mathbf{x}) = -4(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 + 6(x'_4)^2$ ;

base ortonormale:

$$\mathcal{B} = \left( \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 0, 1), \left( 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0 \right) \right).$$

[17]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{5, 1, 3}, {1, 5, 3}, {3, 3, 3}};
Eigenvalues[A]
{0, 4, 9}
```

Segnatura: (2, 0); forma canonica:  $Q(\mathbf{x}) = 4(x'_2)^2 + 9(x'_3)^2$ .

[18]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{1, -1, 0, 0}, {-1, 2, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
B = Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 3}, {{1, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {1, -2, 1, 0}}}
GramSchmidt[B[[2]]]
{{{1/sqrt(3), 1/sqrt(3), 1/sqrt(3), 0}, {0, 0, 0, 1},
{-1/sqrt(2), 0, 1/sqrt(2), 0}, {1/sqrt(6), -sqrt(2)/3, 1/sqrt(6), 0}}}
```

i) Segnatura: (3, 0); forma normale:  $Q(\mathbf{x}) = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$ .

ii) Forma canonica:  $Q(\mathbf{x}) = (x''_2)^2 + (x''_3)^2 + 3(x''_4)^2$ ;

base ortonormale:

$$\mathcal{B} = \left( \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), (0, 0, 0, 1), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0 \right) \right).$$

[19]

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
A = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
B = Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2}, {{0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}
GramSchmidt[B[[2]]]
{{{0, 1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 0}}}
```

i) Segnatura: (3, 0); forma normale:  $Q(\mathbf{x}) = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$ .

ii) Forma canonica:  $Q(\mathbf{x}) = (x''_2)^2 + (x''_3)^2 + 2(x''_4)^2$ ;

base ortonormale:  $\mathcal{B} = \left( \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right).$