

Capitolo 3

Calcolo vettoriale

Tutti gli esercizi, a meno di esplicita dichiarazione contraria, sono da considerarsi nello spazio vettoriale reale V_3 dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. I simboli: “ \cdot ”, “ \wedge ” indicano, rispettivamente, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale (esterno) tra due vettori.

[1] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = h\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - h\mathbf{j} + k\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{i} + k\mathbf{k}, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

trovare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori $\mathbf{x} \in V_3$ tali che:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

e determinare, quando è possibile, le componenti di \mathbf{x} .

[2] Se \mathbf{a} e \mathbf{c} sono vettori non nulli, ortogonali, calcolare:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}); \\ &\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}). \end{aligned}$$

[3] Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, determinare una base ortogonale positiva di V_3 contenente \mathbf{a} e un vettore complanare ad \mathbf{a} e a \mathbf{b} .

[4] i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ possono rappresentare i lati di un rettangolo?

ii) Determinare i vettori \mathbf{v} che rappresentano le altezze del parallelogramma individuato da \mathbf{a} e da \mathbf{b} .

[5] i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ possono rappresentare i lati di un rombo?

ii) Determinare le rette vettoriali bisettrici degli angoli individuati da \mathbf{a} e da \mathbf{b} .

[6] Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$, determinare una base ortogonale positiva contenente \mathbf{a} e un vettore \mathbf{c} ortogonale sia ad \mathbf{a} sia a \mathbf{b} .

[7] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 3, h), \quad \mathbf{b} = (-1, 5, 0), \quad \mathbf{c} = (1, -2, -1),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, esiste un vettore \mathbf{x} di V_3 che verifica tutte le seguenti condizioni:

- i) \mathbf{x} sia complanare ad \mathbf{a} e a \mathbf{c} ;
- ii) \mathbf{x} sia perpendicolare a $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$;
- iii) il vettore proiezione ortogonale di \mathbf{x} su \mathbf{c} sia $-\mathbf{c}$.

[8] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare il vettore \mathbf{x} simmetrico di \mathbf{u} rispetto a \mathbf{v} .

[9] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare i vettori bisettori degli angoli individuati da \mathbf{u} e \mathbf{v} .

[10] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3), \quad \mathbf{b} = (-1, 3, -1), \quad \mathbf{c} = (0, 1, 1),$$

determinare, se esistono, i vettori \mathbf{x} tali che:

$$2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

[11] Calcolare il valore della seguente espressione:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

dove $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono vettori qualsiasi dello spazio vettoriale reale V_3 .

[12] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, scomporre il vettore \mathbf{v} nella somma di un vettore parallelo ad \mathbf{u} e di un vettore ortogonale ad \mathbf{u} .

[13] Siano \mathbf{u}, \mathbf{v} vettori di V_3 , provare che:

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

[14] Verificare che i vettori: $\mathbf{u} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ sono ortogonali e determinare le componenti del vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

[15] Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, determinare i vettori \mathbf{x} di V_3 , complanari a \mathbf{u} e a \mathbf{v} , ortogonali a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e di norma 1.

[16] Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,

- i) verificare che \mathbf{u} è ortogonale a \mathbf{v} ;
- ii) determinare i vettori \mathbf{x} tali che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$.

[17] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, determinare i vettori \mathbf{x} di V_3 tali che la loro proiezione ortogonale sul piano individuato da \mathbf{u} e \mathbf{v} sia il vettore $\mathbf{a} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$.

[18] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, -1, h), \quad \mathbf{v} = (2, 0, h), \quad \mathbf{w} = (-2, 1, 0),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esistono uno o più vettori $\mathbf{x} \in V_3$ che verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

- i) \mathbf{x} è perpendicolare ad \mathbf{u} ;
- ii) il vettore proiezione ortogonale di \mathbf{x} su \mathbf{v} è $2\mathbf{v}$;
- iii) il volume con segno del tetraedro individuato dai vettori \mathbf{x} , \mathbf{v} , \mathbf{w} vale 8.

[19] i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, si determini il vettore \mathbf{x} tale che:

- a) l'area del parallelogramma individuato da \mathbf{a} e da \mathbf{x} sia 6.
- b) $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ sia una base ortogonale positiva.

ii) Si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base \mathcal{B}' .

[20] i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, si determinino tutti i vettori \mathbf{x} tali che la proiezione ortogonale di \mathbf{x} sul piano vettoriale generato da \mathbf{a} e da \mathbf{b} sia il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

ii) Scelto un vettore \mathbf{x} particolare, si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$.

[21] Dati i vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\lambda\mathbf{k}, \\ \mathbf{y} &= \lambda\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{i}, \end{aligned}$$

i) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui i tre vettori risultino complanari?

ii) Esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il vettore \mathbf{x} bisechi l'angolo formato da \mathbf{y} e da \mathbf{z} ?

[22] Dati i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 3, -2), \\ \mathbf{a}_2 &= (-2, a - 6, a + 4), \\ \mathbf{a}_3 &= (-1, a - 3, a^2 + a + 1), \\ \mathbf{b} &= (0, -2, a - 1), \quad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

i) determinare i valori del parametro a per cui i vettori \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 sono linearmente indipendenti.

ii) Posto $a = 2$, determinare le componenti del vettore \mathbf{b} rispetto alla base \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 .

[23] Dati i vettori: $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, h)$, dire per quali valori di h i vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 sono linearmente indipendenti.

[24] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 1)$, verificare che $V = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ha dimensione 2. Trovare per quali valori di t il vettore $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$ appartiene allo spazio V e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} .

[25] Siano E_1 il sottospazio di V_3 generato dai vettori: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, E'_1 il sottospazio di V_3 generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determinare una base e la dimensione di $E_1 \cap E'_1$.

[26] Dati i vettori $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 2, 2)$, determinare la proiezione ortogonale di \mathbf{c} sul piano individuato da \mathbf{a} e \mathbf{b} .

[27] Dati i vettori: $\mathbf{v}_1 = (-1, -2 - 2k, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2 + 2k, 16)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -7 - k, 8)$, $k \in \mathbb{R}$,

i) per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti?

ii) Per tali valori provare che $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è una base e trovare le componenti di \mathbf{v}_3 rispetto a \mathcal{B} .

[28] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

i) verificare che $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è una base di V_3 .

ii) Costruire una base ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di V_3 tale che \mathbf{e}_1 sia parallelo ad \mathbf{a} ed \mathbf{e}_2 sia complanare ad \mathbf{a} e a \mathbf{b} . (Si può usare indifferentemente il calcolo vettoriale elementare o il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt).

[29] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = h\mathbf{i} + 2h\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad h \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari.

ii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} siano paralleli.

iii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ costituiscano una base ortogonale.

iv) Posto $h = 2$, determinare il vettore proiezione ortogonale di \mathbf{u} sul piano generato da \mathbf{v} e da \mathbf{w} .

[30] Determinare un vettore unitario perpendicolare a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e a $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, con componente positiva lungo \mathbf{k} .

[31] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = 2h\mathbf{i} - \mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - h\mathbf{j}, \quad h \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari.

ii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} siano paralleli.

[32] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2h\mathbf{k}, \quad h \in \mathbb{R},$$

i) determinare h in modo che $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 = 56$.

ii) È possibile determinare h in modo che \mathbf{a} sia ortogonale a \mathbf{b} ? E in modo che \mathbf{a} sia parallelo a \mathbf{b} ? Giustificare le risposte.

[33] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$,

i) determinare i vettori complanari a \mathbf{u} e a \mathbf{v} , ortogonali ad \mathbf{u} e aventi norma $\sqrt{2}$.

ii) Determinare le componenti del vettore \mathbf{i} rispetto alla base formata da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

[34] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (-t, t, t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$,

i) determinare il valore di t in modo tale che \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} siano complanari ed esprimere \mathbf{w} come combinazione lineare di \mathbf{u} e di \mathbf{v} .

ii) Posto $t = -1$, determinare il vettore \mathbf{w}' perpendicolare a \mathbf{u} , a \mathbf{v} , avente norma uguale alla norma di \mathbf{w} e formante un angolo ottuso con \mathbf{j} .

[35] Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che:

un parallelogramma ha quattro lati uguali se e solo se le diagonali sono perpendicolari.

[36] Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che le diagonali del rombo sono bisettrici degli angoli.

[37] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (\lambda, -\lambda, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (\lambda, -1, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esistono, dei valori di λ per cui il volume del tetraedro individuato da \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} sia 5.

ii) Determinare, se esistono, dei valori di λ per cui \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} siano complanari e l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} sia ottuso.

iii) Posto $\lambda = 2$, dopo aver verificato che $C = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é una base non ortogonale, determinare le componenti di \mathbf{j} rispetto a C .

[38] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \alpha \mathbf{k},$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori \mathbf{x} complanari con \mathbf{a} e \mathbf{b} e tali che:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

Determinare, quando é possibile, le componenti di \mathbf{x} .

Capitolo 12

Soluzioni - Calcolo vettoriale

```
<<Graphics`Shapes`;  
ConeRadius=0.1;  
Arrow3D[  
  {x1_,y1_,z1_},  
  {x2_,y2_,z2_},  
  nome_String]:=  
  Block[  
    {dx,dy,dz,rho,rhoxy,g,g1,g2,g3,l,theta,psi},  
    CompoundExpression[  
      dx =x2-x1;  
      dy =y2-y1;  
      dz =z2-z1;  
      rho = Sqrt[dx^2+dy^2+dz^2];  
      rhoxy = Sqrt[dx^2+dy^2];  
      (* Calcoliamo ora gli angoli di Eulero *)  
      theta = If[rho==0,0,ArcCos[dz/rho]];  
      psi = If[rhoxy==0,  
        0,  
        If[dx>=0,  
          ArcCos[dy/rhoxy],  
          2Pi-ArcCos[dy/rhoxy]]];  
      g =Graphics3D[Cone[ConeRadius,ConeRadius,10]];  
      g1 = TranslateShape[g,{0,0,rho-ConeRadius}];  
      g2=RotateShape[g1,0,theta,psi];  
      g3 = TranslateShape[g2,{x1,y1,z1}];  
      l = Graphics3D[{Thickness[0.005],  
        Text[StyleForm[nome,  
          FontSize->24,  
          FontWeight->"Bold"],  
          {x2,y2,z2}],  
        Line[{x1,y1,z1},{x2,y2,z2}]}];  
      {l,g3}}];  
      Arrow3D[{x1_,y1_,z1_},{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},""];  
      Arrow3D[{x2_,y2_,z2_},nome_String]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},nome];  
      Arrow3D[{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},""];  
    ]
```

Programma scritto dal prof. Stefano Berardi per la rappresentazione grafica dei vettori nello spazio.

[1]

```

a = {h, -1, 3}; b = {1, -h, k}; c = {-2, 0, k}; X = {x, y, z};
Reduce[Cross[a, X] + Cross[X, b] == c, X]
h == 1 && k == 0 && x == 0 && y == 2/3 ||
-3k + k^2 == 2 - 2h && x == k/2 && y == 1/2 k (-2/(-1+h) + z) && -1 + h != 0
    
```

Se $k = h - 1$: $\mathbf{x} = \left(\frac{h-1}{2}\lambda, 1 + \frac{h-1}{2}\lambda, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

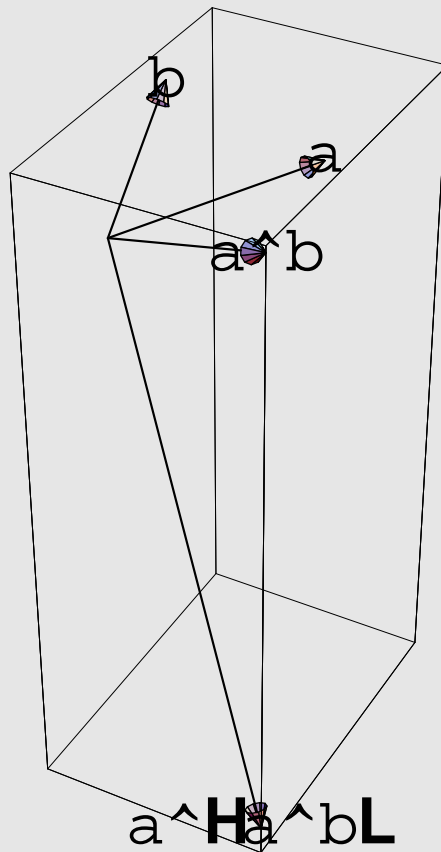
se $k \neq h - 1$: non esistono soluzioni.

[2] $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = -\|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{c}$; $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{0}$.

[3]

```

a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};
ab = Cross[a, b]
{2, -1, 1}
c = Cross[a, Cross[a, b]]
{2, -1, -5}
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b],
Arrow3D[ab, a^b], Arrow3D[c, a^(a^b)]]
    
```



-Graphics3D-

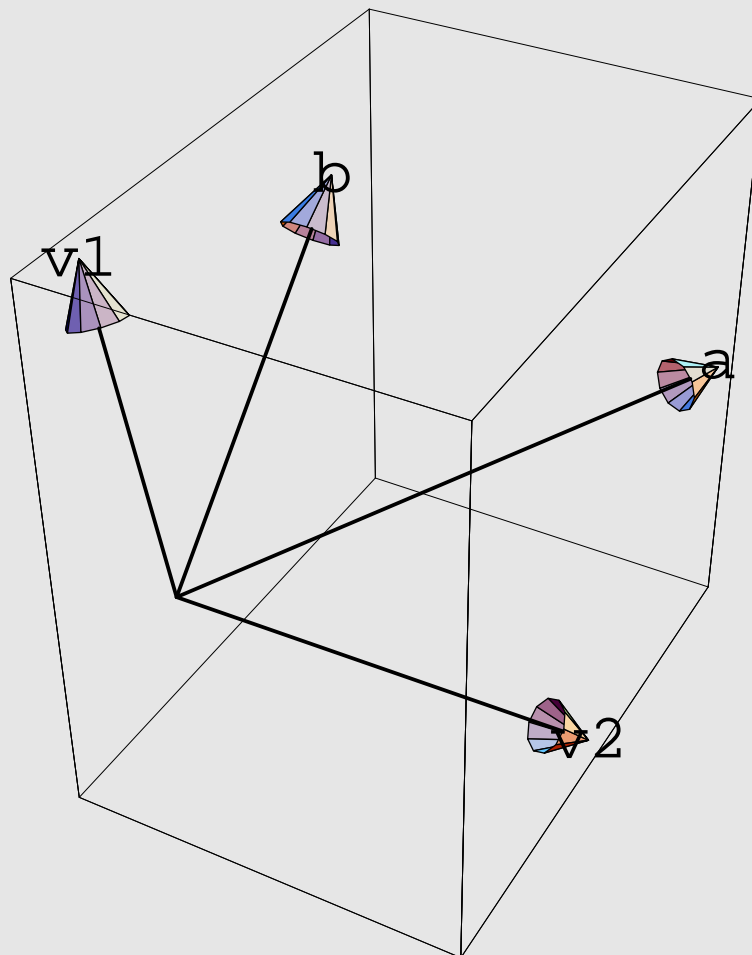
$\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}))$, per esempio.

[4]

```

a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};
a.b
2
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
v1 = b - Projection[b, a]
{-2/5, 1/5, 1}
v2 = a - Projection[a, b]
{1, 1, -1}
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[v1, v1], Arrow3D[v2, v2]]

```



-Graphics3D-

i) No;

ii) $\mathbf{v}_1 = (\pm 1, \pm 1, \mp 1)$, $\mathbf{v}_2 = (\mp \frac{2}{5}, \pm \frac{1}{5}, \pm 1)$.

[5]

```

a = {1, 1, 0}; b = {2, 0, 1};

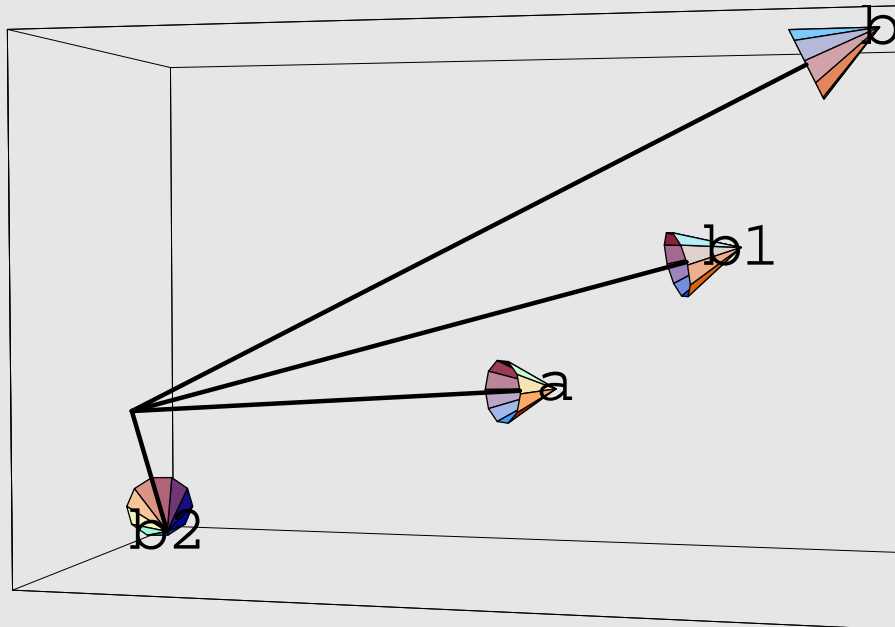
a.a - b.b
-3

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

b1 = Normalize[a] + Normalize[b]
{ 1/√2 + 2/√5, 1/√2, 1/√5 }

b2 = Normalize[a] - Normalize[b]
{ 1/√2 - 2/√5, 1/√2, -1/√5 }

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[b1, b1],
      Arrow3D[b2, b2], ViewPoint -> {0.499, -2.226, 0.084}]
    
```



-Graphics3D-

i) No;

ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

[6]

```

a = {1, 0, -2}; b = {0, 1, -1};

c = Cross[a, b]
{2, 1, 1}

Cross[a, c]
{2, -5, 1}
    
```

$\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{c} = (2, 1, 1), \mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$.

[7]

```

a = {1, 3, h}; b = {-1, 5, 0}; c = {1, -2, -1}; X = {x, y, z};
Reduce[{Cross[a, c].X == 0, Cross[b, c].X == 0, X.c/c.c == -1}, X]
h == -8/3 && x == 1/8 (-18 + 5 y) && z == 1/8 (30 - 11 y) ||
x == -1 && y == 2 && z == 1 && 8 + 3 h != 0

```

Se $h \neq -\frac{8}{3}$ esiste una sola soluzione;

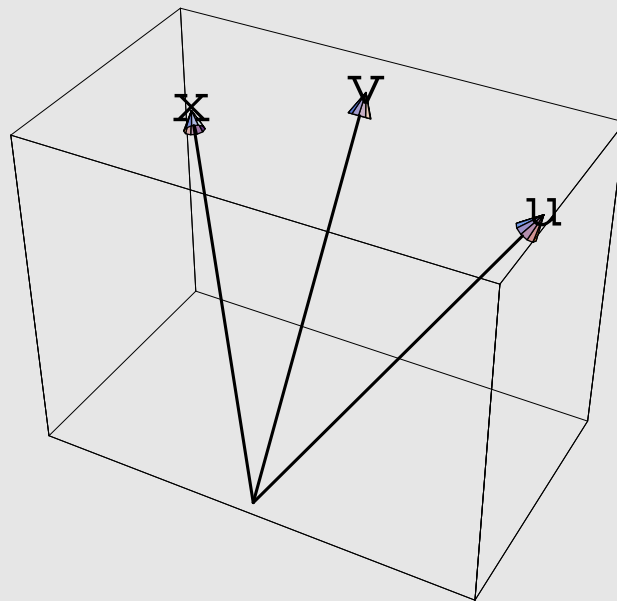
se $h = -\frac{8}{3}$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[8]

```

u = {2, 1, 3}; v = {0, 2, 3};
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
x = 2Projection[u, v] - u
{-2, 31/13, 27/13}
Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[x, x]]

```



-Graphics3D-

$$\mathbf{x} = \left(-2, \frac{31}{13}, \frac{27}{13}\right).$$

[9]

$$\mathbf{u} = \{2, 1, 3\}; \mathbf{v} = \{0, 2, 3\};$$

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

Normalize[u] + Normalize[v]

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}$$

Normalize[u] - Normalize[v]

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}$$

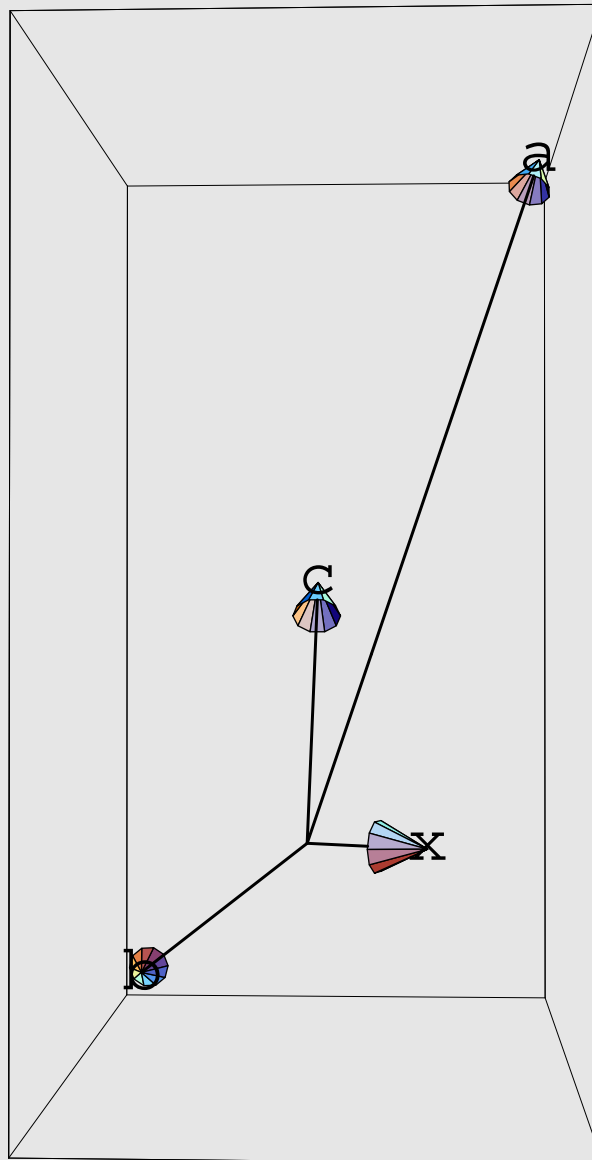
$$\mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{13\sqrt{14} \pm 28\sqrt{13}}{182}, \frac{39\sqrt{14} \pm 42\sqrt{13}}{182} \right).$$

[10]

```

a = {1, 2, 3}; b = {-1, 3, -1}; c = {0, 1, 1}; x = {x1, x2, x3};
Solve[2 (x.a) b + Cross[x, b] == c, x]
{{x1 -> 5/11, x2 -> -2/11, x3 -> 0}}
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
      Arrow3D[{5/11, -2/11, 0}, x], ViewPoint -> {0.09, -2.28, -0.02}]

```



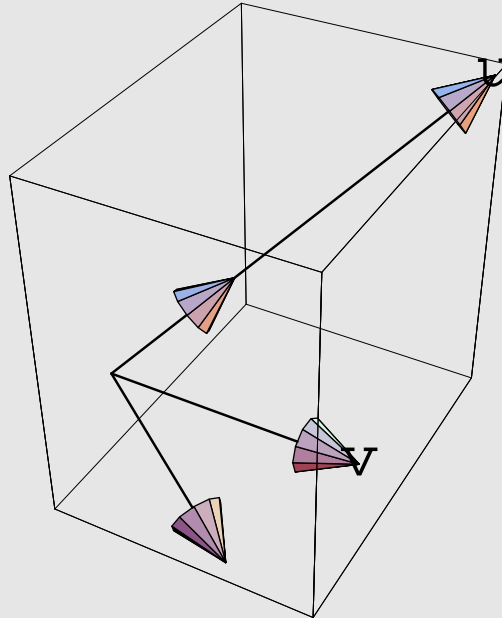
-Graphics3D-

$$\mathbf{x} = \left(\frac{5}{11}, -\frac{2}{11}, 0 \right).$$

[11] $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = -4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$

[12]

```
Show[Arrow3D[{1, 1, 1}, u], Arrow3D[{1, 0, 0}, v],
      Arrow3D[{1/3, 1/3, 1/3}], Arrow3D[{2/3, -1/3, -1/3}]]
```



-Graphics3D-

$$\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

[13] Usare le definizioni e le identità trigonometriche.

[14]

```
u = {2, 2, -2}; v = {1, 0, 1};
m = {u, v, Cross[u, v]}
{{2, 2, -2}, {1, 0, 1}, {2, -4, -2}}
LinearSolve[Transpose[m], {1, -3, 2}]
{-2/3, 3/2, 5/12}
```

$$\mathbf{v} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v} + \frac{5}{12}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

[15]

```
u = {1, 0, -1}; v = {1, 1, 0}; x = {x1, x2, x3};
Solve[{Det[{u, v, x}] == 0, x.(u + v) == 0, x.x == 1}, x]
{{x1 -> 0, x2 -> -1/sqrt(2), x3 -> -1/sqrt(2)}, {x1 -> 0, x2 -> 1/sqrt(2), x3 -> 1/sqrt(2)}}
```

$$\mathbf{x} = \left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

[16]

```

u = {1, -2, -1}; v = {1, 1, -1}; x = {x1, x2, x3};

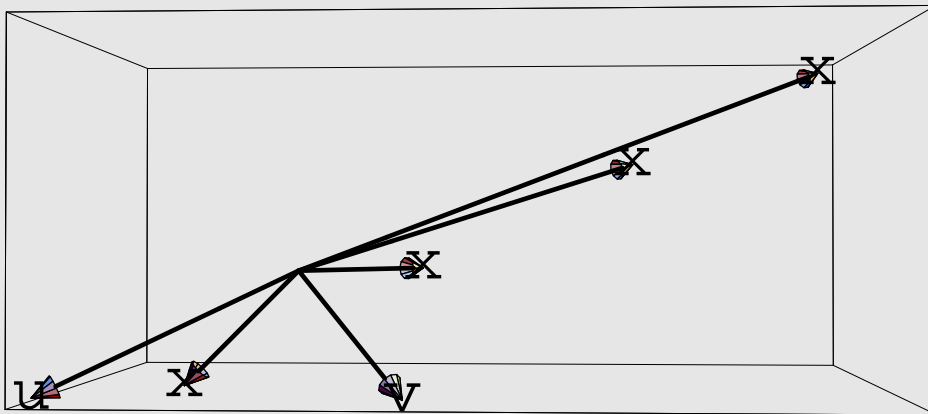
u.v
0

Solve[{Cross[u, x] == v}, x]

Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -1 - x3, x2 -> 1 + 2 x3}}

Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[{-1, 1, 0}, x],
      Arrow3D[{-2, 3, 1}, x], Arrow3D[{0, -1, -1}, x],
      Arrow3D[{-3, 5, 2}, x], ViewPoint -> {1.88, 0.09, -0.02}]

```

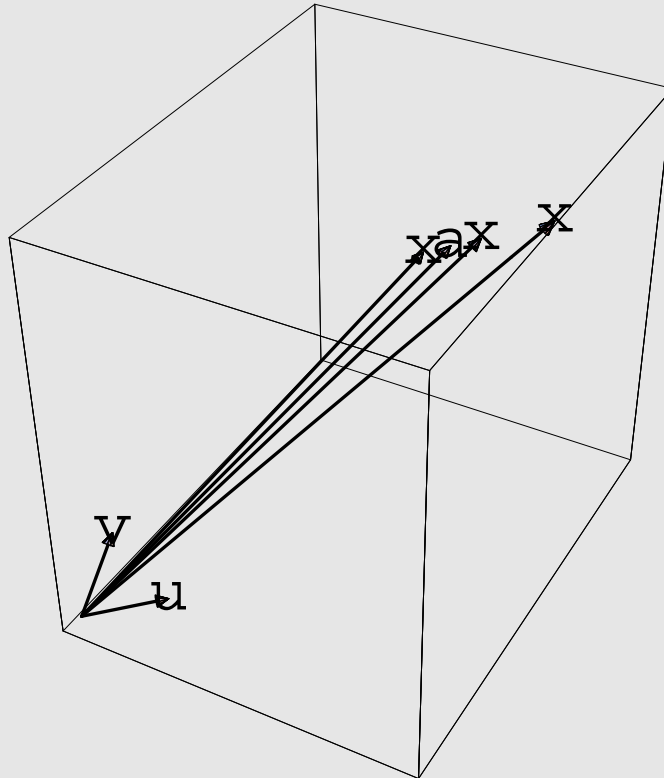


-Graphics3D-

$$\mathbf{x} = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[17]

```
Show[Arrow3D[{1, 1, 0}, u], Arrow3D[{0, 1, 1}, v],
Arrow3D[{3, 7, 4}, a], Arrow3D[{4, 6, 5}, x],
Arrow3D[{2, 8, 3}, x], Arrow3D[{6, 4, 7}, x]]
```



-Graphics3D-

$$\mathbf{x} = (3 + \lambda, 7 - \lambda, 4 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[18]

```
u = {1, -1, h}; v = {2, 0, h}; w = {-2, 1, 0}; x = {x1, x2, x3};
Reduce[{x.u == 0, x.v/v.v == 2, Det[{x, v, w]} == 48], x]
h == -2 && x1 == 8 + x3 && x2 == 8 - x3 ||
x1 ==  $\frac{4(-2 + 7h - 2h^2 + h^3)}{-2 + h}$  && x2 ==  $-\frac{2(4 + 10h - 2h^2 + h^3)}{-2 + h}$  &&
x3 ==  $-\frac{6(8 - 2h + h^2)}{-2 + h}$  && -2 + h != 0 && 2 + h != 0 && 4 + h^2 != 0
```

Se $h \neq \pm 2$ esiste un solo vettore \mathbf{x} ,
 se $h = 2$ non esistono vettori \mathbf{x} ,
 se $h = -2$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[19]

```

a = {1, 0, -1}; b = {2, 1, 2}; X = {x, y, z};
Solve[{Cross[a, X].Cross[a, X] == 36, Cross[a, b] == X}, X]
{{y -> -4, x -> 1, z -> 1}}
LinearSolve[Transpose[{a, b, {1, -4, 1}}], {4, -1, 3}]
{1/2, 13/9, 11/18}

```

i) $\mathbf{x} = (1, -4, 1)$. ii) $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{9}, \frac{11}{18}\right)$.

[20]

```

a = {2, 1, 1}; b = {0, 1, 1}; x = {2, 0, 4};
LinearSolve[Transpose[{a, b, x}], {4, -1, 3}]
{1, -2, 1}

```

i) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{x}$, se $\mathbf{x} = (2, 0, 4)$.

[21]

```

x = {1, -1, 21}; y = {1, 1, -2}; z = {1, 0, 0};
Solve[Det[{x, y, z}] == 0, 1]
{{1 -> -1}, {1 -> 1}}
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
Solve[Cross[Normalize[y] + Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, 1]
{}
Solve[Cross[Normalize[y] - Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, 1]
{}

```

i) $\lambda = \pm 1$. ii) No.

[22]

```

a1 = {1, 3, -2}; a2 = {-2, a - 6, a + 4};
a3 = {-1, a - 3, a^2 + a + 1}; b = {0, -2, a - 1};
Solve[Det[{a1, a2, a3}] == 0, a]
{{a -> -1}, {a -> 0}, {a -> 1}}
LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}/. a -> 2], b/. a -> 2]
{-3, -2, 1}

```

i) $a \notin \{-1, 0, 1\}$; ii) $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

[23]

```

u1 = {1, 1, 2}; u2 = {2, -1, 3}; u3 = {3, 0, h};
Solve[Det[{u1, u2, u3}] == 0]
{{h -> 5}}

```

$h \neq 5$.

[24]

```

u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};

RowReduce[{u, v}]
{{1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7}}

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{t -> 7}}

Solve[(w /. t -> 7) == a u + b v, {a, b}]
{{a -> 1, b -> -3}}
    
```

$t = 7; \mathbf{w} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}.$

[25] $\dim(E_1 \cap E'_1) = 1, E_1 \cap E'_1 = \mathcal{L}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}).$

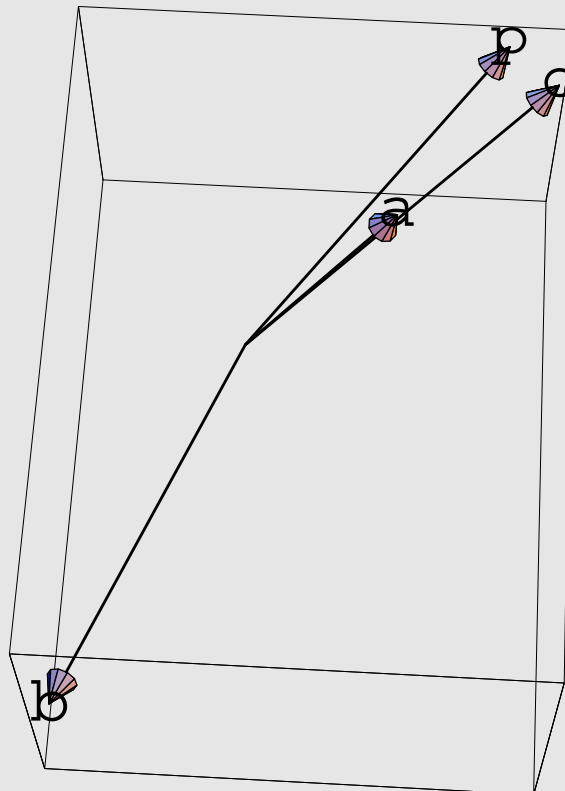
[26]

```

a = {0, 1, 2}; b = {3, -1, 1}; c = {-1, 2, 2};

p = c - (c . Cross[a, b]) / (Cross[a, b] . Cross[a, b]) Cross[a, b]
{-7/6, 5/3, 13/6}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
      Arrow3D[p, p], ViewPoint -> {1.63, 0.09, 3.59}]
    
```



-Graphics3D-

$$-\frac{7}{6}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{13}{6}\mathbf{k}.$$

[27]

$$\mathbf{v}_1 = \{-1, -2 - 2k, -2\}; \mathbf{v}_2 = \{1, -2 + 2k, -2\}; \mathbf{v}_3 = \{4, -7 - k, 8\};$$

$$\text{Solve}[\mathbf{v}_3 == a \mathbf{v}_1 + b \mathbf{v}_2]$$

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow -4, b \rightarrow 0, k \rightarrow -\frac{5}{3} \right\} \right\}$$

i) $k = -\frac{5}{3}$. ii) $\mathbf{v}_3 = -4\mathbf{v}_1$.

[28]

$$\mathbf{a} = \{1, 2, 1\}; \mathbf{b} = \{2, -1, 1\}; \mathbf{c} = \{1, -1, 0\};$$

$$\text{Det}[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}]$$

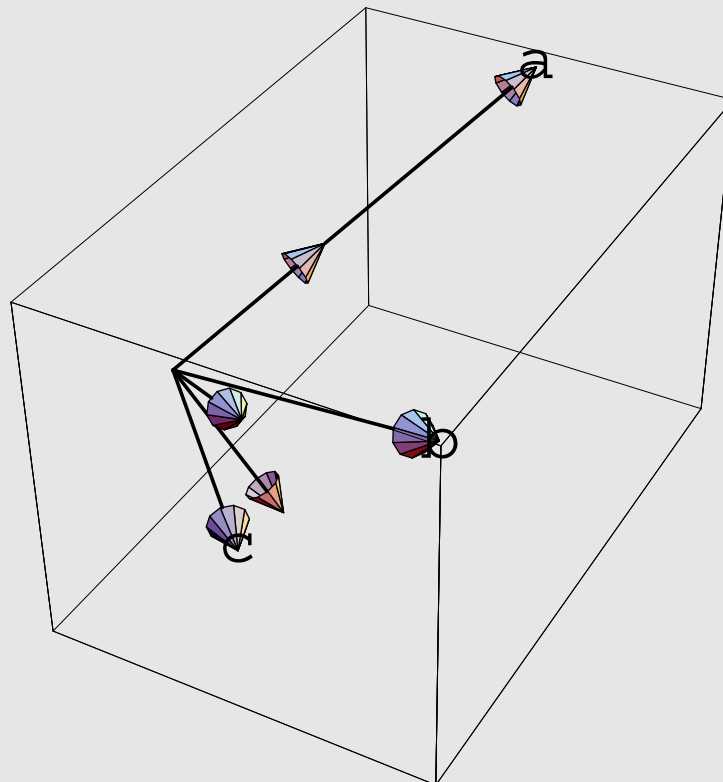
2

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

$$\mathbf{g} = \text{GramSchmidt}[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \left\{ \frac{11}{\sqrt{210}}, -4\sqrt{\frac{2}{105}}, \sqrt{\frac{5}{42}} \right\}, \left\{ \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\sqrt{\frac{5}{7}} \right\} \right\}$$

$$\text{Show}[\text{Arrow3D}[\mathbf{a}, \mathbf{a}], \text{Arrow3D}[\mathbf{b}, \mathbf{b}], \text{Arrow3D}[\mathbf{c}, \mathbf{c}], \text{Arrow3D}[\mathbf{g}[[1]], \mathbf{g}[[1]]], \text{Arrow3D}[\mathbf{g}[[2]], \mathbf{g}[[2]]], \text{Arrow3D}[\mathbf{g}[[3]], \mathbf{g}[[3]]]]]$$



-Graphics3D-

ii) Per esempio: $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{210}}(-11, 8, -5)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

[29]

```

u = {1, 0, -h}; v = {0, h, -1}; w = {h, 2h, -1};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h -> 0}, {h -> -i}, {h -> i}}

Solve[Cross[u, v] == {0, 0, 0}]
{}

Solve[{u.v == 0, u.w == 0, v.w == 0}]
{}

(u - (u.Cross[v, w]) / (Cross[v, w].Cross[v, w]) Cross[v, w]) /. h -> 2
{1/6, 5/6, -1/3}
    
```

i) $h = 0$. ii) No. iii) No. iv) $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$.

[30]

```

u = {1, -1, 0}; v = {1, 0, 1}; X = {x, y, z};

Solve[{X.u == 0, X.v == 0, X.X == 1}, X]
{{y -> -1/sqrt(3), z -> 1/sqrt(3), x -> -1/sqrt(3)}, {y -> 1/sqrt(3), z -> -1/sqrt(3), x -> 1/sqrt(3)}}
    
```

$\frac{1}{\sqrt{3}}(-i - j + k)$.

[31]

```

u = {2h, -1, h}; v = {h, -1, 0}; w = {1, -h, 0};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h -> -1}, {h -> 0}, {h -> 1}}

Solve[Cross[u, v] == 0]
{{h -> 0}, {h -> 0}}
    
```

i) $h = 0, h = \pm 1$. ii) $h = 0$.

[32]

```

a = {2, 2, h}; b = {1, -1, 2h};

Solve[Cross[a, b].Cross[a, b] == 56]
{{h -> -2*sqrt(5/17)}, {h -> 2*sqrt(5/17)}}

Solve[a.b == 0]
{{h -> 0}, {h -> 0}}

Solve[Cross[a, b] == 0]
{}
    
```

i) $h = \pm 2\sqrt{\frac{5}{17}}$.

ii) Sì per $h = 0$, no perché le loro proiezioni ortogonali sul piano vettoriale individuato da \mathbf{i} e da \mathbf{j} sono ortogonali.

[33]

```

u = {1, 0, 1}; v = {0, 1, 1}; X = {x, y, z};
Solve[{X.Cross[u, v] == 0, X.u == 0, X.X == 2}, X]
{{y -> -2/sqrt(3), x -> 1/sqrt(3), z -> -1/sqrt(3)}, {y -> 2/sqrt(3), x -> -1/sqrt(3), z -> 1/sqrt(3)}}
LinearSolve[Transpose[{u, v, Cross[u, v]}], {1, 0, 0}]
{2/3, -1/3, -1/3}

```

i) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -2, -1)$. ii) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

[34]

```

u = {1, 2, -1}; v = {1, 0, 2}; w = {-t, t, t+2}; w' = {x, y, z};
Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{t -> -4/9}}
Solve[w == a u + b v]
{{a -> -2/9, b -> 2/3, t -> -4/9}}
Solve[{t == -1, w'.u == 0, w'.v == 0, w'.w' == w.w}, w']
{{y -> -3*sqrt(3/29), x -> 4*sqrt(3/29), z -> -2*sqrt(3/29)},
 {y -> 3*sqrt(3/29), x -> -4*sqrt(3/29), z -> 2*sqrt(3/29)}}

```

i) $t = -\frac{4}{9}$, $\mathbf{w} = -\frac{2}{9}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.

ii) $\mathbf{w}' = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\right)$

[35] Se $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$, dalla definizione di norma e dalle proprietà del prodotto scalare, segue:
 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$. Il viceversa si ottiene in modo analogo.

[36] Si assume che $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$. Dalla formula del prodotto scalare, segue:
 $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$ e $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$.

[37]

```

u = {1, -1, 1}; v = {1, 2, 1}; w = {1, -1, 1};

Solve[Det[{u, v, w}] == 30]
{{1 -> 1/4 (1 - Sqrt[249])}, {1 -> 1/4 (1 + Sqrt[249])}}

A = Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{1 -> -1/2}, {1 -> 1}}

v.w/.A[[1]]
-3

v.w/.A[[2]]
0

l = 2;

Det[{u, v, w}]
5

LinearSolve[Transpose[{u, v, w}], {0, 1, 0}]
{0, 2/5, -1/5}
    
```

i) $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{249}}{4}$.

ii) $\lambda = -\frac{1}{2}$.

iii) $\mathbf{j} = \frac{2}{5}\mathbf{v} - \frac{1}{5}\mathbf{w}$.

[38]

```

a = {t, -1, 3}; b = {1, -2, 1}; c = {1, -1, -1};
d = {1, 3, -t}; x = {x1, x2, x3};

Reduce[{Det[{x, a, b}] == 0, Cross[x, c] == d}, x]
t == 2&&x1 == 1&&x2 == 1&&x3 == 2
    
```

$\alpha = 2$, $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$.