

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

G. Zampieri

Analisi Vettoriale

a.a. 2001/2002

Quaderno # 10 - Novembre 2001



PREFAZIONE

Questo quaderno raccoglie le dispense di una parte del corso di “Analisi vettoriale e serie di funzioni” che ho svolto nell’anno accademico 2001/02. Si tratta di un corso di analisi matematica per studenti del secondo anno di fisica, preceduto, nel primo anno, da “Calcolo differenziale ed integrale” e da “Funzioni di più variabili”, entrambi indispensabili alla comprensione del materiale qui presentato.

Ho cercato di entrare nello spirito del nuovo ordinamento didattico, semplificando, dove possibile, la trattazione e cercando di legarla alla fisica. Non ho però rinunciato alle dimostrazioni che sono quasi sempre svolte, almeno in casi particolari. Credo infatti che una certa profondità sia indispensabile agli studenti di fisica del secondo anno il cui interesse per la matematica è naturale dato lo stretto legame fra le due discipline (“inconcepibile efficacia della matematica nelle scienze della natura, o Principio di Wigner”). Inoltre penso che un percorso attraverso le idee, diversamente dall’esposizione di una cassetta degli attrezzi, faciliti la comprensione.

Ringrazio gli studenti che mi hanno posto frequenti domande aiutandomi nell’esposizione della materia non solo dal punto di vista matematico.

INDICE

CAP. I: CURVE E FORME DIFFERENZIALI

1. Curve rettificabili	p. 2
2. Curve regolari, parametro d’arco	p. 8
3. Lunghezza di curve piane cartesiane e polari	p. 8
4. Cammini	p. 9
5. Integrali curvilinei al differenziale d’arco	p.10
6. Esercizi	p.11
7. Preliminari alle forme differenziali: spazio duale	p.14
8. Forme differenziali	p.15
9. Integrali curvilinei	p.17
10. Primitive, omotopie e connessione semplice	p.20
11. Esercizi svolti	p.27

CAP. II: SUPERFICI E TEOREMI DI STOKES E GAUSS

12. Teorema di Green	p.33
13. Area di superfici	p.38
14. Operatori differenziali e integrali superficiali	p.41
15. Teorema di Stokes	p.46
16. Il nastro di Möbius	p.49
17. Potenziale vettore, connessione superficiale semplice	p.51
18. Teorema della divergenza di Gauss	p.55
19. Esercizi ed esempi svolti	p.57

Cap. I: Curve e Forme Differenziali

1. Curve rettificabili.

Un'applicazione $\underline{\phi} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I intervallo di \mathbb{R} si dice *curva* (parametrica) in \mathbb{R}^n . Ci interesseranno solo le *curve continue*, cioè considereremo sempre $\underline{\phi}$ continua. Inoltre ci interesserà il caso in cui $I = [a, b]$ intervallo compatto, anche se quello che diremo avrà ovvie estensioni ad intervalli di altro tipo. L'immagine $\underline{\phi}([a, b])$ è detta *sostegno* della curva e va distinta dalla curva stessa; si pensi alla curva come al moto di un punto e al sostegno come alla traiettoria del moto.

Già sappiamo che il seguente limite in $t_0 \in [a, b]$ viene detto vettore derivato in t_0 , purchè esista

$$\underline{\phi}'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{\phi}(t) - \underline{\phi}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Naturalmente, se esiste ovunque poniamo $\underline{\phi}' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\phi}'(t)$.

Definiamo l'integrale della curva continua $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ per componenti, cioè

$$\int_a^b \underline{\phi}(t) dt := \left(\int_a^b \phi_1(t) dt, \dots, \int_a^b \phi_n(t) dt \right) \quad (1.2)$$

dove $\underline{\phi}(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$. Per la linearità dell'integrale, si verifica subito che

$$\underline{v} \cdot \int_a^b \underline{\phi}(t) dt = \int_a^b \underline{v} \cdot \underline{\phi}(t) dt \quad (1.3)$$

dove $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e il puntino ' \cdot ' denota il prodotto scalare.

Proposizione 1.1. Sia $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua. Allora

$$\left| \int_a^b \underline{\phi}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\underline{\phi}(t)| dt. \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Sia $\underline{v} := \int_a^b \underline{\phi}(t) dt$. Se $\underline{v} = 0$ la (1.4) è vera. Sia quindi $\underline{v} \neq 0$. Usando la (1.3) e la disuguaglianza di Schwarz abbiamo

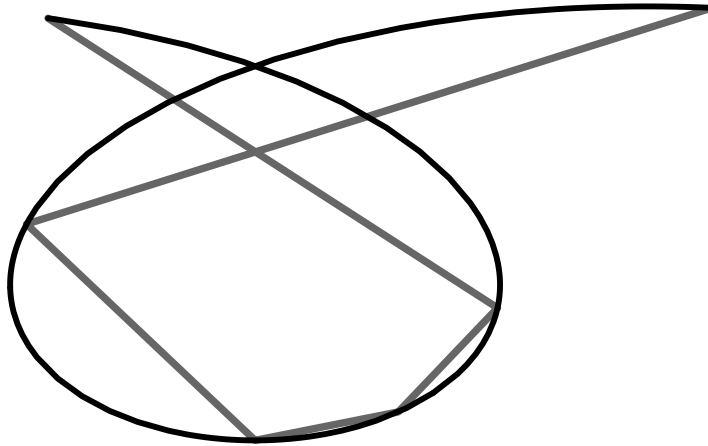
$$|\underline{v}|^2 = \underline{v} \cdot \int_a^b \underline{\phi}(t) dt = \int_a^b \underline{v} \cdot \underline{\phi}(t) dt \leq \int_a^b |\underline{v} \cdot \underline{\phi}(t)| dt \leq \int_a^b |\underline{v}| |\underline{\phi}(t)| dt = |\underline{v}| \int_a^b |\underline{\phi}(t)| dt.$$

Dividendo per $|\underline{v}|$ si ha la tesi. \square

Consideriamo $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva continua e sia $S = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ una *suddivisione* di $[a, b]$ cioè un suo sottoinsieme finito con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$. Nella seguente definizione usiamo la notazione

$$L_S := \sum_{i=1}^N |\underline{\phi}(t_i) - \underline{\phi}(t_{i-1})| \geq 0. \quad (1.5)$$

Si tratta della lunghezza della poligonale in \mathbb{R}^n che ha per vertici i punti $\underline{\phi}(t_0), \underline{\phi}(t_1), \dots, \underline{\phi}(t_N)$, ed è detta *poligonale inscritta* nella curva.

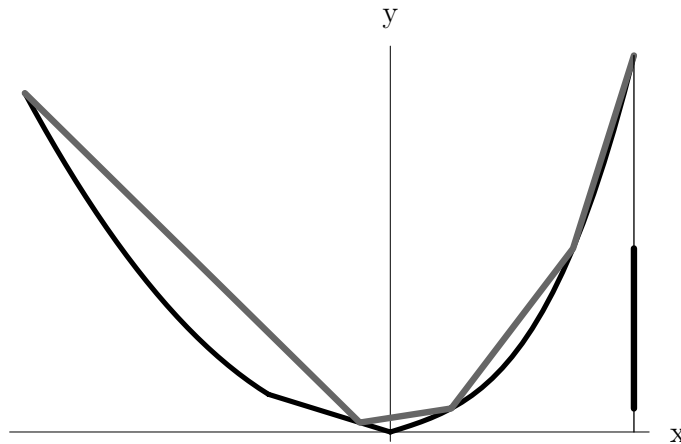


Definizione 1.2. Data una curva continua $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ poniamo $L(\underline{\phi}) := \sup_S L_S$ al variare di S fra tutte le suddivisioni di $[a, b]$. Diciamo che $\underline{\phi}$ è *rettificabile* se $L(\underline{\phi}) < +\infty$ e $L(\underline{\phi})$ è detta *lunghezza della curva*.

Interpretando cinematicamente la curva, si ha che la sua lunghezza è la *strada percorsa*. Così ad esempio $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sin t$ è una curva rettificabile di lunghezza 2 (e non 1). Il sostegno è $[0, 1]$ ma è percorso due volte.

Definizione 1.3. Sia $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e consideriamo la curva $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$. Questa curva in \mathbb{R}^2 si dice *curva cartesiana* $y = f(x)$. Il suo sostegno è il grafico di f .

Esempio 1.4. Facciamo vedere che se la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e *convessa* allora la curva cartesiana $y = f(x)$ è rettificabile. Diciamo $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\} < +\infty$ per la compattezza dell'intervallo e la continuità di f . Se S è una qualunque suddivisione di $[a, b]$, allora $L_S \leq (f(a) - m) + (f(b) - m) + (b - a)$ dove a destra si ha la lunghezza di una spezzata con lati paralleli agli assi. Quindi il $\sup_S L_S$ è finito. \square



Esempio 1.5. Vediamo ora un esempio di curva *non* rettificabile. Consideriamo la curva cartesiana $y = f(x)$ con $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0$, e $f(x) = x \cos(\pi/x)$ per $x \neq 0$. Il sostegno interseca la retta $y = x$ nell'origine e per $(\pi/x) = 2n\pi$, ovvero $x = 1/2n$ con $n = 1, 2, \dots$. Interseca invece la retta $y = -x$ per $x = 1/(2n+1), n = 0, 1, 2, \dots$. Considero la poligonale

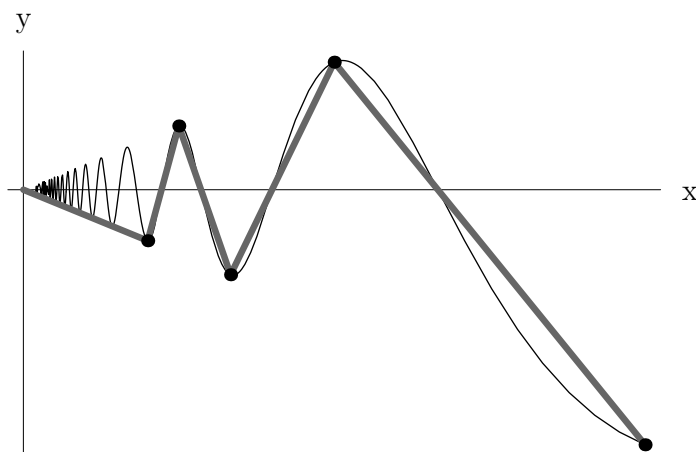
inscritta ottenuta con la suddivisione

$$S_m = \left\{ 0, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

La lunghezza dei segmenti della poligonale è maggiore di quella delle loro proiezioni sull'asse y . Usando questo fatto, ed escludendo il segmento della poligonale che ha un estremo nell'origine, abbiamo

$$L_{S_m} \geq \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^m \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{m+1} \frac{dx}{x} = \ln(m+1) \rightarrow +\infty$$

per $m \rightarrow +\infty$ (come noto dalla teoria della serie armonica). \square



Proposizione 1.6. Sia $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua e $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un omeomorfismo (cioè funzione biettiva e continua assieme all'inversa). Allora $\underline{\phi}$ è rettificabile se e solo se lo è $\underline{\phi} \circ p$ ed in tale caso $L(\underline{\phi}) = L(\underline{\phi} \circ p)$.

Dimostrazione. Basta ricordare che p è strettamente crescente o strettamente decrescente.

In entrambi i casi si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra le suddivisioni di $[a, b]$ e quelle di $[c, d]$ in modo che suddivisioni corrispondenti abbiano la stessa poligonale inscritta. Se p è strettamente crescente alla suddivisione $\{t_0, \dots, t_N\}$ di $[a, b]$ associamo la $\{\tau_0, \dots, \tau_N\}$, con $\tau_0 := p^{-1}(t_0), \dots, \tau_N := p^{-1}(t_N)$, che è una suddivisione di $[c, d]$. Se invece p è decrescente basta porre $\tau_0 := p^{-1}(t_N), \dots, \tau_N := p^{-1}(t_0)$. \square

Proposizione 1.7. Sia $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua e rettificabile, inoltre siano $\underline{\phi}_1 := \underline{\phi}|[a, c]$, $\underline{\phi}_2 := \underline{\phi}|[c, b]$ con $a < c < b$. Allora $\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2$ sono rettificabili e $L(\underline{\phi}) = L(\underline{\phi}_1) + L(\underline{\phi}_2)$ (la lunghezza è additiva).

Dimostrazione. Sia S_1 suddivisione di $[a, c]$ e S_2 di $[c, b]$. Allora $S = S_1 \cup S_2$ è suddivisione di $[a, b]$ e si ha $L_{S_1} + L_{S_2} = L_S \leq L(\underline{\phi})$. Perciò L_{S_1} e L_{S_2} sono superiormente limitate e $\underline{\phi}_1$ e $\underline{\phi}_2$ sono rettificabili. Passando al sup su S_1 si ha $L(\underline{\phi}_1) + L_{S_2} \leq L(\underline{\phi})$. Il sup su S_2 dà quindi $L(\underline{\phi}_1) + L(\underline{\phi}_2) \leq L(\underline{\phi})$. Dimostriamo ora la disuguaglianza inversa. Sia \tilde{S} suddivisione di $[a, b]$. Aggiungendo c abbiamo \tilde{S}_1 suddivisione di $[a, c]$ e \tilde{S}_2 di $[c, b]$ tali che $\tilde{S} \cup \{c\} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$. Per la disuguaglianza triangolare $L_{\tilde{S}} \leq L_{\tilde{S}_1} + L_{\tilde{S}_2} \leq L(\underline{\phi}_1) + L(\underline{\phi}_2)$. Passando al sup su \tilde{S} si ha $L(\underline{\phi}) \leq L(\underline{\phi}_1) + L(\underline{\phi}_2)$. \square

Definizione 1.8. Sia $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua rettificabile. Si dice funzione lunghezza d'arco la $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto L(\underline{\phi}|[a, t])$.

Proposizione 1.9. La lunghezza d'arco è crescente: $a \leq t_1 < t_2 \leq b \implies \lambda(t_1) \leq \lambda(t_2)$.

Dimostrazione. Usando l'additività della lunghezza d'arco (Proposizione 1.7) abbiamo

$$\lambda(t_2) - \lambda(t_1) = L(\underline{\phi}|[a, t_2]) - L(\underline{\phi}|[a, t_1]) = L(\underline{\phi}|[t_1, t_2]) \geq 0.$$

\square

Risultato fondamentale è il seguente

Teorema 1.10. Ogni curva $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è rettificabile e si ha

$$L(\underline{\phi}) = \int_a^b |\underline{\phi}'(t)| dt. \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Sia $S = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Usando la Proposizione 1.1 si ha

$$L_S = \sum_{k=1}^N \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underline{\phi}'(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\underline{\phi}'(t)| dt = \int_a^b |\underline{\phi}'(t)| dt.$$

Così in particolare $\underline{\phi}$ è rettificabile e

$$L(\underline{\phi}) \leq \int_a^b |\underline{\phi}'(t)| dt. \quad (1.7)$$

Sia $f(t) := \int_a^t |\underline{\phi}'(\tau)| d\tau$ e λ come nella Definizione 1.8. Facciamo vedere che λ è derivabile e $\lambda'(t) = f'(t) = |\underline{\phi}'(t)|$ per ogni $t \in [a, b]$; da ciò abbiamo $\lambda = f$ che conclude la dimostrazione.

Fissiamo $t \in [a, b]$. Sia $h > 0$ tale che $t + h \in [a, b]$ (se $t = b$ non esiste un tale h e ci si ferma qui). Allora usando la suddivisione $\{t, t + h\}$ dell'intervallo $[t, t + h]$ abbiamo

$$|\underline{\phi}(t + h) - \underline{\phi}(t)| \leq L(\underline{\phi}[t, t + h]) = \lambda(t + h) - \lambda(t).$$

Usando questo risultato per una prima maggiorazione e poi la (1.7) per una seconda, abbiamo

$$\left| \frac{\underline{\phi}(t + h) - \underline{\phi}(t)}{h} \right| \leq \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\underline{\phi}'(\tau)| d\tau = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}. \quad (1.8)$$

Vedremo che ciò vale anche per $h < 0$ e allora per $h \rightarrow 0$ il membro a estrema sinistra tende a $|\underline{\phi}'(t)|$ e quello a estrema destra pure per definizione di f . Il teorema dei carabinieri ci permette quindi di concludere che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} = |\underline{\phi}'(t)|.$$

Ci resta da vedere solamente che (1.8) vale anche per $h < 0$ (quando $t > a$):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{\phi}(t + h) - \underline{\phi}(t)}{h} \right| &\leq \frac{L(\underline{\phi}[t + h, t])}{-h} = \frac{\lambda(t) - \lambda(t + h)}{-h} = \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} \leq \\ &\leq \frac{1}{-h} \int_{t+h}^t |\underline{\phi}'(\tau)| d\tau = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\underline{\phi}'(\tau)| d\tau = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}. \end{aligned}$$

□

2. Curve regolari, parametro d'arco.

Una curva $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e con $\underline{\phi}'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$ si dice *regolare*. In tal caso dal teorema precedente abbiamo $\lambda'(t) = |\underline{\phi}'(t)| \neq 0$ per ogni t e $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, L(\underline{\phi})]$ è un diffeomorfismo cioè è una funzione biiettiva e di classe C^1 assieme alla funzione inversa λ^{-1} . La nuova curva $\underline{\psi} := \underline{\phi} \circ \lambda^{-1}$ è una riparametrizzazione della curva $\underline{\phi}$; la nuova variabile indipendente si dice *parametro d'arco* e si indica spesso con s . Derivando la $\underline{\psi}(\lambda(t)) = \underline{\phi}(t)$ si ha $\underline{\psi}'(\lambda(t))\lambda'(t) = \underline{\phi}'(t)$. Quindi, ricordando che $\lambda'(t) = |\underline{\phi}'(t)|$ e che $L(\underline{\phi}) = L(\underline{\psi})$ (Proposizione 1.6), troviamo

$$|\underline{\psi}'(s)| = 1, \quad s \in [0, L(\underline{\psi})], \quad (2.1)$$

il vettore tangente è quindi un versore se si considera il parametro d'arco.

3. Lunghezza di curve piane cartesiane e polari.

Come già detto nella Definizione 1.3, curva cartesiana (piana) $y = f(x)$ è la curva $\underline{\phi} : t \mapsto (t, f(t))$. Se $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ allora si ha la seguente formula per la lunghezza

$$L(\underline{\phi}) = \int_a^b |\underline{\phi}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (3.1)$$

Osserviamo anche che le curve cartesiane sono sempre regolari: $|\underline{\phi}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2} \neq 0$.

Passiamo ora a coordinate polari ρ, θ legate alle cartesiane dalle relazioni $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Indichiamo con $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ la base canonica di \mathbb{R}^2 , con $\underline{u} := \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$ il versore 'radiale' e con $\underline{w} := -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$ quello 'trasverso' (che ha il verso tale che $(\underline{u}, \underline{w})$ si possa ottenere dalla base canonica con una rotazione). Allora per $\underline{\phi} \in C^1$ e con ovvio significato dei simboli

$$\underline{\phi}(t) = x(t) \underline{e}_1 + y(t) \underline{e}_2 = \rho(t) (\cos \theta(t) \underline{e}_1 + \sin \theta(t) \underline{e}_2) = \rho(t) \underline{u}(t),$$

$$\underline{\phi}'(t) = \rho'(t) \underline{u}(t) + \rho(t) \theta'(t) \underline{w}(t), \quad |\underline{\phi}'(t)| = \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2}.$$

Quindi, se una curva $\underline{\phi}$ è data in *equazione polare* $\rho = \hat{\rho}(\theta)$, per $t = \theta$ abbiamo la seguente formula per la sua lunghezza

$$L(\underline{\phi}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\right)^2 + \hat{\rho}(\theta)^2} d\theta. \quad (3.2)$$

4. Cammini.

Si dice *cammino* una curva continua $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 a tratti, cioè per cui esiste una suddivisione $S = \{t_k : k = 0, \dots, N\}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, tale che $\underline{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]}$ sia di classe C^1 per $k = 1, \dots, N$. Ha senso parlare quindi di vettore tangente $\underline{\gamma}'(t)$, anche se in t_k , $k = 1, \dots, N$, si ha un vettore tangente sinistro $\underline{\gamma}'(t_k^-)$ e uno destro $\underline{\gamma}'(t_k^+)$ in generale diversi. Se inoltre per ogni k si ha che $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [t_{k-1}, t_k]$, il cammino si dice *regolare* (curva continua regolare a tratti). Il punto $\underline{\gamma}(a)$ è l'origine e $\underline{\gamma}(b)$ è l'estremità del cammino. Un cammino chiuso, cioè con $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$, si dice *circuito*. Il cammino $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *semplice* se $\underline{\gamma}$ è iniettiva; un circuito $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *circuito semplice* se $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ è l'unica eccezione all'iniettività, cioè se $\underline{\gamma}|_{[a, b]}$ è iniettiva. Infine, un cammino in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cammino con sostegno in D , cioè una funzione $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$.

Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un cammino, \hat{S} una qualunque suddivisione di $[a, b]$, e $\tilde{S} = \hat{S} \cup S$ con S come sopra (nella definizione di cammino). Allora poichè ogni tratto C^1 è rettificabile (Teorema 1.10) abbiamo

$$L_{\hat{S}} \leq L_{\tilde{S}} \leq \sum_{k=1}^N L(\underline{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]}) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\underline{\gamma}'(t)| dt.$$

Quindi $\underline{\gamma}$ è rettificabile ed essendo la lunghezza additiva (Proposizione 1.7) si ha

$$L(\underline{\gamma}) = \int_a^b |\underline{\gamma}'(t)| dt, \quad (4.1)$$

intendendo la somma degli integrali estesi ai tratti di classe C^1 .

Si dice che il cammino $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *equivalente* al cammino $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se esiste un diffeomorfismo, cioè una funzione biiettiva e di classe C^1 assieme all'inversa, $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$ con $p(c) = a$ e $p(d) = b$ tale che $\tilde{\gamma} = \underline{\gamma} \circ p$ (e naturalmente si ha $p'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in [c, d]$). La relazione tra cammini così introdotta è un'equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Cammini equivalenti hanno la stessa "orientazione"; invece se esiste un diffeomorfismo p come sopra ma con $u(c) = b$ e $u(d) = a$ allora $u'(\tau) < 0$ e il sostegno è "percorso in verso opposto". Dato un cammino $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diciamo suo *opposto* il cammino $-\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau \mapsto \underline{\gamma}(a + b - \tau)$. Inoltre se $a < c < b$, $\underline{\gamma}_1 := \underline{\gamma}|[a, c]$, $\underline{\gamma}_2 := \underline{\gamma}|[c, b]$, allora scriveremo $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2$.

5. Integrali curvilinei al differenziale d'arco.

Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ un cammino e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo allora *integrale curvilineo al differenziale d'arco* di f esteso a $\underline{\gamma}$ il numero reale

$$\int_{\underline{\gamma}} f ds := \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) |\underline{\gamma}'(t)| dt. \quad (5.1)$$

Notiamo che per $f = 1$ si ha $\int_{\underline{\gamma}} ds = L(\underline{\gamma})$.

Proposizione 5.1. *L'integrale curvilineo al differenziale d'arco $\int_{\underline{\gamma}} f ds$ è invariante passando da $\underline{\gamma}$ ad un cammino equivalente ed anche cambiando l'orientazione.*

Dimostrazione. Sia $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un diffeomorfismo. Se $p' > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} f ds &= \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) |\underline{\gamma}'(t)| dt = \int_c^d f(\underline{\gamma}(p(\tau))) |\underline{\gamma}'(p(\tau))| p'(\tau) d\tau = \\ &= \int_c^d f((\underline{\gamma} \circ p)(\tau)) |(\underline{\gamma} \circ p)'(\tau)| d\tau = \int_{\underline{\gamma \circ p}} f ds \end{aligned}$$

che è la prima parte della tesi. Inoltre, se $p' < 0$

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} f ds &= \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) |\underline{\gamma}'(t)| dt = \int_d^c f(\underline{\gamma}(p(\tau))) |\underline{\gamma}'(p(\tau))| p'(\tau) d\tau = \\ &= \int_c^d f(\underline{\gamma}(p(\tau))) |\underline{\gamma}'(p(\tau))| |p'(\tau)| d\tau = \int_c^d f((\underline{\gamma} \circ p)(\tau)) |(\underline{\gamma} \circ p)'(\tau)| d\tau = \int_{\underline{\gamma \circ p}} f ds. \end{aligned}$$

□

Esempio 5.2. Gli integrali curvilinei al differenziale d'arco sono importanti in Meccanica.

Ad esempio le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro di una curva materiale (filo, asta flessibile) omogenea $\underline{\gamma}$ in \mathbb{R}^3 sono

$$x_G := \frac{1}{L(\underline{\gamma})} \int_{\underline{\gamma}} x ds, \quad y_G := \frac{1}{L(\underline{\gamma})} \int_{\underline{\gamma}} y ds, \quad z_G := \frac{1}{L(\underline{\gamma})} \int_{\underline{\gamma}} z ds. \quad (5.2)$$

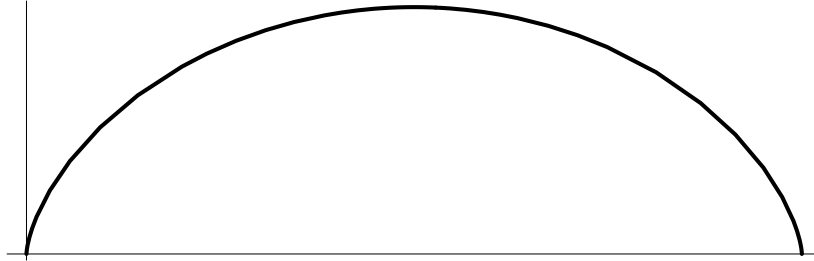
□

6. Esercizi.

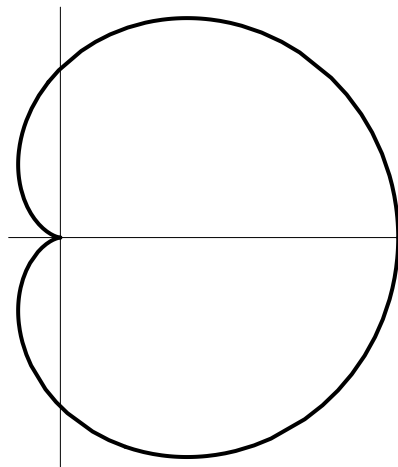
Esercizio 6.1. Mentre la ruota della bicicletta rotola senza strisciare, un punto del suo bordo, diciamo la valvola, descrive la *cicloide* $\underline{\phi} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto R(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

In questa formula $R > 0$ è la lunghezza del raggio della ruota e t è un opportuno angolo.

Dopo un giro completo (cioè per $t = 2\pi$), quanta strada ha percorso la valvola? In altri termini: quanto è lunga la cicloide? Risposta: $8R$. Così, se ad esempio $R = 1/2$ m, si ha che il centro della ruota percorre $2\pi R = \pi$ m, circa 3,14 m, e la valvola $8R = 4$ m.



Esercizio 6.2. La *cardioid* è la curva data dall'equazione polare $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ dove $a > 0$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$. Calcolare la lunghezza. Risposta: $16a$.



Esercizio 6.3. Calcolare la lunghezza della curva $\underline{\phi} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (2 \cos t, 3 \cos t - \cos(3t), 3 \sin t - \sin(3t))$. Risposta: $2\sqrt{10}$.

Esercizio 6.4. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\underline{\gamma}} xy \, ds$ esteso al quarto di ellisse $\underline{\gamma} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (2 \cos t, \sin t)$. Risposta: $14/9$.

Esercizio 6.5. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\underline{\gamma}} \sqrt{1 + x^2 + 3y} \, ds$ dove $\underline{\gamma}$ è l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ per $x \in [0, 3]$. Risposta: 39 .

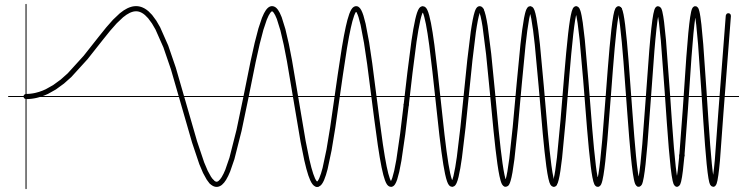
Esercizio 6.6. Determinare il baricentro della cicloide (vedi Esercizio 6.1 ed Esempio 5.2).

Risposta: $(\pi R, 4R/3)$.

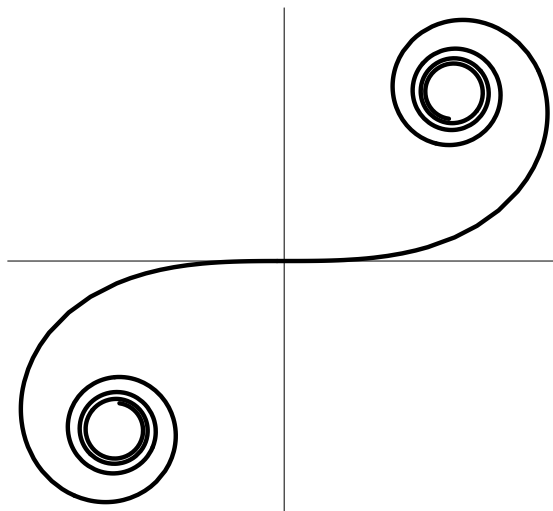
Esercizio 6.7. In Ottica (diffrazione di Fresnel) si incontra la *clotoide*

$$\underline{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\int_0^t \cos(u^2) du, \int_0^t \sin(u^2) du \right).$$

Il nome della curva è legato a Cloto, la Parca che filava lo stame della vita. Calcolando la lunghezza di un arco $\underline{\gamma}|[a, b]$, scoprire il significato di t . La curva ha limiti finiti per $t \rightarrow \pm\infty$. Si tratta di integrali impropri convergenti anche se gli integrandi non tendono a zero. La seguente figura mostra il grafico di $\sin(x^2)$



Verificare che la clotoide ha limiti finiti trasformando l'integrale di $\sin(u^2)$, fra 1 e \sqrt{a} per $a > 1$, con la sostituzione $v = u^2$, poi per parti considerando una primitiva di $\sin v$, infine passando al limite per $a \rightarrow +\infty$. Per altra via si può dimostrare che $\underline{\gamma}(t) \rightarrow (\sqrt{2\pi}/4, \sqrt{2\pi}/4)$ per $t \rightarrow +\infty$ (integrali di Fresnel). La clotoide descrive anche la velocità del baricentro di un'asta su un piano senza attrito soggetta ad una forza costante perpendicolare; si pensi ad un fuoco d'artificio a L su un lago ghiacciato.



7. Preliminari alle forme differenziali: spazio duale.

Sia $(\mathbb{R}^n)^*$ il duale di \mathbb{R}^n cioè lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dette *forme lineari* su \mathbb{R}^n . Naturalmente la somma di due forme lineari \mathcal{T}, \mathcal{F} è definita da $(\mathcal{T} + \mathcal{F})(\underline{x}) := \mathcal{T}(\underline{x}) + \mathcal{F}(\underline{x})$, inoltre il prodotto per lo scalare $a \in \mathbb{R}$ è $(a\mathcal{F})(\underline{x}) := a\mathcal{F}(\underline{x})$.

Consideriamo la base canonica di \mathbb{R}^n , $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, e sia $\underline{e}_i^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto x_i = \underline{e}_i \cdot \underline{x}$ la proiezione i -esima, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Data una forma lineare $\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{T}(\underline{x}) = \mathcal{T}(\sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{T}(\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(\underline{e}_i) \underline{e}_i^*(\underline{x})$. Quindi $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(\underline{e}_i) \underline{e}_i^*$ e vediamo che $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ è una base del duale detta *base canonica*.

Sia $*$: $\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, $\underline{v} \mapsto \underline{v}^*$ la funzione definita da tramite: $\underline{v}^*(\underline{x}) := \underline{v} \cdot \underline{x}$. Poichè $(\underline{v} + \underline{w})^*(\underline{x}) = (\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{x} = \underline{v} \cdot \underline{x} + \underline{w} \cdot \underline{x} = \underline{v}^*(\underline{x}) + \underline{w}^*(\underline{x})$, si ha che $(\underline{v} + \underline{w})^* = \underline{v}^* + \underline{w}^*$, e analogamente $(a\underline{v})^* = a\underline{v}^*$, quindi la funzione $*$ è lineare. L'immagine di \underline{e}_i tramite questa funzione è proprio la proiezione \underline{e}_i^* già vista prima. Usando la base canonica $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ del duale, una forma lineare \mathcal{T} si scrive in un solo modo come $\mathcal{T} = \sum T_i \underline{e}_i^*$ dove $T_i = \mathcal{T}(\underline{e}_i)$, queste sono le componenti di un vettore $\underline{T} \in \mathbb{R}^n$ e si ha $\underline{T}^* = \mathcal{T}$, infatti $\mathcal{T}(\underline{x}) = \sum_i T_i \underline{e}_i^*(\underline{x}) = \sum_i T_i x_i = \underline{T} \cdot \underline{x}$. Abbiamo quindi che l'applicazione $*$: $\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ è biettiva e associa vettori a forme che hanno le stesse componenti nelle basi canoniche di \mathbb{R}^n e del duale rispettivamente. Essendo biettiva e lineare, si dice che $*$ è un *isomorfismo* fra \mathbb{R}^n e il suo duale $(\mathbb{R}^n)^*$.

Si può definire la norma, il modulo, di una forma come il modulo del vettore corrispondente. Per i lettori matematicamente più esigenti quest'ultima frase può diventare: l'isomorfismo conserva la norma se consideriamo su \mathbb{R}^n la norma euclidea $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$ e sul duale la *norma operatoriale* $\|\mathcal{T}\| := \sup_{|\underline{u}| \leq 1} |\mathcal{T}(\underline{u})|$, infatti $\|\underline{v}^*\| = \sup_{|\underline{u}| \leq 1} |\underline{v} \cdot \underline{u}| = |\underline{v}|$.

Le proiezioni sono funzioni lineari e quindi $d\underline{e}_i^*(\underline{x}_0) = \underline{e}_i^*$ (preferiamo qui la notazione $d\underline{e}_i^*(\underline{x}_0)$ invece di $(\underline{e}_i^*)'(\underline{x}_0)$). Ciò suggerisce la notazione $dx_i := \underline{e}_i^*$ che useremo nel seguito.

Osservazione. In Meccanica Quantistica si usano le seguenti notazioni dovute a Dirac: $|\underline{x}\rangle$, $|\underline{v}\rangle$, detti “ket”, per i vettori \underline{x} , \underline{v} , dello spazio di partenza; $\langle \underline{v} |$, detto “bra”, per il vettore \underline{v}^* nello spazio duale; $\langle \underline{v} | \underline{x} \rangle$, detto “bracket”, per il valore $\underline{v}^*(\underline{x})$ di \underline{v}^* su \underline{x} , ovvero per il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{x}$. Inoltre con \dagger è la funzione qui denotata con $*$. \square

8. Forme differenziali.

Definizione 8.1. Si dice *forma differenziale (lineare)*, definita su un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, una applicazione $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.

Considerando la base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$, in ogni $\underline{x} \in D$ abbiamo

$$\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\underline{x}) dx_i, \quad \|\omega(\underline{x})\| = |w(\underline{x})|, \quad (8.1)$$

le funzioni $w_i : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto w_i(\underline{x})$ si dicono *coefficienti della forma differenziale* ω . Ci interessano le forme differenziali *continue* cioè con coefficienti continui; inoltre una forma differenziale sarà detta di classe C^k se tali sono i suoi coefficienti. Alla forma differenziale ω è associato il campo vettoriale che ha le stesse componenti (nelle basi canoniche di $(\mathbb{R}^n)^*$ e di \mathbb{R}^n rispettivamente): $\underline{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (w_1(\underline{x}), \dots, w_n(\underline{x}))$, e si ha $\underline{w}^* = \omega$, cioè $\underline{w}^*(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$ in ogni punto.

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 sull'aperto D , allora è definita la forma differenziale f' differenziale di f che qui preferiamo indicare con df :

$$df : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad x \mapsto df(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\underline{x}) dx_i. \quad (8.2)$$

Tali forme differenziali si dicono *differenziali esatti*

Definizione 8.2. Una forma differenziale $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si dice *esatta* o *integrabile* se esiste una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\omega = df$ e in tale caso f si dice *primitiva* di ω .

La traduzione di questa definizione nei termini del campo vettoriale \underline{w} associato a ω è che questo sia un *gradiente*: ω è esatta se e solo se esiste $f \in C^1(D; \mathbb{R})$ tale che

$$\underline{w}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in D. \quad (8.3)$$

La primitiva f si dice anche *potenziale* del campo vettoriale.

Proposizione 8.3. Se D è un aperto connesso di \mathbb{R}^n e $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ è esatta, allora esiste un'unica primitiva f di ω a meno di costanti additive.

Dimostrazione. Siano f, g primitive. Allora $df = \omega = dg$ dà $d(f - g)(\underline{x})\underline{h} = 0$ per ogni $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{x} \in D$, la funzione $f - g$ è costante avendo differenziale nullo in un aperto connesso (per un teorema noto). \square

Teorema 8.4. La forma differenziale $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, di classe C^1 sull'aperto D di \mathbb{R}^n , sia esatta. Allora i suoi coefficienti w_i soddisfano la seguente condizione:

$$\partial_i w_j = \partial_j w_i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (8.4)$$

Dimostrazione. Se esiste f tale che $\omega = df$ allora $w_j = \partial_j f$ per $j = 1, \dots, n$. Il teorema di Schwarz ci dà $\partial_i w_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j w_i$. \square

Definizione 8.5. Una forma differenziale $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ di classe C^1 si dice *chiusa* se soddisfa la condizione (8.4) che è necessaria per l'integrabilità.

Si noti che (8.4) sono uguaglianze fra funzioni, devono quindi valere in ogni punto del dominio.

Esempio 8.6. Facciamo vedere un esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta:

$$\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*, \quad \omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (8.5)$$

È definita sul piano senza un punto. Per vedere che è chiusa basta verificare la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Supponiamo per assurdo che sia esatta. Allora $\omega = df$ e, considerando la circonferenza $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, si ha il seguente ragionamento che porta alla contraddizione $0 = 2\pi$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(1, 0) - f(1, 0) = f(\underline{\gamma}(2\pi)) - f(\underline{\gamma}(0)) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (f \circ \underline{\gamma})(t) dt = \int_0^{2\pi} df(\underline{\gamma}(t))(\underline{\gamma}'(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \omega(\underline{\gamma}(t))(\underline{\gamma}'(t)) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

□

9. Integrali curvilinei.

Definizione 9.1. Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$ un cammino in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (curva continua C^1 a tratti) e $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale (continua). Si dice integrale di ω sulla curva $\underline{\gamma}$ il numero

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega := \int_a^b \omega(\underline{\gamma}(t))(\underline{\gamma}'(t)) dt. \quad (9.1)$$

Nella (9.1) al solito intendiamo la somma degli integrali sui tratti C^1 .

Definizione 9.2. Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$ un cammino nell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\underline{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Si dice integrale di \underline{w} sulla curva $\underline{\gamma}$ il numero

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{w} \cdot d\underline{\gamma} := \int_a^b \underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt. \quad (9.2)$$

In Fisica gli integrali curvilinei sono importanti. Per esempio nel caso in cui \underline{w} sia un campo di forze posizionali, la (9.2) dà il *lavoro* lungo il cammino $\underline{\gamma}$.

Se $\underline{w}(x)^* = \omega(\underline{x})$, per ogni $\underline{x} \in D$, allora

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega := \int_a^b \sum_{i=1}^n w_i(\underline{\gamma}(t)) dx_i(\underline{\gamma}'(t)) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n w_i(\underline{\gamma}(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_{\underline{\gamma}} \underline{w} \cdot d\underline{\gamma}. \quad (9.3)$$

Esempio 9.3. Consideriamo la seguente forma differenziale: $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, $(x, y) \mapsto y dx + xy dy$, che non è chiusa poichè $\partial_2 y = 1 \neq y = \partial_1(xy)$ per $y \neq 1$. Consideriamo anche il quarto di circonferenza percorso in verso antiorario $\underline{\gamma} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \omega &= \int_{\underline{\gamma}} (y dx + xy dy) = \int_0^{\pi/2} [\sin t(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t] dt = \\ &= \left[\frac{\sin t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dt - \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Nel seguente enunciato usiamo la notazione $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2$ introdotta alla fine della Sezione 4. La dimostrazione è banale, basta ricordare l'additività dell'integrale ordinario.

Proposizione 9.4. Siano $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2$ cammini nell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale continua, e $\underline{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo. Allora

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2} \omega, \quad \int_{\underline{\gamma}} \underline{w} \cdot d\underline{\gamma} = \int_{\underline{\gamma}_1} \underline{w} \cdot d\underline{\gamma}_1 + \int_{\underline{\gamma}_2} \underline{w} \cdot d\underline{\gamma}_2. \quad (9.4)$$

Nella prossima Proposizione riprendiamo il concetto di equivalenza fra cammini introdotto nella Sezione 4. Gli integrali curvilinei restano invariati nelle classi di equivalenza. Invece cambiano segno se passiamo al cammino opposto, a differenza degli integrali curvilinei al differenziale d'arco che non dipendono nemmeno dall'orientazione, come abbiamo visto nella Proposizione 5.1.

Proposizione 9.5. *Siano $\underline{\gamma}, \tilde{\underline{\gamma}}$ cammini equivalenti nell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale continua. Allora*

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{\underline{\gamma}}} \omega, \quad \int_{-\underline{\gamma}} \omega = - \int_{\underline{\gamma}} \omega. \quad (9.5)$$

Naturalmente valgono anche formule analoghe per i campi vettoriali.

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.4 (additività) basta considerare curve C^1 (i cammini sono C^1 a tratti). Sia $\omega = \underline{w}^*$, $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$, $\tilde{\underline{\gamma}} = \underline{\gamma} \circ p : [c, d] \rightarrow D$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \omega &= \int_a^b \underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt = \int_c^d \underline{w}(\underline{\gamma}(p(\tau))) \cdot \underline{\gamma}'(p(\tau)) p'(\tau) d\tau = \\ &= \int_c^d \underline{w}((\underline{\gamma} \circ p)(\tau)) \cdot (\underline{\gamma} \circ p)'(\tau) d\tau = \int_{\tilde{\underline{\gamma}}} \omega \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. Ricordando ora che $-\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$, $\tau \mapsto \underline{\gamma}(a+b-\tau)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\underline{\gamma}} \omega &= \int_a^b \underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt = - \int_b^a \underline{w}(\underline{\gamma}(a+b-\tau)) \cdot \underline{\gamma}'(a+b-\tau) d\tau = \\ &= \int_b^a \underline{w}(-\underline{\gamma}(\tau)) \cdot (-\underline{\gamma})'(\tau) d\tau = - \int_a^b \underline{w}(-\underline{\gamma}(\tau)) \cdot (-\underline{\gamma})'(\tau) d\tau = - \int_{-\underline{\gamma}} \omega. \end{aligned}$$

□

Proposizione 9.6. Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$ cammino nell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale continua. Allora

$$\left| \int_{\underline{\gamma}} \omega \right| \leq L(\underline{\gamma}) \max \{ \|\omega(\underline{x})\| : \underline{x} \in \underline{\gamma}([a, b]) \}. \quad (9.6)$$

Dimostrazione. Sia \underline{w} il campo vettoriale associato a ω , cioè $\underline{w}^* = \omega$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\underline{\gamma}} \omega \right| &= \left| \int_a^b \underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)| dt \leq \int_a^b |\underline{w}(\underline{\gamma}(t))| |\underline{\gamma}'(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |\underline{w}(\underline{\gamma}(t))| \int_a^b |\underline{\gamma}'(t)| dt = L(\underline{\gamma}) \max \{ \|\omega(\underline{x})\| : \underline{x} \in \underline{\gamma}([a, b]) \} \end{aligned}$$

vedi la (1.6) e la seconda formula in (8.1). \square

10. Primitive, omotopie e connessione semplice.

Nel seguente teorema usiamo il concetto di *circuito* introdotto nella Sezione 4.

Teorema 10.1. Sia D un aperto connesso di \mathbb{R}^n e $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale continua. Allora sono equivalenti:

- (a) $\int_{\underline{\gamma}} \omega = 0$ per ogni circuito $\underline{\gamma}$ in D ;
- (b) $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dipende solo dagli estremi $\underline{\gamma}(a)$ e $\underline{\gamma}(b)$ per ogni cammino $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$;
- (c) ω è esatta.

Se ω è esatta, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva, $\underline{x}_0, \underline{x} \in D$ e $\underline{\gamma}$ è un qualsiasi cammino in D con origine \underline{x}_0 ed estremo \underline{x} , allora

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \int_{\underline{\gamma}} \omega.$$

Dimostrazione. Faremo vedere (a) \implies (b) \implies (c) \implies (a). Assumiamo (a) e siano $\underline{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow D$, $\underline{\gamma}_2 : [c, d] \rightarrow D$ cammini con $\underline{\gamma}_1(a) = \underline{\gamma}_2(c)$ e $\underline{\gamma}_1(b) = \underline{\gamma}_2(d)$. Definiamo $\underline{\gamma} : [a, b + d - c] \rightarrow D$ tramite $\underline{\gamma}|_{[a, b]} = \underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}|_{[b, b + d - c]} = \underline{\gamma}_2 \circ p$ con $p(t) = b + d - t$. Il cammino $\underline{\gamma}$ è un circuito, infatti $\underline{\gamma}(b + d - c) = (\underline{\gamma}_2 \circ p)(b + d - c) = \underline{\gamma}_2(c) = \underline{\gamma}_1(a) = \underline{\gamma}(a)$. L'ipotesi (a) e la Proposizione 9.5 danno:

$$0 = \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2 \circ p} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{-\underline{\gamma}_2} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega - \int_{\underline{\gamma}_2} \omega$$

poichè $\underline{\gamma}_2 \circ p$ è equivalente a $-\underline{\gamma}_2$. Abbiamo quindi provato (b): $\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = \int_{\underline{\gamma}_2} \omega$.

Dobbiamo ora far vedere che (b) implica l'esistenza di $f \in C^1(D; \mathbb{R})$ tale che $\omega = df$. Fissiamo un punto $\underline{x}_0 \in D$. Poichè D è un aperto connesso, dato comunque $\underline{x} \in D$ esiste una poligonale $\underline{\gamma}_{\underline{x}} : [a, b] \rightarrow D$ con $\underline{\gamma}_{\underline{x}}(a) = \underline{x}_0$ e $\underline{\gamma}_{\underline{x}}(b) = \underline{x}$. Poniamo $f(\underline{x}) := \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}}} \omega$, questa è una buona definizione della funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ grazie all'ipotesi (b) (si noti che \underline{x}_0 è fissato e che il valore $f(\underline{x})$ non dipende dalla scelta della poligonale che congiunge \underline{x}_0 a \underline{x}). Dimostriamo che f è una primitiva per ω . Fissiamo anche $\underline{x} \in D$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ e facciamo vedere che esiste la derivata parziale $\partial_i f(\underline{x})$ ed è uguale al coefficiente della forma differenziale: $\partial_i f(\underline{x}) = w_i(\underline{x})$. Poichè D è aperto, esiste una palla aperta $B(\underline{x}; r) \subseteq D$, e $\underline{x} + h \underline{e}_i \in B(\underline{x}; r)$ per ogni $h \in]-r/2, r/2[$. Sia $\tilde{\gamma}_{\underline{x}} : [b, b + 1] \rightarrow D$, $t \mapsto \underline{x} + (t - b)h \underline{e}_i$ che ha per sostegno il segmento di estremi $\underline{x}, \underline{x} + h \underline{e}_i$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(\underline{x} + h \underline{e}_i) &= \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}} + \tilde{\gamma}_{\underline{x}}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}}} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_{\underline{x}}} \omega = f(\underline{x}) + \int_b^{b+1} \omega(\tilde{\gamma}_{\underline{x}}(t)) (\tilde{\gamma}'_{\underline{x}}(t)) dt = \\ &= f(\underline{x}) + \int_b^{b+1} w_i(\underline{x} + (t - b)h \underline{e}_i) h dt = f(\underline{x}) + \int_0^h w_i(\underline{x} + \tau \underline{e}_i) d\tau \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, siamo passati alla variabile $\tau = (t - b)h$. La funzione $\tau \mapsto w_i(\underline{x} + \tau \underline{e}_i)$ è continua in $]-r/2, r/2[$ e il teorema fondamentale del calcolo ci dice che $h \mapsto f(\underline{x} + h \underline{e}_i)$ è derivabile in $h = 0$, cioè esiste $\partial_i f(\underline{x})$, e si ha $\partial_i f(\underline{x}) = w_i(\underline{x})$. Essendo \underline{x} un qualsiasi punto di D , abbiamo provato che f è una primitiva di ω che quindi è esatta.

Proviamo infine (c) \implies (a). Sia $df = \omega$ e $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$ un circuito. Siano $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ tali che $\underline{\gamma}_k := \underline{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1$ per ogni $k = 1, \dots, N$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \omega &= \sum_{k=1}^N \int_{\underline{\gamma}_k} \omega = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underline{w}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \nabla f(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} f(\underline{\gamma}(t)) dt = \sum_{k=1}^N [f(\underline{\gamma}(t_k)) - f(\underline{\gamma}(t_{k-1}))] = f(\underline{\gamma}(b)) - f(\underline{\gamma}(a)) = 0 \end{aligned}$$

poichè $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ essendo $\underline{\gamma}$ un circuito. \square

Il seguente teorema dà una condizione sufficiente di integrabilità di una forma differenziale su un aperto ‘stellato’ D . Diremo nell’enunciato cosa intendiamo con tale aggettivo, ora avviciniamoci al concetto pensando che sia un insieme D che abbia un punto da cui “si veda tutto D ”.

Teorema 10.2. *Sia D un aperto stellato di \mathbb{R}^n , cioè esiste $\underline{x}_0 \in D$ tale che il segmento $[\underline{x}_0, \underline{x}] := \{\underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0) : t \in [0, 1]\} \subseteq D$ per ogni $\underline{x} \in D$, e sia $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale di classe C^1 chiusa. Allora ω è esatta e una primitiva è*

$$f(\underline{x}) := \int_0^1 \underline{w}(\underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0)) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) dt \quad (10.1)$$

dove \underline{w} è il campo vettoriale su D associato a ω , cioè $\underline{w}^* = \omega$.

In particolare sono stellati i *convessi* di \mathbb{R}^n : un insieme D è convesso se dati comunque $\underline{x}, \underline{y} \in D$ si ha che il segmento $[\underline{x}, \underline{y}] \subseteq D$. Una palla è convessa, il piano senza il semiasse negativo delle ascisse, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, è stellato ma non è convesso.

Per dimostrare il teorema precedente abbiamo bisogno del seguente teorema, importante in molte questioni, di cui riportiamo l’enunciato senza dimostrazione.

Teorema 10.3. (Derivazione sotto il segno di integrale). Sia $\underline{F} : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}^m$, dove $[a, b]$ è un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato) di \mathbb{R} e A è un aperto di \mathbb{R}^n , una funzione continua. Allora

$$\underline{f}(\underline{x}) := \int_a^b \underline{F}(t, \underline{x}) dt$$

è continua in A . Se inoltre esistono le derivate parziali $\frac{\partial \underline{F}}{\partial x_i}(t, \underline{x})$, $i = 1, \dots, n$, e sono funzioni continue di (t, \underline{x}) in $[a, b] \times A$, allora \underline{f} è di classe C^1 in A e le sue derivate parziali sono

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b \underline{F}(t, \underline{x}) dt = \int_a^b \frac{\partial \underline{F}}{\partial x_i}(t, \underline{x}) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione del Teorema 10.2. Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, la funzione f definita da (10.1) è di classe C^1 poichè così è la funzione integranda $[0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \underline{x}) \mapsto \underline{w}(\underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0)) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$, inoltre lo stesso teorema ci dice che per avere $\partial_i f$ possiamo portare l'operatore ∂_i sotto il segno di integrale. Per semplicità di notazioni trattiamo il caso in cui $\underline{x}_0 = 0$ ma è chiaro che il caso generale è del tutto analogo. Per $i = 1, \dots, n$ abbiamo:

$$\partial_i f(\underline{x}) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n w_j(t \underline{x}) x_j \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \partial_i w_j(t \underline{x}) t x_j \right) dt + \int_0^1 w_i(t \underline{x}) dt.$$

Ora usiamo la condizione di chiusura $\partial_i w_j = \partial_j w_i$, e poi integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \partial_i f(\underline{x}) &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \partial_j w_i(t \underline{x}) t x_j \right) dt + \int_0^1 w_i(t \underline{x}) dt = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} w_i(t \underline{x}) \right) t dt + \\ &+ \int_0^1 w_i(t \underline{x}) dt = \left[w_i(t \underline{x}) t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 w_i(t \underline{x}) dt + \int_0^1 w_i(t \underline{x}) dt = w_i(\underline{x}). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\partial_i f = w_i$ che è quello che volevamo provare. Incidentalmente, si osservi che $f \in C^2$. \square

Una conseguenza immediata del Teorema 10.2 è che ogni forma differenziale chiusa è *localmente esatta*, cioè

Corollario 10.4. *Sia $\omega : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale di classe C^1 chiusa sull'aperto D di \mathbb{R}^n . Fissato comunque $\underline{x} \in D$ esiste un suo intorno aperto $U \subseteq D$ tale che $\omega|_U$ sia esatta.*

Per U basta infatti prendere una palla aperta $B(\underline{x}) \subseteq D$ che è convessa.

Il Teorema 10.2 è interessante e di facile dimostrazione ma vogliamo trattare il problema anche per aperti più generali, che non siano necessariamente stellati. Sappiamo che ω è integrabile su un aperto connesso D quando $\int_{\underline{\gamma}} \omega = 0$ per ogni circuito $\underline{\gamma}$ in D . Particolari circuiti sono le curve costanti (il cui sostegno è un punto) e ovviamente $\int_{\underline{\gamma}} \omega = 0$ per tali circuiti. L'idea che vogliamo precisare è approssimativamente la seguente: se D è tale che ogni circuito in esso sia “deformabile con continuità” ad un punto (circuito costante), allora avremo che su un tale insieme ogni forma chiusa è esatta. Diremo che i circuiti $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ sono “omotopi” in D se $\underline{\alpha}$ si può trasformare in $\underline{\beta}$ con una “deformazione continua” restando sempre in D . Precisamente abbiamo la seguente definizione che riguarda curve continue $\underline{\alpha} : [0, 1] \rightarrow D$ che sono chiuse cioè con $\underline{\alpha}(0) = \underline{\alpha}(1)$ (non è qui rilevante considerare curve di classe C^1 a tratti).

Definizione 10.5. *Le curve continue chiuse $\underline{\alpha}, \underline{\beta} : [0, 1] \rightarrow D$, nell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, si dicono omotope in D se esiste una funzione continua (detta omotopia) $\underline{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tale che (i) $\underline{h}(t, 0) = \underline{\alpha}(t)$, e $\underline{h}(t, 1) = \underline{\beta}(t)$, per ogni $t \in [0, 1]$; e inoltre (ii) $\underline{h}(0, \lambda) = \underline{h}(1, \lambda)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$.*

Si pensi ad una famiglia di curve \underline{h}_λ definite da $\underline{h}_\lambda(t) = \underline{h}(t, \lambda)$. Al variare di λ una curva si trasforma nell'altra in modo continuo e ogni stadio della deformazione è una curva

chiusa. Nella Definizione 10.5 si considerano curve definite su $[0, 1]$, il caso generale si riporta subito a questo con trasformazioni affini, non insistiamo su questo facile punto.

L'omotopia è una relazione di equivalenza. Infatti la riflessività si prova considerando l'omotopia $\underline{h}(t, \lambda) = \underline{\alpha}(t)$, la simmetria con $\tilde{\underline{h}}(t, \lambda) = \underline{h}(t, 1 - \lambda)$, dove \underline{h} è omotopia fra $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$; infine, in quest'ultima ipotesi, e se \underline{k} è un'omotopia fra le curve chiuse $\underline{\beta}$ e $\underline{\gamma}$, allora la seguente funzione è un'omotopia fra $\underline{\alpha}$ e $\underline{\gamma}$:

$$\underline{h} * \underline{k} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D, \quad (t, \lambda) \mapsto \begin{cases} \underline{h}(t, 2\lambda) & \text{per } \lambda \in [0, 1/2] \\ \underline{k}(t, 2\lambda - 1) & \text{per } \lambda \in]1/2, 1] \end{cases} \quad (10.2)$$

ed è continua perché per $\lambda = 1/2$ si ha $\underline{h}(t, 2(1/2)) = \underline{\beta}(t) = \underline{k}(t, 2(1/2) - 1)$.

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

Teorema 10.6. *Sia D un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ forma differenziale di classe C^1 chiusa. Se $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ sono circuiti omotopi in D allora*

$$\int_{\underline{\alpha}} \omega = \int_{\underline{\beta}} \omega. \quad (10.3)$$

Definizione 10.7. *Un aperto connesso $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni curva continua chiusa in D è omotopa ad una curva costante (brevemente: omotopa ad un punto).*

Proposizione 10.8. *Ogni aperto stellato $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Sia $\underline{x}_0 \in D$ un punto come nell'enunciato del Teorema 10.2 (cioè un punto da cui si vede tutto D), e sia $\underline{\phi} : [0, 1] \rightarrow D$ una curva continua chiusa. Allora $\underline{h}(t, \lambda) = (1 - \lambda)\underline{\phi}(t) + \lambda\underline{x}_0$ è omotopia fra $\underline{\phi}$ e il circuito costante $[0, 1] \rightarrow D, t \mapsto \underline{x}_0$. \square

Il seguente risultato fondamentale è una conseguenza immediata del Teorema 10.1 e del Teorema 10.6 che non abbiamo dimostrato, in compenso abbiamo dimostrato il Teorema 10.2 che è un caso particolare notevole (Proposizione 10.8).

Corollario 10.9. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso. Ogni forma differenziale di classe C^1 e chiusa $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ è esatta.

Esempio 10.10. Il piano senza un punto, ad esempio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, non è semplicemente connesso. Infatti basta considerare la forma differenziale (8.5) che è chiusa ma non esatta (vedi Esempio 8.6). \square

Esercizio 10.11. Consideriamo la trasformazione $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, fra coordinate polari e coordinate cartesiane nel piano. Provare che per $\rho > 0$ è localmente invertibile. Provare anche che, detta $(\rho(x, y), \theta(x, y))$ un'inversa locale, si ha $d\theta(x, y) = \omega(x, y)$ con ω come in (8.5) forma differenziale chiusa ma non esatta di cui $(x, y) \mapsto \theta(x, y)$ è una primitiva locale. In particolare una primitiva nel semipiano $x > 0$ è $\arctan(y/x)$ mentre $-\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ è primitiva per $y < 0$ (si considerino anche i semipiani $x < 0$ e $y > 0$). Possiamo anche lavorare nell'aperto stellato che si ottiene eliminando il semiasse negativo delle x dove una primitiva è

$$\theta(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}. \quad (10.4)$$

Si noti che tutte queste funzioni coincidono nell'intersezione dei loro domini. \square

Omettiamo di dimostrare il seguente fatto molto intuitivo.

Esempio 10.12. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso (così come $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per $n \geq 3$). \square

Esempio 10.13. \mathbb{R}^3 privato di una retta, esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$, non è semplicemente connesso. Infatti basta considerare la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (10.5)$$

\square

11. Esercizi svolti.

Esercizio 11.1. Sia $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > -1\}$ e consideriamo la forma differenziale $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$

$$\omega(x, y, z) := \left(A \frac{y}{1+x} + B \sin(2x) \right) dx + (Cy \cos z + H \ln(1+x)) dy + (Ky^2 \sin z) dz.$$

i) Per quali costanti reali A, B, C, H, K la forma è esatta?

ii) Calcolare una primitiva di ω quando è esatta.

Soluzione.

i) Essendo D un aperto semplicemente connesso, la forma ω che è di classe C^1 è esatta se e solo se è chiusa cioè se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \omega_3}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}(x, y, z) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{A}{1+x} = \frac{H}{1+x} \\ -Cy \sin z = 2Ky \sin z \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} H = A \\ K = -C/2 \end{cases}$$

La forma quindi è esatta se e solo se

$$\omega(x, y, z) = \left(A \frac{y}{1+x} + B \sin(2x) \right) dx + (Cy \cos z + A \ln(1+x)) dy - \frac{Cy^2 \sin z}{2} dz \quad (11.1)$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ arbitrarie.

ii) Poichè D è prodotto di intervalli, possiamo calcolare una primitiva f integrando

(11.1) lungo la poligonale $((0, 0, 0), (x, 0, 0), (x, y, 0), (x, y, z))$

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \int_0^x w_1(\xi, 0, 0) d\xi + \int_0^y w_2(x, \eta, 0) d\eta + \int_0^z w_3(x, y, \zeta) d\zeta = \\
 &= \int_0^x B \operatorname{sen}(2\xi) d\xi + \int_0^y (C\eta + A \ln(1+x)) d\eta - \frac{1}{2} \int_0^z Cy^2 \operatorname{sen} \zeta d\zeta = \\
 &= \left[-\frac{B}{2} \cos(2\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} + \left[\frac{C}{2} \eta^2 + A\eta \ln(1+x) \right]_{\eta=0}^{\eta=y} + \left[\frac{C}{2} y^2 \cos \zeta \right]_{\zeta=0}^{\zeta=z} = \\
 &= \frac{1}{2} (-B \cos(2x) + B + Cy^2 + 2Ay \ln(1+x) + Cy^2 \cos z - Cy^2) = \\
 &= Ay \ln(1+x) + B \operatorname{sen}^2 x + \frac{C}{2} y^2 \cos z.
 \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.2. Sia

$$\omega(x, y) = \left(2x + \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy.$$

- i) Trovare il dominio D cioè il massimo insieme del piano dove ha senso.
- ii) La forma $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ è chiusa? È esatta?
- iii) Si calcoli l'integrale curvilineo di ω sul cammino γ dato dall'equazione $x^2 + y^2 = 2$ nel primo quadrante, orientato nel verso delle y decrescenti.

Soluzione.

- i) Il dominio D è il semipiano aperto $x + y > 0$.
- ii) Essendo il dominio convesso, la forma è esatta se e solo se è chiusa. La condizione di chiusura è verificata, infatti:

$$\partial_2 \omega_1(x, y) = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} = \partial_1 \omega_2(x, y).$$

iii) Per rispondere si può parametrizzare il cammino come $\underline{\gamma} : [0, \pi/2] \rightarrow D$, $t \mapsto \sqrt{2}(\cos(-t + \pi/2), \sin(-t + \pi/2)) = \sqrt{2}(\sin(t), \cos(t))$, ma conviene scegliere un altro cammino con gli stessi estremi, in particolare il segmento, poichè sappiamo che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi (Teorema 10.1).

Possiamo anche trovare una primitiva f di ω e poi calcolare la differenza fra i valori di f nell'estremo e nell'origine di $\underline{\gamma}$

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = f(\sqrt{2}, 0) - f(0, \sqrt{2}). \quad (11.2)$$

Scegliamo quest'ultima strada.

Non essendo D prodotto di intervalli, non possiamo questa volta usare la stessa tecnica dell'Esercizio 11.1 perché quelle poligonali possono uscire da D . Proviamo invece nel seguente modo: cerchiamo una primitiva in y di $\omega_2(x, y)$, che è $x \ln(x + y) + g(x)$ con g funzione arbitraria di classe C^1 ; imponiamo poi la condizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \omega_1(x, y) \quad \iff \quad \ln(x + y) + \frac{x}{x + y} + g'(x) = 2x + \ln(x + y) + \frac{x}{x + y}$$

da cui $g'(x) = 2x$ che dà $g(x) = x^2 + c$ con c costante arbitraria. Abbiamo trovato la primitiva $f(x, y) = x \ln(x + y) + x^2$. Quindi (11.2) dà

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 0) + 2 - 0 \ln(0 + \sqrt{2}) - 0 = 2 + \sqrt{2} \ln \sqrt{2}.$$

□

Osservazione. Il metodo usato nell'esercizio precedente può essere descritto con la seguente *proposizione* di immediata verifica: sia $\omega(x, y) := w_1(x, y)dx + w_2(x, y)dy$ una forma differenziale C^1 su un aperto D del piano; supponiamo di aver trovato due funzioni $h, k \in C^2(D)$ tali che (i) $\partial_y h \equiv w_2$, (ii) $\partial_y k \equiv 0$, (iii) $\partial_x k \equiv w_1 - \partial_x h$; allora $h + k$ è una primitiva di ω . □

Esercizio 11.3. Sia $f \in C^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e si consideri la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$

$$\omega(x, y) := \left(xf(x^2 + y^2) - \frac{cy}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{y + cx}{x^2 + y^2} dy.$$

- i) Per quali funzioni $f \in C^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$ e costanti $c \in \mathbb{R}$ la forma ω è chiusa?
- ii) Per quali funzioni $f \in C^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$ e costanti $c \in \mathbb{R}$ la forma ω è esatta? (Usare il seguente fatto: una forma chiusa è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se e solo se il suo integrale sul circolo unitario $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ è nullo).
- iii) Calcolare le primitive di ω quando è esatta.

Soluzione.

- i) Detti w_i i coefficienti della forma differenziale ω , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(xf(x^2 + y^2) - \frac{cy}{x^2 + y^2} \right) = xf'(x^2 + y^2) \cdot 2y - c \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= 2xyf'(x^2 + y^2) + c \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y + cx}{x^2 + y^2} \right) = \frac{c(x^2 + y^2) - 2x(y + cx)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy + c(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

La forma differenziale ω è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \iff 2xyf'(x^2 + y^2) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Equivalentemente, se e solo se per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$f'(x^2 + y^2) = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \iff f'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad \text{per ogni } t > 0.$$

In definitiva, la forma ω è chiusa se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(t) = \frac{1}{t} + a, \quad t > 0. \quad (11.3)$$

ii) L'integrale di ω sul circolo unitario è

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \omega &= \int_0^{2\pi} [(\cos t f(1) - c \sin t) (-\sin t) + (\sin t + c \cos t) \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-f(1) + 1) \cos t \sin t + c] dt = 2\pi c = 0 \quad \iff \quad c = 0. \end{aligned}$$

Quindi ω è esatta se e solo se $c = 0$ ed esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che valga la (11.3); in tal caso si ha

$$\omega(x, y) = \left(ax + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy. \quad (11.4)$$

iii) Cerchiamo una primitiva F con la tecnica vista nell'esercizio precedente. Una primitiva in y di $\omega_2(x, y)$ è

$$\int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x)$$

con g funzione arbitraria di classe C^1 . Imponiamo poi la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \omega_1(x, y) \quad \iff \quad \frac{x}{x^2 + y^2} + g'(x) = ax + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

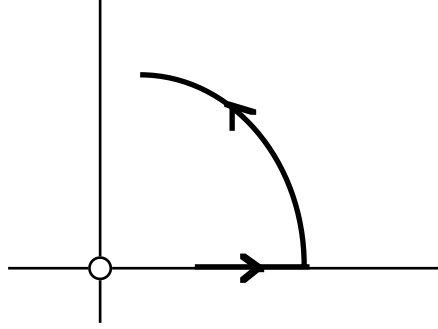
da cui $g'(x) = ax$ che dà $g(x) = ax^2/2 + c$ con c costante arbitraria. Abbiamo trovato

$$F(x, y) = \frac{a}{2} x^2 + \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (11.5)$$

che è una primitiva su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Potevamo anche trovare una primitiva sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ (che è il dominio della forma senza il semiasse $x < 0$) integrando lungo il cammino in figura. Percorriamo l'asse x da $(1, 0)$ a $(\rho(x, y), 0)$, con $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè il segmento

$\underline{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $t \mapsto (1 + t(\rho(x, y) - 1), 0)$, e poi l'arco di circonferenza da $(\rho(x, y), 0)$ a (x, y) cioè $\underline{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $t \mapsto \rho(x, y) (\cos(t\theta(x, y)), \sin(t\theta(x, y)))$ dove $\theta(x, y) \in] - \pi, \pi[$ è la funzione in (10.4).



$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{\underline{\sigma}} \omega + \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_0^1 \left(a(1 + t(\rho - 1)) + \frac{1 + t(\rho - 1)}{(1 + t(\rho - 1))^2} \right) (\rho - 1) dt + \\
 &+ \int_0^1 \left(\left(a\rho \cos(t\theta) + \frac{\rho \cos(t\theta)}{\rho^2} \right) (-\rho\theta \sin(t\theta)) + \frac{\rho \sin(t\theta)}{\rho^2} \rho\theta \cos(t\theta) \right) dt = \\
 &= \left[a \left(t + \frac{t^2}{2}(\rho - 1) \right) (\rho - 1) + \ln(1 + t(\rho - 1)) - \frac{a\rho^2}{2} \sin^2(t\theta) \right]_{t=0}^{t=1} = \\
 &= \frac{a}{2}(\rho^2 - 1) + \ln \rho - \frac{a}{2} \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - 1) + \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{a}{2} y^2
 \end{aligned}$$

che coincide con la $F(x, y)$ in (11.5) a meno di una costante additiva. La formula così trovata per la primitiva funziona in realtà anche nei punti $(x, 0)$, $x < 0$, che avevamo escluso, e dà una primitiva in tutto il dominio della forma: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. \square

Cap. II: Superfici e Teoremi di Stokes e Gauss

12. Teorema di Green.

Una curva $\underline{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e con $\underline{\phi}'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$ si dice regolare. Sappiamo che queste curve si possono riparametrizzare con un diffeomorfismo crescente passando al parametro d'arco.

Una curva continua di classe C^1 a tratti si dice cammino e un cammino si dice regolare se tali sono i suoi tratti. Un *circuito regolare* $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un cammino regolare chiuso, cioè con $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$, e si dice *semplice* se la restrizione $\underline{\gamma}|[a, b[$ è iniettiva.

L'integrale curvilineo di una forma differenziale (continua) ω esteso a un cammino regolare è la somma degli integrali curvilinei sui tratti C^1 che lo compongono. D'altra parte, su ciascun tratto C^1 , l'integrale curvilineo non cambia se passiamo al parametro d'arco. Quindi per circuiti regolari semplici, che ci interessano nel seguito, si può parlare di integrali curvilinei *estesi ai sostegni orientati* per cui useremo la notazione

$$\int_{+\Gamma} \omega := \int_{\underline{\gamma}} \omega,$$

dove $+\Gamma$ è il 'sostegno orientato' del circuito regolare semplice $\underline{\gamma}$.

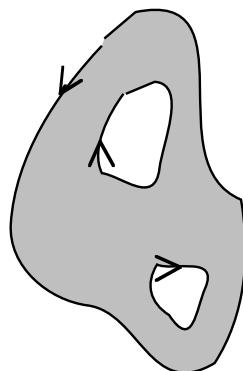
Qui ci interessano i circuiti regolari piani $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Indichiamo con $\underline{T}(t) := \underline{\gamma}'(t)/|\underline{\gamma}'(t)|$ il *versore tangente* e con $\underline{N}(t) := (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))/|\underline{\gamma}'(t)|$ il *versore normale* che abbiamo qui scelto fra i due versori ortogonali a $\underline{T}(t)$ in modo che la coppia ordinata $(\underline{N}(t), \underline{T}(t))$ si ottenga dalla canonica $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ con una rotazione propria. In altri termini, se consideriamo i corrispondenti vettori di \mathbb{R}^3 , $\underline{\tilde{N}}(t) := (N_1(t), N_2(t), 0)$ e $\underline{\tilde{T}}(t) :=$

$(T_1(t), T_2(t), 0)$, allora il loro prodotto esterno dà il terzo versore della base canonica di \mathbb{R}^3 come mostra il seguente determinante formale

$$\tilde{N}(t) \wedge \tilde{T}(t) = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\gamma_2'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|} & -\frac{\gamma_1'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|} & 0 \\ \frac{\gamma_1'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|} & \frac{\gamma_2'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|} & 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$$

Diciamo *dominio regolare piano* ogni compatto (chiuso e limitato) $D \subset \mathbb{R}^2$ che sia la chiusura di un aperto connesso la cui frontiera ∂D sia unione di un numero finito di sostegni di circuiti regolari semplici. Per definizione (di dominio regolare piano) ammettiamo inoltre la possibilità di scegliere ognuno di tali circuiti $\underline{\gamma}_i$ in modo che $\underline{N}(t)$ punti sempre fuori di D nei punti non angolosi. Allora diciamo che ogni curva (sostegno orientato) $+\Gamma_i$ di ∂D è orientata *coerentemente* a D e all'orientazione del piano (il verso di percorrenza così fissato lascia D solo alla sinistra). Data una forma differenziale (continua) $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ su un aperto $\Omega \supset D$, poniamo

$$\int_{+\partial D} \omega := \sum_i \int_{+\Gamma_i} \omega.$$



Si dimostra facilmente che il sostegno $\underline{\phi}([a, b])$ di una curva regolare è di misura n-dimensionale nulla. La frontiera ∂D di un dominio regolare D ha misura nulla essendo unione finita di sostegni di curve regolari. Questo risultato garantisce che D sia misurabile elementarmente, cioè alla Peano Jordan.

Osservazione. Chi non avesse familiarità con la teoria della misura, prenda per buona l'esistenza degli integrali doppi di funzioni continue estesi a un compatto misurabile D di \mathbb{R}^2 . \square

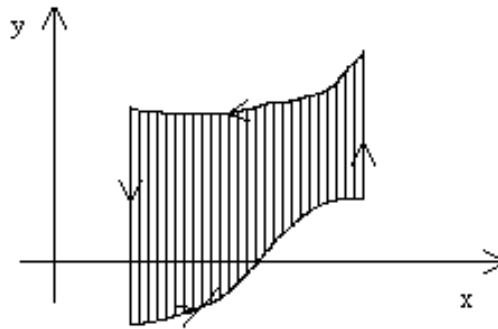
Siamo ora in grado di vedere il

Teorema di Green. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare piano, e P, Q funzioni a valori reali di classe C^1 in un aperto $\Omega \supset D$. Allora

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\partial D} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) . \quad (12.1)$$

Come conseguenza immediata della (12.1) si ha la seguente formula per l'area di D ottenuta ponendo $Q(x, y) = x$ e $P(x, y) = -y$:

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y dx + x dy) . \quad (12.2)$$



Non dimostriamo il teorema nella massima generalità. Ci accontentiamo di provare la (12.1) nel caso in cui $Q \equiv 0$ e D è un dominio regolare normale rispetto all'asse x , cioè

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad (12.3)$$

con $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 e $\alpha \leq \beta$. Usando la formula di riduzione degli integrali doppi abbiamo

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x))) dx.$$

D'altra parte, ponendo $\underline{\gamma}_\alpha(t) := (t, \alpha(t))$, $\underline{\gamma}_\beta(t) := (t, \beta(t))$, e osservando che è nullo il contributo dei segmenti verticali al seguente integrale, abbiamo

$$\int_{+\partial D} P(x, y) dx = \int_{\underline{\gamma}_\alpha} P(x, y) dx + \int_{-\underline{\gamma}_\beta} P(x, y) dx = \int_a^b (P(x, \alpha(x)) - P(x, \beta(x))) dx.$$

Ovviamente la dimostrazione si estende subito a domini regolari che si possono decomporre in un numero finito di domini regolari normali rispetto all'asse x . Si fanno dei "tagli" paralleli all'asse y e si osserva che gli integrali curvilinei lungo i tagli si cancellano a coppie. Osserviamo infine che il suddetto ragionamento permette di provare la (12.1) anche per $Q \neq 0$ se D è un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi cartesiani. \square

Esempio 12.1. Con il teorema di Green calcoliamo il seguente integrale doppio

$$I = \iint_D x^2 y^2 dx dy \quad \text{con} \quad D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0. \quad (12.4)$$

Usiamo la (12.1) con $P \equiv 0$ e $Q(x, y) = x^3 y^2 / 3$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} Q(x, y) dy \quad \text{cioè} \quad \iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_{+\partial D} \frac{x^3 y^2}{3} dy.$$

Possiamo parametrizzare l'ellisse $+\partial D$ con il circuito regolare semplice $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$. Si osservi che il verso di percorrenza è corretto poichè lascia D a sinistra (verso antiorario). Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_{+\partial D} \frac{x^3 y^2}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (a \cos t)^3 (b \sin t)^2 b \cos t dt = \frac{a^3 b^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt = \\ &= \frac{4 a^3 b^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt = \frac{4 a^3 b^3}{3} \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} \right) = \frac{\pi a^3 b^3}{24}. \end{aligned}$$

\square

Esempio 12.2. Con il teorema di Green calcoliamo l'area dell'ellisse D in (12.4). Usiamo la formula (12.2) parametrizzando $+\partial D$ come nell'esempio precedente

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y dx + x dy) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-b \sin t (-a \sin t) + a \cos t (b \cos t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \end{aligned}$$

□

Esempio 12.3. Con il teorema di Green calcoliamo il seguente integrale doppio

$$I = \iint_D (x + 2y) dx dy \quad (12.5)$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato dall'asse x e dalla cicloide $\underline{\phi} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

Usiamo la (12.1) con $Q \equiv 0$ e $P(x, y) = -xy - y^2$

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{+\partial D} P(x, y) dx \quad \text{cioè} \quad \iint_D (x + 2y) dx dy = \int_{+\partial D} (-xy - y^2) dx.$$

Tenendo conto del fatto che il segmento di asse x dà contributo nullo perchè lì $y = 0$, e che la curva $\underline{\phi}$ è orientata in modo opposto a $+\partial D$ abbiamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\underline{\phi}} (-xy - y^2) dx = - \int_{\underline{\phi}} (-xy - y^2) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2] (1 - \cos t) dt = \dots = 5\pi + 3\pi^2. \end{aligned}$$

□

Esempio 12.4. Con il teorema di Green calcoliamo il seguente integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x} dx dy \quad \text{con} \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}. \quad (12.6)$$

Usiamo la (12.1) con $Q \equiv 0$ e $P(x, y) = -y/(1+x)$

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{+\partial D} P(x, y) dx \quad \text{cioè} \quad \iint_D \frac{1}{1+x} dx dy = \int_{+\partial D} \frac{-y}{1+x} dx.$$

La regione D è racchiusa dalle due parabole $y = x^2$ e $x = y^2$ la prima va orientata nel senso delle x crescenti, la seconda in quello delle x decrescenti. Quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{-x^2}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{-\sqrt{x}}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} 2t dt = \\ &= - \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx + 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = \\ &= - \left[\frac{x^2}{2} - x + \log(1+x) \right]_0^1 + 2 \left[t - \arctan t \right]_0^1 = \frac{5-\pi}{2} - \log 2. \end{aligned}$$

□

13. Area di superfici.

Sia D un compatto di \mathbb{R}^2 , chiusura di un aperto connesso, che sia anche misurabile alla Peano Jordan (vedi l'Osservazione prima del Teorema di Green). Diciamo *superficie* (parametrica) in \mathbb{R}^3 di classe C^k , dove $k \geq 1$, una funzione $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \underline{\mathcal{S}}(u, v)$ di classe C^k . Cioè esiste Ω aperto di \mathbb{R}^2 tale che $\Omega \supset D$ e $\underline{\mathcal{S}}$ è la restrizione a D di una funzione di classe C^k su Ω . Dato $(u_0, v_0) \in D$ consideriamo i vettori di \mathbb{R}^3

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (13.1)$$

l'ultimo vettore essendo il prodotto esterno dei primi due. Se $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow D$ è una curva C^1 con $\underline{\gamma}(0) = (u_0, v_0)$, allora la curva $\underline{\Gamma} := \underline{\mathcal{S}} \circ \underline{\gamma}$ è giacente sulla superficie e passa per il punto $\underline{\mathcal{S}}(u_0, v_0)$. Il vettore tangente a questa curva in $t = 0$ è

$$\underline{\Gamma}'(0) = \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u_0, v_0) \gamma_1'(0) + \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u_0, v_0) \gamma_2'(0),$$

ed è una combinazione lineare dei primi due vettori in (13.1). Se questi due vettori sono linearmente indipendenti è allora naturale dire *piano tangente* alla superficie in $\underline{\mathcal{S}}(u_0, v_0)$ il piano per quel punto da essi generato. Il terzo vettore è detto invece *vettore normale* alla superficie in $\underline{\mathcal{S}}(u_0, v_0)$ essendo ortogonale ai primi due. Il modulo del vettore normale è l'area del parallelogramma individuato dai primi due vettori in (13.1), quando è diverso da zero è definito il *versore normale*

$$\underline{\nu}(u_0, v_0) := \frac{\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u_0, v_0) \right|}. \quad (13.2)$$

Si dice *area della superficie* $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 il numero nonnegativo

$$\iint_D \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) \right| du dv. \quad (13.3)$$

Se la superficie è data in *forma cartesiana* dall'equazione $z = f(x, y)$ con $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, cioè se $\underline{\mathcal{S}}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, allora l'area è

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (13.4)$$

Infatti,

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & \partial f / \partial x \\ 0 & 1 & \partial f / \partial y \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \underline{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \underline{e}_2 + \underline{e}_3. \quad (13.5)$$

Esempio 13.1. Calcoliamo l'area della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Come primo passo calcoliamo l'area della sua porzione data in forma cartesiana dall'equazione $z = f(x, y)$

dove $f : D_a = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a < r\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Si tratta di una funzione di classe C^1 con

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

(si noti che la disuguaglianza stretta $a < r$ è necessaria). La formula (13.4) dà

$$\begin{aligned} \iint_{D_a} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy &= r \iint_{D_a} \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= r \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho \right) d\theta = 2\pi r \left[-\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=a} = 2\pi r \left(-\sqrt{r^2 - a^2} + r \right). \end{aligned}$$

Passando al limite per $a \rightarrow r$ si ha $2\pi r^2$ e quindi l'area della sfera $4\pi r^2$.

Usando invece la seguente rappresentazione parametrica, e quindi la (13.3), non occorre fare alcun limite

$$\underline{\mathcal{S}} : D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto r \sin \theta \cos \phi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3. \quad (13.6)$$

Con semplici calcoli si ha

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \phi}(\phi, \theta) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \theta}(\phi, \theta) = -r \sin \theta \underline{\mathcal{S}}(\phi, \theta), \quad (13.7)$$

nel punto $\underline{x} = \underline{\mathcal{S}}(\phi, \theta)$ è un vettore parallelo ad \underline{x} ma di verso opposto (si ricordi che $\theta \in [0, \pi]$). Con la scelta che abbiamo fatto della parametrizzazione possiamo quindi pensare di avere “l'orientazione entrante nella palla”; naturalmente scambiando i ruoli di ϕ e θ avremmo la “normale uscente”. Il modulo del vettore in (13.7) è $r^2 \sin \theta$ che è nullo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, cioè ai poli della sfera (sostegno di $\underline{\mathcal{S}}$). Questa mancanza di regolarità ai poli è naturalmente legata alle variabili ϕ, θ . Per l'area ritroviamo il valore familiare

$$\iint_D \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \phi}(\phi, \theta) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \theta}(\phi, \theta) \right| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \right) d\phi = 4\pi r^2.$$

□

Sia $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie di classe C^1 , e sia $\underline{\mathcal{R}} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie equivalente a $\underline{\mathcal{S}}$ cioè esista un diffeomorfismo $\underline{g} : E \rightarrow D$ tale che $\underline{\mathcal{R}} = \underline{\mathcal{S}} \circ \underline{g}$ (al solito \underline{g} è la restrizione al compatto misurabile E di un diffeomorfismo fra aperti di \mathbb{R}^2). Indicato con $(u, v) = (U(\xi, \eta), V(\xi, \eta)) = \underline{g}(\xi, \eta)$ il cambio di variabili, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial \xi}, & \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} \right) \det \underline{g}' \end{aligned} \quad (13.8)$$

con $\underline{g}'(\xi, \eta)$ matrice Jacobiana. Per il teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali multipli, e per la (13.8), abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_D \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) \right| du dv &= \\ = \iint_E \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(\underline{g}(\xi, \eta)) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(\underline{g}(\xi, \eta)) \right| \left| \det \underline{g}'(\xi, \eta) \right| d\xi d\eta &= \\ = \iint_E \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Ciò dimostra il seguente fatto

Proposizione. *L'area di una superficie di classe C^1 non cambia se la riparametriamo con un diffeomorfismo.*

14. Operatori differenziali e integrali superficiali.

Nel seguito Ω sarà sempre un aperto di \mathbb{R}^3 . Diciamo *campo scalare* una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e *campo vettoriale* una $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Gradiente di un campo scalare f di classe C^1 è il campo vettoriale continuo

$$\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} \underline{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_3. \quad (14.1)$$

L'operatore ∇ è una funzione fra insiemi di funzioni, e manda un campo scalare di classe C^1 su Ω , in un campo vettoriale continuo; in simboli $\nabla : C^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$ e si ha

$$\nabla = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (14.2)$$

Divergenza di un campo vettoriale $\underline{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \underline{e}_i$, di classe C^1 , è il campo scalare continuo

$$\operatorname{div} \underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (14.3)$$

L'operatore $\operatorname{div} : C^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow C^0(\Omega; \mathbb{R})$ si può pensare come prodotto scalare formale $\nabla \cdot \underline{F} := \operatorname{div} \underline{F}$.

Rotore di un campo vettoriale \underline{F} di classe C^1 , è il campo vettoriale continuo

$$\operatorname{rot} \underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \underline{e}_3.$$

Ma è più semplice ricordarlo come prodotto esterno formale fra (14.2) e \underline{F} :

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$

L'operatore $\operatorname{rot} : C^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$, a differenza dei precedenti, ha senso solo per \mathbb{R}^3 .

Un campo vettoriale $\underline{F} \in C^1$ si dice *solenoidale* se $\operatorname{div} \underline{F} \equiv 0$, si dice invece *irrotazionale* se $\operatorname{rot} \underline{F} \equiv 0$.

Un campo vettoriale $\underline{F} \in C^0$ si dice *conservativo* se è un gradiente, cioè se esiste un campo scalare f di classe C^1 , detto *potenziale di \underline{F}* , tale che $\underline{F} = \nabla f$. Se il potenziale f è di classe C^2 , dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste si

ha $\operatorname{rot} \nabla f \equiv 0$: un campo di classe C^1 conservativo è irrotazionale. Il viceversa non è in generale vero, ma lo è se Ω è semplicemente connesso. Tutto ciò lo abbiamo già visto parlando di forme differenziali chiuse e esatte (vedi Cap. I, Sezione 10); infatti l'irrotazionalità di \underline{F} equivale alla chiusura della forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ e \underline{F} è conservativo se e solo se ω è esatta (si noti però che ha senso parlare di chiusura di una forma in dimensione qualsiasi). Il seguente campo vettoriale è irrotazionale ma non è conservativo (vedi Esempio 8.6)

$$\underline{w} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{w}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (14.4)$$

Abbiamo già visto che se $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ è un cammino (curva continua C^1 a tratti) e $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale continuo, allora l'integrale di \underline{F} su $\underline{\gamma}$ è definito come

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot d\underline{\gamma} := \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt. \quad (14.5)$$

Qui ci interessa in particolare che $\underline{\gamma}$ sia un circuito (cammino chiuso); in quel caso (14.5) si chiama anche *circuitazione* del campo vettoriale \underline{F} su $\underline{\gamma}$. Come visto all'inizio di questa dispensa, se $\underline{\gamma}$ è un circuito regolare semplice, possiamo parlare di circuitazione sul suo sostegno orientato $+\Gamma$ e per essa useremo la notazione

$$\int_{+\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{T} ds := \int_{+\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_{\underline{\gamma}} \underline{F} \cdot d\underline{\gamma}. \quad (14.6)$$

Introduciamo ora il concetto di *integrale superficiale*, o *flusso*, di un campo vettoriale. Sia $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo e $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \Omega$ una superficie in Ω di classe C^1 (vedi l'inizio della Sezione 2 per le ipotesi su D). Si dice flusso di \underline{F} attraverso $\underline{\mathcal{S}}$ il numero

$$\iint_{\underline{\mathcal{S}}} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma := \iint_D \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) du dv \quad (14.7)$$

(nel termine a sinistra troviamo il versore normale $\underline{\nu}$ ed il simbolo $d\sigma$ che possiamo dire “elemento d’area”).

Il nome “flusso” è giustificato dal fatto che se $\underline{F}(x, y, z) = \mu(x, y, z) \underline{v}(x, y, z)$ con μ densità di massa e \underline{v} velocità di un fluido, allora il flusso di \underline{F} attraverso $\underline{\mathcal{S}}$ è la massa di fluido che attraversa la superficie nell’unità di tempo.

Vediamo come si comporta il flusso riparametrizzando $\underline{\mathcal{S}}$. Sia $\underline{\mathcal{R}} = \underline{\mathcal{S}} \circ \underline{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ come nel ragionamento che include la (13.8). Il determinante Jacobiano $\det \underline{g}'$ è una funzione continua mai nulla. Quindi o è sempre strettamente positivo o sempre strettamente negativo, si ricordi infatti che D è la chiusura di un aperto *connesso*. Se indichiamo con ϵ il suo segno, nel primo caso abbiamo $\epsilon = 1$ e nel secondo $\epsilon = -1$. Usando la (13.8) abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma &= \iint_D \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} du dv = \\ &= \iint_E \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{g}(\xi, \eta))) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(\underline{g}(\xi, \eta)) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(\underline{g}(\xi, \eta)) \left| \det \underline{g}'(\xi, \eta) \right| d\xi d\eta = \\ &= \epsilon \iint_E \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}}{\partial \eta} d\xi d\eta = \epsilon \iint_{\underline{\mathcal{R}}} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma. \end{aligned}$$

Ciò dimostra il seguente fatto

Proposizione. *Il flusso di un campo vettoriale continuo attraverso una superficie di classe C^1 non cambia se la riparametriamo con un diffeomorfismo a determinante Jacobiano positivo. Diventa invece l’opposto se il determinante Jacobiano è negativo.*

Esempio 14.1. Calcoliamo il flusso del rotore del campo vettoriale $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (z - y, z + x, -x - y)$ attraverso la porzione di paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ data da $z \geq 0$. Sia $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 4 - x^2 - y^2$ e $\underline{\mathcal{S}}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Allora ricordando la (13.5) abbiamo

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \underline{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = 2x \underline{e}_1 + 2y \underline{e}_2 + \underline{e}_3. \quad (14.8)$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{rot} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(x, y)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} = \\
& = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) 2x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) 2y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = -4x + 4y + 2. \\
& \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma = \iint_D \operatorname{rot} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(x, y)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} dx dy = \\
& = \iint_D (-4x + 4y + 2) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 8\pi
\end{aligned}$$

il penultimo passaggio essendo dovuto al fatto che gli integrali sul cerchio delle funzioni $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ sono nulli per motivi di simmetria. \square

Infine, definiamo gli *integrali superficiali al differenziale d'area* per completezza di discorso anche se non ne avremo bisogno nel seguito. Si usa questo termine per

$$\iint_{\underline{\mathcal{S}}} f d\sigma := \iint_D f(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) \right| du dv \quad (14.9)$$

dove $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è un campo scalare continuo e $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \Omega$ è una superficie C^1 nell'aperto Ω di \mathbb{R}^3 . Naturalmente, il caso particolare $f \equiv 1$ ci dà l'area della superficie (vedi formula (13.3)).

Esempio 14.2. Sia $\underline{\mathcal{S}}$ come nell'Esempio 14.1 una porzione di paraboloide. Calcoliamone l'area e l'integrale superficiale (14.9) con $f(x, y, z) = z$. Dalla (14.8) si ha subito per l'area

$$\begin{aligned}
\iint_{\underline{\mathcal{S}}} d\sigma &= \iint_D \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} \right| dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \iint_{\Delta} \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{12} (4\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

dove $\Delta := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Invece

$$\begin{aligned}
\iint_{\underline{\mathcal{S}}} f d\sigma &:= \iint_D f(x, y, 4-x^2-y^2) \left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} \right| dx dy = \iint_{\Delta} \rho (4 - \rho^2) \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta = \\
&= 2\pi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho = \dots
\end{aligned}$$

\square

Esempio 14.3. Gli integrali superficiali al differenziale d'area sono importanti in Meccanica. Ad esempio le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro di una superficie materiale (guscio, membrana) omogenea $\underline{\mathcal{S}}$ in \mathbb{R}^3 sono

$$x_G := \frac{1}{\text{area}(\underline{\mathcal{S}})} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} x \, d\sigma, \quad y_G := \frac{1}{\text{area}(\underline{\mathcal{S}})} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} y \, d\sigma, \quad z_G := \frac{1}{\text{area}(\underline{\mathcal{S}})} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} z \, d\sigma.$$

□

15. Teorema di Stokes.

Preliminarmente, richiamiamo il Teorema di Green. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare piano e $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 (estendibili a funzioni C^1 in un aperto), allora

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right) du \, dv = \int_{+\partial D} (P(u, v) du + Q(u, v) dv). \quad (15.1)$$

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema di Stokes che enunceremo alla fine. Sia $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo su Ω aperto di \mathbb{R}^3 , e $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \Omega$ una superficie C^1 con D dominio regolare piano. Sia inoltre $\underline{\gamma}_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uno dei circuiti componenti $+\partial D$, e $+\Gamma_i$ il sostegno orientato di $\underline{\gamma}_i$. Consideriamo la circuitazione di \underline{F} su $\underline{\mathcal{S}}(+\Gamma_i)$:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\Gamma_i)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds &= \int_a^b \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}_i(t))) \cdot (\underline{\mathcal{S}} \circ \underline{\gamma}_i)'(t) \, dt = \\ &= \int_a^b \left(\underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}_i(t))) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(\underline{\gamma}_i(t)) \gamma'_{i1}(t) + \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}_i(t))) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(\underline{\gamma}_i(t)) \gamma'_{i2}(t) \right) dt = \\ &= \int_{\underline{\gamma}_i} \left(\underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) du + \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) dv \right). \end{aligned}$$

Sommando sui circuiti abbiamo quindi la circuitazione di \underline{F} su $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$

$$\int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \sum_i \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\Gamma_i)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_{+\partial D} (P(u, v) du + Q(u, v) dv)$$

dove abbiamo posto

$$P(u, v) := \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v), \quad Q(u, v) := \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v). \quad (15.2)$$

Vogliamo usare la (15.1). Pertanto supponiamo che P e Q in (15.2) siano di classe C^1 ; ciò sarà vero se $\underline{\mathcal{S}} \in C^2$ e $\underline{F} \in C^1$ rafforzando le ipotesi fin qui usate. Calcoliamo quindi l'integrando del termine di sinistra in (15.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_j}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_j}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate miste. Scambiando i e j il termine fra parentesi cambia segno ed è nullo quando $i = j$; accoppiando il termine ij con quello ji abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial v} \right) \\ &= \text{rot } \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v}(u, v) \right). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato il:

Teorema di Stokes. Sia $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale C^1 nell'aperto Ω di \mathbb{R}^3 ed $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \Omega$ una superficie di classe C^2 con $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare piano. Allora

$$\iint_{\underline{\mathcal{S}}} \text{rot } \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma = \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds. \quad (15.3)$$

Il flusso del rotore di \underline{F} è uguale alla circuitazione di \underline{F} sul trasformato del bordo di D : $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$.

Osserviamo che, nelle ipotesi del teorema di Green, ponendo $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, 0)$, e $\underline{F}(x, y, z) = P(x, y)\underline{e}_1 + Q(x, y)\underline{e}_2$, la (15.3) ci dà la (15.1) (verificarlo).

La formula che abbiamo dimostrato coinvolge il trasformato $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$ del bordo di D che non coincide necessariamente con quello che è intuitivamente “il bordo della superficie”. Vediamo due esempi.

Esempio 15.1. Consideriamo la *sfera*. Si tratta di una superficie intuitivamente “senza bordo”. Usiamo la parametrizzazione in (2.6)

$$\underline{\mathcal{S}} : D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto r \sin \theta \cos \phi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3,$$

dove ϕ è la longitudine e θ la colatitudine. Il bordo del rettangolo $+\partial D$, percorso in senso antiorario, viene trasformato da $\underline{\mathcal{S}}$ nel seguente circuito sulla sfera: il lato inferiore $[0, 2\pi] \times \{0\}$ ha per immagine il polo nord, il lato destro $\{2\pi\} \times [0, \pi]$ va nel semimeridiano “di Greenwich” percorso da nord a sud, il lato superiore $[0, 2\pi] \times \{\pi\}$ si riduce al polo sud, infine il lato sinistro $\{0\} \times [0, \pi]$ è ancora il semimeridiano “di Greenwich” ma percorso da sud a nord. Per ogni campo vettoriale $\underline{F} \in C^1$ la circuitazione su $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$ è nulla dato che i contributi relativi al semimeridiano si elidono e quindi il teorema di Stokes dà $\iint_{\underline{\mathcal{S}}} \text{rot } \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma = 0$. \square

Esempio 15.2. Consideriamo ora

$$\underline{\mathcal{S}} : D = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \eta) \mapsto r \cos \phi \underline{e}_1 + r \sin \phi \underline{e}_2 + h\eta \underline{e}_3.$$

Si tratta della superficie laterale di un *cilindro* circolare retto di raggio $r > 0$ e altezza $h > 0$ (farsi una figura). Il lato inferiore del rettangolo D si trasforma nella circonferenza inferiore (sul piano $z = 0$) percorsa in senso antiorario, il lato destro va nel segmento verticale $[(r, 0, 0), (r, 0, h)]$ percorso dal basso all’alto, il lato superiore va nella circonferenza

superiore (sul piano $z = h$) percorsa in senso orario, infine il lato sinistro di $+\partial D$ diventa il segmento verticale di prima ma percorso ora dall'alto al basso. Dato un campo vettoriale $\underline{F} \in C^1$ si ha che la circuitazione $\int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} ds$ coincide con la somma delle circuitazioni sulle due circonferenze poichè i contributi dovuti al segmento verticale si elidono. \square

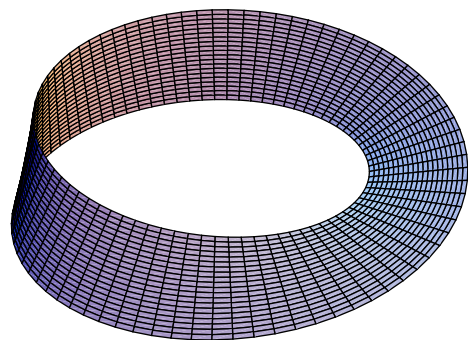
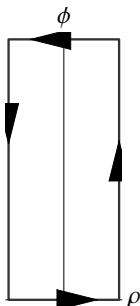
In questi esempi abbiamo visto che $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$ è più grande del 'bordo intuitivo' di $\underline{\mathcal{S}}$ ma le parti in più danno contributo nullo. Ciò non è però sempre vero come vedremo con il nastro di Möbius fra poco. Nel caso particolare di $\underline{\mathcal{S}}$ iniettiva e con $\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial v} \neq 0$ in tutto D , possiamo parlare senz'altro di 'bordo di $\underline{\mathcal{S}}$ ' invece che di 'trasformato del bordo di D ', queste superfici sono dette *regolari*.

16. Il nastro di Möbius.

Prendiamo un nastro rettangolare e attacchiamo le due estremità dopo averne rovesciata una dando così una torsione di 180° alla striscia. In questo modo otteniamo una superficie detta *nastro (o anello) di Möbius*. Una rappresentazione parametrica della superficie è

$$\underline{\mathcal{S}} : D_a = [-1, 1] \times [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\rho, \phi) \mapsto \left(R + \rho \cos \frac{\phi}{2} \right) \underline{u}(\phi) + \rho \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \underline{e}_3 \quad (16.1)$$

$$\text{con} \quad \underline{u}(\phi) = \cos \phi \underline{e}_1 + \operatorname{sen} \phi \underline{e}_2.$$



Nella formula (16.1) il parametro $R > 1$ è legato alla forma del nastro di Möbius come vedremo fra poco, invece il parametro $a \in \mathbb{R}$ non ha nessuna influenza sul sostegno della superficie parametrica cioè su $\underline{\mathcal{S}}(D_a)$ ma ha un'influenza sui termini del teorema di Stokes tanto da renderli non significativi per una superficie come questa “non orientabile”. Diremo qualcosa di più su cosa intendiamo con questo termine, ora diciamo subito che il teorema di Stokes parametrico, dimostrato nel paragrafo precedente, continua a valere anche in questo caso. Il problema non è la validità dell'uguaglianza, ma il significato dei suoi termini.

Cerchiamo innanzi tutto di capire la formula (16.1). Per ciascun ϕ fissato si ha la funzione affine di ρ , il segmento, $\underline{l}_\phi : \rho \mapsto \underline{\mathcal{S}}(\rho, \phi)$ che ha come punto medio

$$\underline{c}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\left(R - \cos \frac{\phi}{2} \right) \underline{u}(\phi) - \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \underline{e}_3 + \left(R + \cos \frac{\phi}{2} \right) \underline{u}(\phi) + \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \underline{e}_3 \right) = R \underline{u}(\phi).$$

Inoltre il segmento \underline{l}_ϕ ha lunghezza costantemente uguale a 2 come si vede facilmente. Al variare di ϕ , il centro del segmento $\underline{c}(\phi)$ descrive la circonferenza del piano $z = 0$ di centro l'origine e raggio R mentre il segmento \underline{l}_ϕ ruota mantenendosi perpendicolare alla circonferenza (dato che entrambi i vettori $\underline{u}(\phi)$ e \underline{e}_3 lo sono). Mentre ϕ varia di 2π , il segmento ruota attorno alla circonferenza di solo 1/2 giro e il suo centro percorre l'intera circonferenza.

La funzione $\underline{\mathcal{S}}$ è iniettiva salvo sui lati del rettangolo: $[-1, 1] \times \{a\}$ e $[-1, 1] \times \{a + 2\pi\}$.

Calcolando la circuitazione di un campo vettoriale su $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D_a)$ il lato superiore nella figura va percorso in senso opposto a quello inferiore e si tratta dello stesso segmento di \mathbb{R}^3 percorso nello stesso verso

$$\begin{aligned} \underline{l}_{a+2\pi}(-\rho) &= \left(R - \rho \cos \frac{a+2\pi}{2} \right) \underline{u}(a+2\pi) - \rho \operatorname{sen} \frac{a+2\pi}{2} \underline{e}_3 \\ &= \left(R + \rho \cos \frac{a}{2} \right) \underline{u}(a) + \rho \operatorname{sen} \frac{a}{2} \underline{e}_3 = \underline{l}_a(\rho). \end{aligned}$$

I due integrali non si elidono come nell'Esempio 15.2 ma anzi si sommano e la circuitazione dipende in generale da a . D'altra parte se calcoliamo il flusso di un campo vettoriale attraverso $\underline{\mathcal{S}}$ troviamo un risultato che dipende da a : per esempio il flusso del campo costante \underline{e}_3 è $-8R \sin(a/2)$ come vedremo nell'Esempio 16.1. Chiaramente un tale flusso non ha alcun interesse poichè dipende dalla parametrizzazione.

In definitiva il teorema di Stokes parametrico continua a valere ma non ha senso. Ciò è legato al fatto che $\underline{\mathcal{S}}$ non è orientabile, cioè non è possibile definire sul sostegno $\underline{\mathcal{S}}(D_a)$ un campo *continuo* di versori normali, un fatto che accettiamo senza dimostrazione.

Esempio 16.1. Calcoliamo il flusso del campo \underline{e}_3 attraverso la superficie $\underline{\mathcal{S}}$ in (16.1). È

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \rho}(\rho, \phi) &= \cos \frac{\phi}{2} \underline{u}(\phi) + \sin \frac{\phi}{2} \underline{e}_3, \\ \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \phi}(\rho, \phi) &= -\frac{\rho}{2} \sin \frac{\phi}{2} \underline{u}(\phi) + \left(R + \rho \cos \frac{\phi}{2} \right) (-\sin \phi \underline{e}_1 + \cos \phi \underline{e}_2) + \frac{\rho}{2} \cos \frac{\phi}{2} \underline{e}_3, \\ \underline{e}_3 \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \phi} &= \cos \frac{\phi}{2} \left(R + \rho \cos \frac{\phi}{2} \right), \\ \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \underline{e}_3 \cdot \underline{\nu} d\sigma &:= \iint_D \underline{e}_3 \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial \phi} d\rho d\phi = \int_a^{a+2\pi} \int_{-1}^1 \cos \frac{\phi}{2} \left(R + \rho \cos \frac{\phi}{2} \right) d\rho d\phi \\ &= \int_a^{a+2\pi} \int_{-1}^1 R \cos \frac{\phi}{2} d\rho d\phi = 2R \int_a^{a+2\pi} \cos \frac{\phi}{2} d\phi = \left[4R \sin \frac{\phi}{2} \right]_a^{a+2\pi} = -8R \sin \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

□

17. Potenziale vettore, connessione superficiale semplice.

Siano $\underline{F}, \underline{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ campi vettoriali sull'aperto Ω di \mathbb{R}^3 con \underline{A} di classe C^1 . Se $\underline{F} = \text{rot } \underline{A}$ allora diciamo che \underline{A} è un *potenziale vettore* per \underline{F} e che \underline{F} è un *rotore*.

Abbiamo già osservato che per un qualsiasi campo scalare f , di classe C^2 su un aperto Ω di \mathbb{R}^3 , si ha $\text{rot } \nabla f \equiv 0$; quindi, se \underline{A} è un potenziale vettore per \underline{F} , allora anche $\underline{A} + \nabla f$ lo

è. Se Ω è inoltre semplicemente connesso (vedi Sezione 10 del Cap. I) allora ogni potenziale vettore è del tipo $\underline{A} + \nabla f$, infatti, se \underline{A} e \underline{B} sono potenziali vettori, allora $\underline{F} = \text{rot } \underline{B} = \text{rot } \underline{A}$ dà $\text{rot}(\underline{B} - \underline{A}) = 0$ e il campo vettoriale $\underline{B} - \underline{A}$ è un gradiente essendo irrotazionale.

Vediamo ora una condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale vettore per un campo vettoriale di classe C^1 .

Proposizione 17.1. *Un campo vettoriale $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, di classe C^1 nell'aperto Ω di \mathbb{R}^3 , che sia un rotore, è solenoidale: $\text{div } \underline{F} \equiv 0$.*

Dimostrazione. Se $\underline{F} = \text{rot } \underline{A}$ allora $\text{div } \underline{F} = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \partial_1 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \partial_2 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \partial_3 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = 0$ per il teorema di Schwarz. \square

La condizione $\text{div } \underline{F} \equiv 0$ è anche sufficiente perchè un campo vettoriale C^1 sia un rotore? Il problema dell'esistenza di un potenziale vettore è simile a quello di un potenziale scalare: grezzamente un campo vettoriale è un gradiente se e solo se è irrotazionale ed è un rotore se e solo se è solenoidale. Ma sappiamo che ci sono campi vettoriali irrotazionali che non sono gradienti, analogamente nell'Esempio 17.4 vedremo che il campo elettrostatico è solenoidale ma non è un rotore. Nella teoria del potenziale scalare un ruolo cruciale hanno gli aperti semplicemente connessi su cui i campi irrotazionali sono tutti gradienti. Il campo elettrostatico è definito su \mathbb{R}^3 privato di un punto che è un aperto semplicemente connesso. Per la teoria del potenziale vettore il concetto chiave non è la connessione semplice, enunciamolo senza dimostrazione:

Teorema 17.2. *Un aperto connesso Ω di \mathbb{R}^3 è detto a connessione superficiale semplice se per ogni aperto limitato Λ di \mathbb{R}^3 si ha: $\partial\Lambda \subseteq \Omega \implies \Lambda \subseteq \Omega$. Su un tale aperto Ω un campo vettoriale $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 è un rotore se e solo se è solenoidale $\text{div } \underline{F} \equiv 0$.*

Nella Proposizione 10.8 del Cap. I avevamo visto che un aperto *stellato* è semplicemente connesso. Ora vediamo che è pure a connessione superficiale semplice, così abbiamo una vasta classe di aperti comuni ai due concetti.

Proposizione 17.3. *Un aperto stellato Ω di \mathbb{R}^3 è a connessione superficiale semplice.*

Dimostrazione. Sia infatti Ω stellato rispetto al suo punto \underline{x}_0 , cioè il segmento $[\underline{x}_0, \underline{x}] := \{\underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0) : t \in [0, 1]\} \subseteq \Omega$ per ogni $\underline{x} \in \Omega$. Sia inoltre Λ un aperto limitato con $\partial\Lambda \subseteq \Omega$ e, per assurdo, supponiamo che esista $\underline{x}_1 \in \Lambda$ con $\underline{x}_1 \notin \Omega$. Si consideri la semiretta di origine \underline{x}_0 per \underline{x}_1 . Dopo \underline{x}_1 , nessun punto di tale semiretta sta in Ω e qualche punto non sta in Λ , dato che Λ è limitato. Se $\underline{x}_2 \notin \Lambda$ è uno di questi punti, qualche punto del segmento $[\underline{x}_1, \underline{x}_2]$ sta in $\partial\Lambda$ e quindi in Ω , assurdo. \square

L'aperto che si ottiene da \mathbb{R}^3 cavando un punto \underline{x}_0 è semplicemente connesso ma non è a connessione superficiale semplice come si vede subito considerando una palla aperta limitata Λ di centro \underline{x}_0 , e su questi aperti esistono campi solenoidali che non sono rotori (vedi Esempio 17.4). Invece l'aperto che si ottiene cavando una retta da \mathbb{R}^3 è a connessione superficiale semplice (accettiamolo senza prova) ma, come sappiamo, non è semplicemente connesso.

Esempio 17.4. Sia $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e su questo aperto consideriamo il campo vettoriale

$$\underline{E}(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} = \nabla \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x}|} \quad (17.1)$$

che rappresenta il *campo elettrostatico* generato da una carica puntiforme q posta nell'origine (in opportune unità di misura). Come mostra la (17.1), è un campo conservativo, cioè è un gradiente e in particolare è irrotazionale. È anche *solenoidale*, infatti

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|\underline{x}|^3} \right) = \frac{1}{|\underline{x}|^3} - \frac{3x_i^2}{|\underline{x}|^5}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\operatorname{div} \underline{E}(\underline{x}) = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x}|^3} - \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x}|^5} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0. \quad (17.2)$$

Ma \underline{E} non è un rotore. Infatti, supponiamo per assurdo che esista \underline{A} tale che $\underline{E} = \operatorname{rot} \underline{A}$. Nell'Esempio 15.1, usando il teorema di Stokes, abbiamo visto che è nullo il flusso del rotore di un qualsiasi campo C^1 attraverso la sfera \underline{S} , di centro l'origine e raggio $r > 0$. Applicando questo risultato al campo \underline{A} si ha

$$0 = \iint_{\underline{S}} \operatorname{rot} \underline{A} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma = \iint_{\underline{S}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma. \quad (17.3)$$

Se il campo elettrostatico fosse un rotore il suo flusso attraverso la sfera sarebbe nullo.

Calcoliamo direttamente il flusso. Dalla (13.7) abbiamo

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{S}(\phi, \theta)) \cdot \frac{\partial \underline{S}}{\partial \phi}(\phi, \theta) \wedge \frac{\partial \underline{S}}{\partial \theta}(\phi, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{S}(\phi, \theta)}{r^3} \cdot (-r \operatorname{sen} \theta \underline{S}(\phi, \theta)) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{sen} \theta, \\ \iint_{\underline{S}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma &= \iint_D \underline{E}(\underline{S}(\phi, \theta)) \cdot \frac{\partial \underline{S}}{\partial \phi}(\phi, \theta) \wedge \frac{\partial \underline{S}}{\partial \theta}(\phi, \theta) \, d\phi \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right) d\phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \neq 0 \end{aligned} \quad (17.4)$$

che contraddice (17.3) e prova che \underline{E} non può essere un rotore. Incidentalmente, osserviamo che quello che abbiamo appena calcolato è il “flusso entrante” nella sfera, naturalmente il “flusso uscente” è q/ϵ_0 ed è indipendente dal raggio della sfera. Nel prossimo paragrafo introdurremo il concetto di “flusso uscente” che qui abbiamo usato in modo intuitivo riferendoci alla semplice sfera. \square

Osservazione. Certamente non diciamo “patologico” il campo elettrostatico che è solenoidale ma non è un rotore. Analogamente dovrebbero esserci familiari i campi irrotazionali che non sono conservativi, come il (14.4). \square

18. Teorema della divergenza di Gauss.

Un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^3 si dice *regolare* se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 , tale che A e la sua frontiera ∂A siano dati rispettivamente da

$$A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) < 0\}, \quad \partial A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) = 0\}, \quad (18.1)$$

e valga la seguente proprietà

$$\nabla f(\underline{x}) \neq 0 \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \partial A. \quad (18.2)$$

Inoltre un aperto regolare soddisfa una condizione che vedremo fra poco.

Il vettore $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale all'insieme ∂A in \underline{x}_0 e punta verso l'esterno dato che $f < 0$ dentro A e $f > 0$ fuori. Usiamolo per orientare ∂A verso l'esterno, ottenendo così $+\partial A$. Per definizione (di aperto regolare) ammettiamo di poter fornire un numero finito di superfici regolari $\underline{\mathcal{S}}_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \underline{\mathcal{S}}_j(u, v)$, con D_j chiusura di un aperto connesso limitato e misurabile di \mathbb{R}^2 , che sono tali che (i) il versore normale

$$\underline{\nu}(u, v) := \frac{\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial v}(u, v) \right|} = \frac{\nabla f(\underline{\mathcal{S}}_j(u, v))}{|\nabla f(\underline{\mathcal{S}}_j(u, v))|}, \quad (18.3)$$

(ii) $\partial A = \cup_j \underline{\mathcal{S}}_j(D_j)$ ed infine (iii) l'intersezione $\underline{\mathcal{S}}_i(D_i) \cap \underline{\mathcal{S}}_j(D_j)$ sia un'unione finita di sostegni di cammini regolari semplici per ogni $i \neq j$. Dato un campo vettoriale continuo \underline{F} su un insieme che contiene la chiusura $\bar{A} := A \cup \partial A$, definiamo quindi il *flusso di \underline{F} uscente da A* , o flusso attraverso $+\partial A$, tramite

$$\begin{aligned} \iint_{+\partial A} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma &:= \sum_j \iint_{\underline{\mathcal{S}}_j} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma = \\ &= \sum_j \iint_{D_j} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}_j(u, v)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}_j}{\partial v}(u, v) du dv \end{aligned} \quad (18.4)$$

che è ben definito dato che si può provare che è indipendente dalla scelta delle suddette superfici regolari $\underline{\mathcal{S}}_j$. Si noti $+\partial A$ può essere un'unica superficie chiusa come una sfera o

una ciambella toroidale, ma anche più superfici come ad esempio due sfere concentriche che racchiudono il solido \bar{A} , in questo caso il versore della normale esterna punta fuori per la grande e punta verso il centro per la piccola.

Osservazione. La condizione (18.2), grazie al teorema della funzione implicita di Dini, ci permette di affermare che, fissato ad arbitrio un punto $\underline{x}_0 \in \partial A$, esiste un suo opportuno intorno in \mathbb{R}^3 in cui ∂A è il grafico di una funzione C^1 di due coordinate cartesiane. Per esempio, se $\partial_1 f(\underline{x}_0) \neq 0$ allora si può esplicitare localmente $x = h(y, z)$ e la $\underline{\mathcal{S}}(u, v) = (h(u, v), u, v)$, oppure $\underline{\mathcal{S}}(u, v) = (h(v, u), v, u)$, localmente sono una buona rappresentazione parametrica di $+\partial A$. \square

Possiamo quindi enunciare l'importante teorema di Gauss della divergenza

Teorema di Gauss. Sia $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 nell'aperto Ω di \mathbb{R}^3 , e sia A un aperto regolare di \mathbb{R}^3 (connesso e limitato) con chiusura $\bar{A} \subset \Omega$. Allora l'integrale della divergenza è uguale al flusso uscente

$$\iiint_{\bar{A}} \operatorname{div} \underline{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{+\partial A} \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma. \quad (18.5)$$

Il teorema (che non dimostriamo) potrebbe essere generalizzato per trattare ad esempio il caso di un parallelepipedo o di una scatola più complicata.

Esempio 18.1. Sia A un aperto regolare di \mathbb{R}^3 che contiene l'origine dove è situata una carica q che genera il campo elettrostatico \underline{E} in (17.1) e supponiamo che ∂A sia omeomorfa ad una sfera. Vogliamo calcolare il flusso di \underline{E} uscente da A . Consideriamo una palla chiusa B di centro l'origine e di raggio $r > 0$ abbastanza piccolo cosicchè $B \subset A$. L'aperto $\mathcal{A} = A \setminus B$ è regolare e la sua frontiera orientata è costituita da $+\partial A$ e da

$$\underline{\mathcal{S}} : D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto r \sin \theta \cos \phi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3.$$

Il campo elettrostatico è solenoidale (17.2), perciò il teorema di Gauss ci dà

$$0 = \iiint_{\bar{\mathcal{A}}} \operatorname{div} \underline{E} \, dx \, dy \, dz = \iint_{+\partial \mathcal{A}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma = \iint_{+\partial \mathcal{A}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma + \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma.$$

L'ultimo flusso della formula precedente è già stato calcolato in (17.4) e vale $-q/\epsilon_0$ (qualunque sia il raggio della sfera), perciò *il flusso del campo elettrostatico uscente da una qualunque superficie che racchiuda la carica è*

$$\iint_{+\partial \mathcal{A}} \underline{E} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (18.6)$$

□

19. Esercizi ed esempi svolti.

Esercizio 19.1. Consideriamo il seguente campo vettoriale

$$\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y^2, xy, xz). \quad (19.1)$$

Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ e $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, y)$. Tramite il teorema di Stokes si calcoli la circuitazione di \underline{F} su $\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)$.

Soluzione. Dobbiamo calcolare il seguente primo integrale tramite il secondo, usando così il teorema di Stokes

$$\int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma.$$

Il solito determinante formale dà

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\underline{e}_2 + \underline{e}_3.$$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = -z \underline{e}_2 + (y - 2y) \underline{e}_3 = -z \underline{e}_2 - y \underline{e}_3.$$

$$\operatorname{rot} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(x, y)) = -y \underline{e}_2 - y \underline{e}_3.$$

$$\iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma = \iint_D \operatorname{rot} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(x, y)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} dx dy = \iint_D (y - y) dx dy = 0.$$

□

Esercizio 19.2. Consideriamo il seguente campo vettoriale

$$\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y, -x, x^2 + y^2). \quad (19.2)$$

Tramite il teorema di Stokes si calcoli il flusso di $\operatorname{rot} \underline{F}$ attraverso la porzione del paraboloido ellittico $z = 4 - x^2 - 4y^2$ data da $z \geq 0$. Si calcoli il flusso anche direttamente.

Soluzione. Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ e sia $\underline{\mathcal{S}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 4 - x^2 - 4y^2)$. Dobbiamo calcolare il seguente primo integrale tramite il secondo, usando così il teorema di Stokes

$$\iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma = \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} ds.$$

Una buona parametrizzazione dell'ellisse $+\partial D$ è $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (2 \cos t, \sin t)$ e dà $\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}(t)) = (2 \cos t, \sin t, 0)$. Perciò

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} ds &= \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}(t))) \cdot (\underline{\mathcal{S}} \circ \underline{\gamma})'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t (-2 \sin t) + (-2 \cos t) \cos t + 0] dt = \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Facciamo ora il calcolo diretto del flusso. Posto $h(x, y) := 4 - x^2 - 4y^2$ abbiamo $\underline{\mathcal{S}}(x, y) = (x, y, h(x, y))$ che dà

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & \partial_1 h \\ 0 & 1 & \partial_2 h \end{pmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial x} \underline{e}_1 - \frac{\partial h}{\partial y} \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = 2x \underline{e}_1 + 8y \underline{e}_2 + \underline{e}_3.$$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = 2y \underline{e}_1 - 2x \underline{e}_2 - 2 \underline{e}_3.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} d\sigma &= \iint_D \operatorname{rot} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(x, y)) \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial y} dx dy = \iint_D (4xy - 16xy - 2) dx dy = \\ &= -2 \iint_D (6xy + 1) dx dy = -2 \iint_D dx dy = -4\pi. \end{aligned}$$

Il penultimo passaggio è dovuto al fatto che l'integrale di $(x, y) \mapsto xy$ sull'ellisse D è nullo per motivi di simmetria; l'ultimo passaggio invece dà per nota l'area dell'ellisse.

□

Esercizio 19.3. Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$. Usando il teorema di Green si calcoli l'integrale curvilineo

$$I := \int_{+\partial D} (xy^2 dy - yx^2 dx). \quad (19.3)$$

Si calcoli poi direttamente I .

Soluzione. Usando la formula di Green si ha

$$I := \int_{+\partial D} (xy^2 dy - yx^2 dx) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Passiamo a coordinate polari ρ, θ osservando che la frontiera di D è il circolo $x^2 + y^2 - 2y = 0$ la cui equazione polare è $\rho = 2 \operatorname{sen} \theta$ con $\theta \in [0, \pi]$. Posto $\Delta := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2 \operatorname{sen} \theta\}$, si ha che I è uguale a

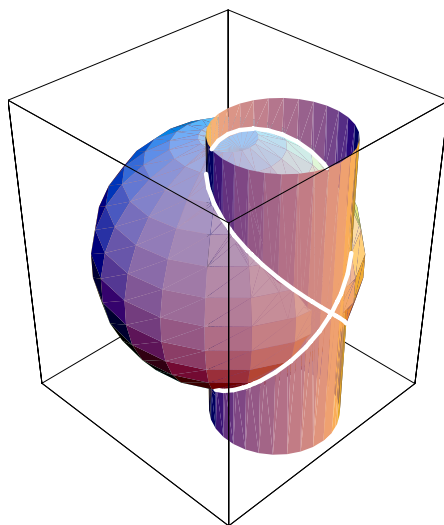
$$\iint_{\Delta} \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = 4 \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = \left[\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8} \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Per eseguire il calcolo diretto di I parametrizziamo il circolo $+\partial D$ nel modo usuale tenendo conto che il centro è $(x, y) = (0, 1)$. Otteniamo così il circuito: $\underline{\gamma} : [0, 2\pi]$, $t \mapsto (\cos t, 1 + \sin t)$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_{\underline{\gamma}} (xy^2 dy - yx^2 dx) = \int_0^{2\pi} [\cos t (1 + \sin t)^2 \cos t - (1 + \sin t) \cos^2 t (-\sin t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos^2 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t + 3 \sin t \cos^2 t] dt = \int_0^{2\pi} [\cos^2 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t] dt = \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{t}{4} - \frac{\sin 4t}{16} \right]_0^{2\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 19.4. Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ di raggio $r > 0$ compresa nel cilindro di equazione $(x - r/2)^2 + y^2 \leq r^2/4$, detta *finestra di Viviani*.



Soluzione. L'area richiesta S è il doppio di quella relativa a $z \geq 0$ cioè il doppio dell'area della superficie $z = f(x, y)$ con $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - r/2)^2 + y^2 \leq r^2/4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Pertanto

$$S = 2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2r \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Passiamo a coordinate polari ρ, θ osservando che la frontiera di D è il circolo $x^2 + y^2 - rx = 0$ la cui equazione polare è $\rho = r \cos \theta$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Posto $\Delta := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : (-\pi/2) \leq \theta \leq (\pi/2), 0 \leq \rho \leq r \cos \theta\}$, si ha

$$\begin{aligned} S &= 2r \iint_{\Delta} \frac{\rho \, d\rho \, d\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{r \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \, d\rho \right) d\theta = \\ &= 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r \cos \theta} d\theta = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin \theta|) \, d\theta = 2r^2 \left(\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \right). \end{aligned}$$

Infine $S = 2r^2(\pi - 2)$. □

Esempio 19.5. Vogliamo ritrovare il risultato dell'Esempio 14.1, questa volta usando il teorema di Stokes. Usiamo le notazioni dell'Esempio 14.1. Una buona parametrizzazione di $+\partial D$ è $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto 2(\cos t, \sin t)$ e dà $\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}(t)) = 2(\cos t, \sin t, 0)$. Perciò (15.3) porge

$$\begin{aligned} \iint_{\underline{\mathcal{S}}} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma &= \int_{\underline{\mathcal{S}}(+\partial D)} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{\mathcal{S}}(\underline{\gamma}(t))) \cdot (\underline{\mathcal{S}} \circ \underline{\gamma})'(t) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [(0 - 2 \sin t)(-2 \sin t) + (0 + 2 \cos t) 2 \cos t + 0] \, dt = \int_0^{2\pi} 4 \, dt = 8\pi \end{aligned}$$

□