

**Progetto Lauree Scientifiche
2008-2009**

Storia delle matematiche

**Livia Giacardi
Dipartimento di Matematica, Università di Torino**

Scopi

presentare alcuni argomenti di storia della matematica collegati con i temi affrontati nel programma scolastico al fine,

- di illustrare su esempi opportunamente scelti, o attraverso letture mirate, **la maturazione di concetti, metodi e tecniche** in modo da mostrare la genesi storica delle teorie matematiche studiate, collocandole in un contesto culturale più ampio.
- di **creare attività didattiche coerenti** con lo svolgimento del programma e che arricchiscono la cultura generale.
- avviare i ragazzi alla **lettura di testi matematici classici**

La storia permette, infatti, all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una scienza statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi sia teorici che pratici e gli consente di stabilire **collegamenti interdisciplinari** con le altre scienze, con la filosofia, con l'arte,... evidenziando il **carattere unitario del sapere**.

Laboratori già sperimentati nelle scuole:

- **Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico**
- **Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni “visive” a quelle deduttive**
- **Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado**

Laboratori nuovi:

- **Le origini della geometria analitica**
- **Storia della trigonometria: dai calcoli mediante l'ombra alle funzioni circolari**

Modalità di svolgimento

- **Attività preparatoria** svolta dall'insegnante (lettura di testi scelti, esercizi, ecc.)
- Le **lezioni di storia della matematica** sono state preparate in Power Point in modo da lasciare una traccia del lavoro sia agli studenti che agli insegnanti.
- **storia “narrata” - storia “per problemi”** - attività didattiche e esercizi proposti a partire dalla trattazione storica (evidenziati nel Power Point con pagine a quadretti) - **sudditi didattici**
- **lezione “dialogata”**. Questo ha stimolato una vera e propria gara fra i ragazzi incentivati a rispondere per primi ai vari quesiti, rivelando in alcuni casi notevoli doti di intuizione in studenti “scolasticamente” giudicati modesti.
- **attività di consolidamento** da parte dell'insegnante della classe accompagnata spesso da letture di passi opportunamente scelti dai testi presi in esame.

Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico

4 ore + consolidamento



Scrivi in notazione binaria i seguenti esagrammi di Fu-hi e converti in base 10

	$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
	$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$
	$32 + 8 + 4 + 1 = 45$
	$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
	$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$
	$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

101101_2

22	2					
22	11	2				
0	10	5	2			
	1	4	2	2		
		1	2	1		
			0			

10110_2

Numeri e tecniche di calcolo nella Terra fra i due fiumi

I numeri nei bassorilievi

2500 a. C.

	11.110
	121.200
	46

L'origine dei segni numerici e le "bullae" di argilla con gettoni

Le bullae molto probabilmente servivano nelle transazioni commerciali. I gettoni contenuti descrivevano la merce inviata. Rompendo la bulla l'acquirente poteva verificare se la merce corrispondeva. Successivamente si iniziò ad imprimere sulla superficie della bulla i vari gettoni.

Bulla con gettoni, Susa, ca 3300 a.C., Louvre

4 mucche
70 montoni

Bassa Mesopotamia, 3100 a. C. Passaggio dai gettoni ai simboli numerici

1 10 60 600 3600 36000

All'origine del concetto di numero

- dalla pratica dell'intaglio al concetto di base
- basi utilizzate e loro origine (2, 5, 10, 20, 60, ...)
- sistemi di numerazione additivi e sistemi posizionali
- la scoperta dello zero in India e sua importanza
- il sistema binario di Fohi
- il sistema vigesimale dei Maia
- l'uso dell'abaco e il sistema di posizione, scrittura di un numero in base qualunque con l'uso dell'abaco

I sistemi di numerazione egizio e babilonese

- il sistema decimale additivo egizio, addizione, moltiplicazione e divisione, le frazioni a numeratore 1
- il sistema di numerazione babilonese sessagesimale posizionale la mancanza dello zero e inconvenienti che ne derivano
- calcolo degli inversi
- numeri che non ammettono inverso

Finalità

- presentare **diversi sistemi di numerazione** del mondo antico e le varie tecniche di calcolo,
- evidenziare **i caratteri e i vantaggi dei sistemi posizionali rispetto a quelli additivi,**
- riflettere sul **concetto di base** di un sistema di numerazione, sull'importanza e sul **ruolo dello zero**
- stimolare gli studenti a guardare alle civiltà del passato anche sotto l'aspetto del sapere scientifico.

Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni "visive" a quelle deduttive



La nascita della
matematica come
scienza dimostrativa

Livia Giacardi - Liceo Cl

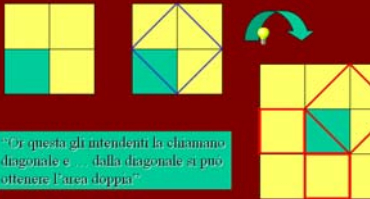
Consideriamo il numero triangolare T_n , la tetractys, $1+2+3+4 = 10$



soluto:
one anziché 4 addizioni.
leolare il generico T_n , e
imi n numeri naturali

Platone, *Menone*

Problema: costruire un quadrato di area doppia di quello assegnato



"Or questa gli intendenti la chiamano diagonale e ... dalla diagonale si può ottenere l'area doppia"

Euclide (300 a.C.)

Alessandria

Gli *Elementi* sono la sua opera fondamentale

Due criteri {
- uno extralogico dell'evidenza
- uno puramente logico della dimostrazione

A partire da alcune proprietà primitive la cui intelligenza è garantita dall'evidenza, si ricavano deduttivamente tutte le proposizioni

metodo assiomatico deduttivo

Gli Elementi di Euclide, Classici della scienza, Utet, T



i postulati individuano un sistema di proprietà primitive "evidenti di per sé" e di operazioni possibili partendo dalle quali il geometra possa con il solo ragionamento logico ricavare tutto l'edificio della geometria.

Postulati (aitēmata)

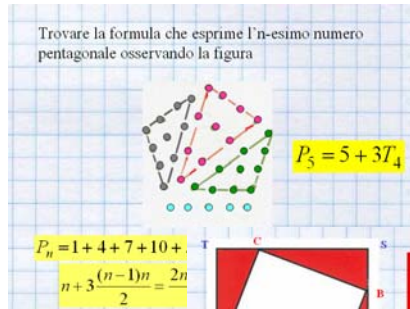
- I. Si può tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi
- II. Si può prolungare indefinitamente una retta finita
- III. Si può descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi



Traducono in termini geometrici le operazioni pratiche degli arpedonapti egizi.

- tendere una corda tra due punti
- tracciare un cerchio usando una corda fissata ad un paletto infisso nel terreno

Euclide parla di cerchi e di rette e ciò equivale a dire che i soli strumenti ammessi sono la **riga** e il **compasso**



Trovare la formula che esprime l' n -esimo numero pentagonale osservando la figura

$$P_5 = 5 + 3T_4$$

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + n + 3 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^2 - n}{2}$$

Occorre dimostrare che ABCD è un quadrato

Hp) I triangoli "rossi" sono rettangoli e uguali fra loro
RSTU è un quadrato con lato = alla somma dei cateti del triangolo "rosso"
TH) ABCD è un quadrato.

$$\widehat{AR} + \widehat{DAU} = 180^\circ$$

$$90^\circ$$

4 ore + consolidamento

Maggio 2007

- Le “ricette” di calcolo presso gli Egizi e i Babilonesi. **Pensiero operativo-concreto.**
- **Talete** (VII-VI sec. a. C.) e le prime “dimostrazioni” di affermazioni di carattere generale (lettura di frammenti su Talete)
- i **Pitagorici** (VI sec. a. C.) e l’**aritmo geometria**
- il **teorema di Pitagora**: una “dimostrazione visiva”
- generalizzazione del teorema di Pitagora
- gli annodatori di corde egizi e l’inverso del teorema di Pitagora
- i Pitagorici e la **scoperta delle grandezze incommensurabili**
- incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato: lettura di un passo dal *Menone* di Platone, [dimostrazione per assurdo basata sul pari e sul dispari]
- la dimostrazione in senso euclideo: **Euclide e gli Elementi** e loro carattere assiomatico-deduttivo, i postulati e la traduzione dei procedimenti empirici della tradizione nelle operazioni astratte della geometria. Riga e compasso strumenti privilegiati. Il postulato delle parallele. I teoremi, esempi di dimostrazione.

Finalità

- riflettere su **che cosa significa dimostrare**, sul rapporto fra evidenza visiva e dimostrazione;
- riflettere su **che cosa significa risolvere un problema, importanza degli strumenti scelti**;
- stimolare alla **scoperta**
- inquadrare lo studio della matematica in un più **ampio contesto culturale**

Sussidi didattici

Numeri figurati



Somma dei quadrati
dei primi n numeri
naturali



Abachi e cambiamenti di base

Storia dell'algebra 1.

Le equazioni di I e di II grado

4 ore + consolidamento

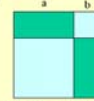
STORIA DELL'ALGEBRA 1
Le equazioni di 1° di 2° grado
Livia Giacardi • Maggio 2007

Traduzione	Interpretazione
Ho addizionato la superficie e il lato del mio quadrato: 0,45	$x^2 + x = 3/4$ ($0,45 = 45/100$)
Tu porrai 1 l'unità	$1 = 60/60$
Tu dividerai in due l'unità	$1/2 = 30/60$
Tu moltiplicherai 0,30 e 0,30	$(1/2)^2 = 1/4$
Tu aggiungerai 0,15 a 0,45	$3/4 + 1/4$
1 e il quadrato di 1	$(x+1/2)^2 =$
0,30 che tu hai moltiplicato, lo sottrai da 1	
0,30 e il lato del quadrato	$x = \sqrt{1/4}$

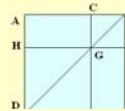
Elementi, Libro II dimostrazione geometrica rigorosa delle identità usate dai Babilonesi

Prop. II.4

"Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti". [p. 163]



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



$\widehat{CGB} = \widehat{ADB}$ (corrispondenti) $= \widehat{ABD} = \widehat{GBC}$
 dunque $\widehat{CGB} = \widehat{GBC} \rightarrow BC = CG$
 ma $BC = GK$ e $CG = BK \rightarrow GK = BK$
 per cui il parallelogramma CBKG ha tutti i lati uguali. Dico che gli angoli sono retti.

Bhaskara II, *Bijaganita* (1150)

"Regola: la somma dei quadrati di due quantità differisce dal quadrato della loro somma di due volte il loro prodotto"
 Per esempio, siano le quantità 3 e 5. I loro quadrati sono 9 e 25. Il quadrato della loro somma, 64. Guarda:



Qui le celle quadrate sono chiaramente eguali a due volte il prodotto, e la proposizione è dimostrata"

$$(x+y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy$$

[Colesbrooke? p. 224]

Evoluzione del simbolismo

Lemma 1, BM 13901 metodo del completamento del quadrato

$$x^2 + 10x - 8 = 0$$

Diofanto (III sec. d. C.)
 $\xi \sqrt{M} \eta \iota (\sigma \zeta) \Delta' \alpha M' \alpha$
 $10x - 8 = x^2 + 1$

ξ è l'incognita x (*arithmos*)
 Δ' è x^2 , dove Δ è l'iniziale di *diastasis*, potenza

Indiani
 $y\dot{a}$ va 0 $y\dot{a}$ 10 \dot{u} 8
 $y\dot{a}$ va 1 $y\dot{a}$ 0 \dot{u} 1
 $y\dot{a}$ (*yanat-lavat* = *ta*)
 $y\dot{a}$ va (*yanat-varga*)
 \dot{u} (*nipa*=ciò che ap

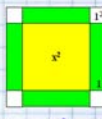
$$x^2 - 0 + x \cdot 10 - 8 = 0$$

$$x^2 \cdot 1 + x \cdot 0 + 1$$

Es. 7 Trovare le soluzioni positive della seguente equazione come fa Al-Khawarizmi

$$x^2 + 4x = 32$$

Suggerimento:
 Costruire il quadrato di lato x e sui suoi lati costruire 4 di lato 1.
 Completare il quadrato. ...



Dunque:
 $x^2 + 4(1)x + 4(1^2) =$
 $x^2 + 4x + 4$
 ma $x^2 + 4x$ vale 32
 dunque il quadrato esterno ha area
 $32 + 4 = 36$ e il suo lato
 $x+2$ sarà = 6, da cui $x = 4$

Nel mondo islamico



La civiltà islamica si sviluppa a partire dal 622 (anno della fuga di Maometto a Medina) e raggiunge il massimo splendore tra il IX e il XIII sec.

-Cronologia: i momenti più significativi della storia dell'algebra e i protagonisti dai Babilonesi a Galois.

- Evoluzione del simbolismo

- i **calcoli aha egizi** (metodo di semplice falsa posizione)

- il **“calcolo algebrico” dei Babilonesi** (uso delle identità notevoli, il metodo del completamento del quadrato e quello della semisomma e semidifferenza)

- problemi di applicazione delle aree in Grecia

- la dimostrazione geometrica rigorosa delle identità notevoli negli

Elementi di Euclide. Lettura guidata di alcune proposizioni.

- **Diofanto**, il recupero della tradizione babilonese e i primi passi verso il simbolismo algebrico

- **i matematici indiani e l'uso dei numeri negativi**

- **i contributi del mondo islamico.** Al Kwarizmi (IX sec.): diffusione del sistema di numerazione indiano con lo zero, classificazione, risoluzione e discussione delle equazioni di secondo grado

- il *Liber Abaci* (1202) di **Leonardo Pisano**: un ponte fra Oriente e Occidente

Finalità

- individuare la **transizione dai metodi aritmetici** (falsa posizione) a **quelli algebrici**,
- riflettere sull'**importanza del simbolismo**,
- evidenziare l'**importanza dell'ampliamento del campo numerico**,
- illustrare l'**uso della geometria** per introdurre i prodotti notevoli e per risolvere equazioni di secondo grado,

Le origini della geometria analitica



L A
G E O M E T R I E.
L I V R E P R E M I E R.

Le origini della Geometria

Des problemes qu'on peut construire sans l'usage de la circonférence, & des lignes droites.



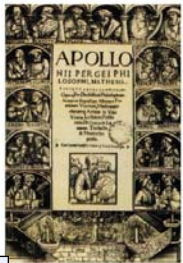
Ous les Problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin d'employer que la longueur de quelques lignes droites, & de quelques cercles, pour les construire.

Livia Giacardi, 20...

Apollonio di Perga (circa 262-190 a. C.)

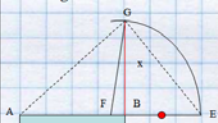
La sua vita trascorse fra **Alessandria**, dove ricevette la sua educazione scientifica, e **Pergamo** dove c'erano importanti centri di studi superiori e ricche biblioteche.

Le sue doti di matematico erano così notevoli che era chiamato "il grande geometra".



Uso dell'applicazione delle aree per "risolvere" un'equazione quadratica pura

Trovare un quadrato la cui area sia uguale a quella di un rettangolo ABCD



Si prolunghi AB di un segmento BE uguale a BC. Si prenda il punto medio F di BE e si descriva il cerchio di centro F e raggio FB. Sia G il punto di intersezione del prolungamento del lato BE dato con la circonferenza, all'estremo del segmento cercato.

Infatti il triangolo AGE è isoscele e per il II teorema di Talete si ha AB · BE = AG · EG.

L A
G E O M E T R I E.
L I V R E P R E M I E R.

Des problemes qu'on peut construire sans l'usage de la circonférence, & des lignes droites.



Ous les Problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin d'employer que la longueur de quelques lignes droites, & de quelques cercles, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espece de Division: Ainfi n'aront autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connus, que leur en adjoindre d'autres, ou en offer, Oubien en ayant vne, que se nommeray l'vnité pour la rapporter d'aucun mieux aux nombres. Et qui peut ordinairement estre pris a discretion, pour en avoir encore deux autres, en trouver vne quatrieme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le meisme que la Multiplication, oubien en trouver vne quatrieme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

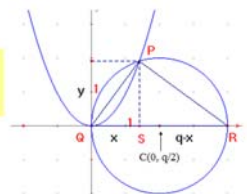


La creazione della geometria analitica



L'equazione trinomia del I tipo $x^3 + bx = c$, ("un cubo più lati sono uguali a un numero") viene scritta come $x^3 = p^2x = p^2q$ con $b = p^2$ e $c = p^2q$ per il principio di omogeneità dimensionale.

La risoluzione si ottiene per intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 = q \cdot x$ e della parabola $y = x^2/p$.



L'ascissa QS del punto P di intersezione delle curve rappresentate in figura è la radice cercata.

Al-Khayyam non scrive equazioni, ma usa le proporzioni

La retta $y = x^2$ in P(1,1) con il metodo di

$$1(x^2 - ax^2 + bx^2 + cx + d) =$$

che ottengo 6 equazioni da cui ricavò

La retta $y = 1/x$ in P(2,1/2) con il metodo

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} =$$

$$(x-c)^2 + \frac{1}{x^2} = d^2$$

$$c = \frac{15}{8}$$

- breve storia della geometria analitica con attenzione ai momenti più significativi per lo sviluppo dei metodi e dei concetti che ad essa competono:

© introduzione di un **sistema di riferimento e uso delle coordinate**,

© elaborazione del **simbolismo**,

© emergenza del **legame curva-equazione**, ecc.),

© attenzione ai **collegamenti** con l'evoluzione storica di altri settori della matematica quali l'algebra e l'analisi infinitesimale

- Apollonio, le *Coniche* e l'uso delle coordinate

- O. Al Khayyam e l'uso delle coniche per risolvere le equazioni cubiche

- N. Oresme e lo studio del moto attraverso i diagrammi

- R. Descartes, la *Géométrie* e la creazione della geometria analitica

- P. Fermat e un altro approccio alla geometria analitica

- Il costituirsi della moderna geometria analitica

Materiali prodotti

Relativamente ai primi due moduli è stato realizzato un dossier contenente:

- un CD-Rom con i file delle lezioni in Power Point e in formato stampabile;
- copie di articoli di storia della matematica di riferimento; indicazioni bibliografiche essenziali sia relative alla parte storica (fonti primarie e secondarie), sia per la scelta di attività didattiche mirate;
- indicazione di siti web utili e affidabili;
- copia delle prove di verifica.

