Il prezzo di non arbitraggio d'un'attività finanziaria derivata

Sottostante rischioso:

prezzo odierno: $S_0 := 1000$

prezzo futuro: $S_1 := 900$

$S_2 := 1200$

Attività finanziaria derivata:

p. es. una *put* con prezzo d'esercizio: $E := 1050$

prezzo odierno: v ???

$j := 1..2$ contraddistingue le due evoluzioni

$$y_j := \max(E - S_j, 0)$$

prezzo futuro: $y_1 = 150$ Se S = S_1

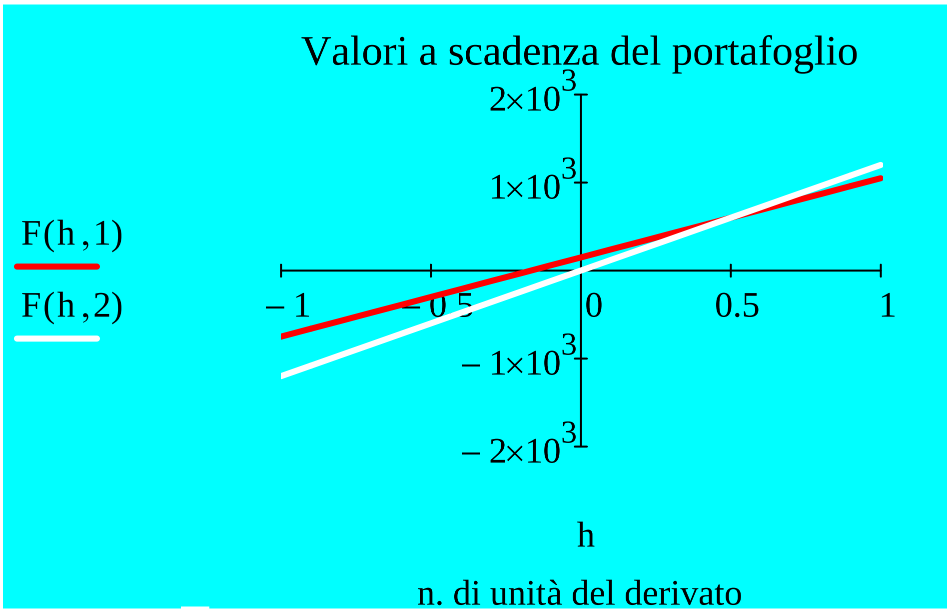
$y_2 = 0$ Se S = S_2

Costruiamo un portafoglio con un'unità di attività finanziaria derivata e h unità di sottostante

Il valore del portafoglio a scadenza dipende da h e dall'evoluzione del sottostante.

$$F(h,j) := y_j + h \cdot S_j$$

$$h := -1, -.9 .. 1$$



H

Valore di h che rende il valore finale del portafoglio indipendente dall'evoluzione del sottostante:

$$H := \frac{y_1 - y_2}{S_2 - S_1} \qquad H = 0.5$$

Controllo: $F(H,j) = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$

Rendimento periodale d'un impiego senza rischio $r := 4 \cdot \%$

Prezzo corrente che deve avere il portafoglio immunizzato

$$P := \frac{F(H,1)}{1+r} \qquad P = 576.923$$

Prezzo corrente del sottostante in esso incluso:

$$S_0 \cdot H = 500$$

Prezzo del derivato: $v := P - S_0 \cdot H$ $\quad v = 76.923$

Per via algebrica tale prezzo può ottenersi anche come valore scontato del valore atteso dell'attività derivata a scadenza con opportune probabilità non "fisiche", ma sintetiche: le c.d. "probabilità *risk-neutral* ".

I valori possibili a scadenza sono: $y_1 = 150$

$$y_2 = 0$$

La corrispondenti probabilità *risk-neutral* siano q_1 e q_2

Algebricamente si trova che con:

$$q_1 := \frac{S_2 - (1 + r) \cdot S_0}{S_2 - S_1}$$

$$q_2 := \frac{(1 + r) \cdot S_0 - S_1}{S_2 - S_1}$$

$$\sum_j q_j = 1$$

$$v\_sint := \frac{1}{1 + r} \cdot \left[\sum_j \left(y_j \cdot q_j \right) \right]$$

$$v\_sint = 76.923$$

$$\max(x, y) := \frac{(x + y)}{2} + \frac{|x - y|}{2}$$