

# Compitino di Analisi Vettoriale e Serie di Funzioni

(Corso di Laurea in Fisica, 13 Gennaio 2004)

**Esercizio 1.** Si consideri il campo vettoriale:  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + x^2 z, y^2 z, x y z)$$

e la superficie

$$\vec{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, 1].$$

(a) Si scriva la superficie in forma cartesiana, cioè si trovi  $B \subset \mathbb{R}^2$  e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\vec{S}(D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in B\}.$$

Si abbozzi quindi un disegno di  $\vec{S}(D)$ .

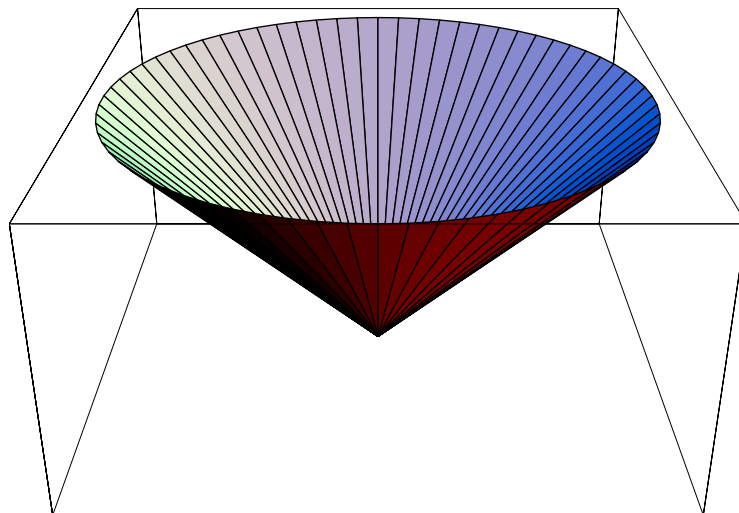
(b) Usando il teorema di Stokes (quindi calcolando una circuitazione) si trovi il flusso di  $\text{rot } \vec{F}$  attraverso la superficie  $\vec{S}$  inizialmente data.

**Esercizio 2.** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

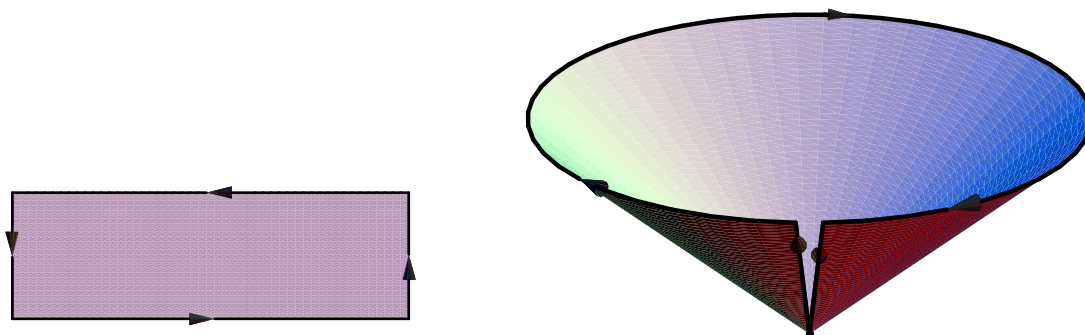
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (z-1)^n}{2^n n^n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

TEMPO A DISPOSIZIONE: 45 minuti

**Soluzione Esercizio 1.** Si vede subito che  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Quindi  $\vec{S}$  parametrizza il pezzo di cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  che si proietta nel cerchio unitario  $B$  del piano  $x, y$



Nella seguente figura si vede a sinistra il rettangolo  $D$  nel piano  $\theta, \rho$  con indicato il bordo orientato  $+\partial D$  e a destra il trasformato  $\vec{S}(+\partial D)$



Il segmento sull'asse  $\theta$  di  $+\partial D$  si può percorrere come  $\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0)$  e il trasformato è

$$\vec{\alpha}_1(t) = \vec{S}(\vec{\gamma}_1(t)) = (0, 0, 0), \quad t \in [a_1, b_1] = [0, 2\pi].$$

Il tratto verticale a destra dà  $\vec{\gamma}_2(t) = (2\pi, t)$  e il trasformato è

$$\vec{\alpha}_2(t) = \vec{S}(\vec{\gamma}_2(t)) = (t, 0, t), \quad t \in [a_2, b_2] = [0, 1].$$

Il segmento in alto percorso da destra a sinistra può essere parametrizzato come  $\vec{\gamma}_3(t) = (2\pi - t, 1)$  e il trasformato è

$$\vec{\alpha}_3(t) = \vec{S}(\vec{\gamma}_3(t)) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), 1) = (\cos t, -\sin t, 1), \quad t \in [a_3, b_3] = [0, 2\pi]$$

la circonferenza unitaria del piano  $z = 1$  percorsa in senso orario. Infine il tratto verticale dall'alto in basso può essere percorso come  $\vec{\gamma}_4(t) = (0, 1 - t)$  e

$$\vec{\alpha}_4(t) = \vec{S}(\vec{\gamma}_4(t)) = (1 - t, 0, 1 - t), \quad t \in [a_4, b_4] = [0, 1].$$

Si noti che  $\vec{\alpha}_4 = -\vec{\alpha}_2$ ; il sostegno è il segmento che congiunge l'origine a  $(1, 0, 1)$  anche se nella figura abbiamo indicato, come al solito, due segmenti leggermente staccati per essere più chiari. Calcoliamo la circuitazione

$$\int_{\vec{S}(+\partial D)} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \sum_{j=1}^4 \int_{a_j}^{b_j} \vec{F}(\vec{\alpha}_j(t)) \cdot \vec{\alpha}'_j(t) dt =$$

il termine relativo al cammino costante  $\vec{\alpha}_1$  è nullo e i termini con  $j = 2, 4$  si cancellano dato che  $\vec{\alpha}_4 = -\vec{\alpha}_2$ , quindi

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, -\sin t, 1) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( (-\sin t + (\cos t)^2 1)(-\sin t) + ((-\sin t)^2 1)(-\cos t) + 0 \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi. \end{aligned}$$

Si noti che nel calcolo resta solo il circolo superiore che corrisponde al “bordo intuitivo” del cono. □