

BUSTA n.1 – TEMI

Il candidato scelga uno dei temi seguenti trattandone un aspetto significativo. Svolga inoltre tre esercizi fra quelli proposti.

TEMA (1): Equazioni alle derivate parziali

TEMA (2): Metodi della geometria applicati alla fisica matematica

TEMA (3): Il teorema limite centrale

TEMA (4): Teoria di Galois

TEMA (5): Il gruppo fondamentale, teoria ed applicazioni alla geometria e/o all'algebra

TEMA (6): L'assioma della scelta e alcune sue conseguenze

BUSTA n.1 – ESERCIZI

ESERCIZIO (1): Sia G un gruppo finito e nontriviale di ordine m . Supponiamo che G abbia la proprietà che dati due elementi qualsiasi distinti e non triviali a_1 ed a_2 esista un g per cui $a_2 = ga_1g^{-1}$.

- Si determinino i possibili sottogruppi di Sylow di G .
- Si determini l'ordine di G .

ESERCIZIO (2): Sia W uno spazio vettoriale di dimensione *finita* definito su un campo K qualsiasi. Sia $g : W \rightarrow W$ una funzione lineare (endomorfismo) non identicamente nulla e non suriettiva. Definiamo

$$g^0 := 1_W, \quad g^t := g^{t-1} \circ g \quad (t \geq 1), \quad N_t := \ker(g^t), \quad J_t := \text{image}(g^t)$$

- Determinare eventuali relazioni di inclusione tra i sottospazi N_t .
- Determinare eventuali relazioni di inclusione tra i sottospazi J_t .
- Provare che esiste un numero naturale s tale che per $t \not\leq s$ si ha $N_t \neq N_{t+1}$ mentre per $t \geq s$ $N_t = N_{t+1}$.
- Qual è la proprietà analoga per i J_t ?
- Si ha $W = N_s \oplus J_s$?
- Dare un esempio in cui W abbia invece dimensione infinita ed una g per cui s nel punto 3 non esiste.

ESERCIZIO (3): Sia $S = P(u, v)$ una superficie parametrizzata da una funzione iniettiva ed infinitamente differenziabile $D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ove D_s è il disco aperto di raggio s nel piano u, v . Supponiamo che S sia regolarmente parametrizzata, ovvero che il versore normale $N(u, v) \neq 0$. Sia S_1 la restrizione di S a D_1 . Dato un numero reale $e \neq 0$ consideriamo la superficie parallela Σ di S_1 , parametrizzata dai punti $Q(u, v) = P(u, v) + eN(u, v)$ ove $(u, v) \in D_1$.

- Dare opportune condizioni su e in modo tale che la superficie $Q(u, v)$ sia regolarmente parametrizzata.
- Individuare una superficie di semplice e nota descrizione ed un e opportuno per cui l'applicazione $P(u, v) \rightarrow Q(u, v)$ sia una isometria e darne la verifica.
- Esiste una superficie S per cui qualunque $e \neq 0$ l'applicazione del punto (b) sia una isometria ?

ESERCIZIO (4): Siano X e Y due variabili aleatorie esponenziali di parametro 1, indipendenti.

- a) Determinare la densità di probabilità della v.a. $Z = X + Y$;
- b) Calcolare $E(Z)$ e $D^2(Z)$

ESERCIZIO (5): Determinare le soluzioni dispari dell'equazione differenziale $y^{(6)} + 4y'' = 0$

ESERCIZIO (6): Studiare la convergenza nel piano complesso della serie di funzioni $\sum_{n=2}^{\infty} u_n(z)$, dove $u_n(z) = \frac{(3+4i)^n z^n}{n^3} - \frac{(3+4i)^{n-1} z^{n-1}}{(n-1)^3}$

ESERCIZIO (7): Studiare il moto di un punto materiale, vincolato ad una guida liscia di forma ellittica posta in un piano verticale, con il semiasse minore orizzontale.

ESERCIZIO (8): Un sistema è costituito da due punti materiali di uguale massa m che si muovono (senza attrito) in un piano orizzontale sotto l'azione di una forza centrale di centro O e potenziale $U(r)$; fra i due punti agisce inoltre una forza elastica. Mostrare che il sistema ammette due integrali primi indipendenti.

ESERCIZIO (9):

- a) Scrivere, in un pseudolinguaggio di immediata comprensione, un algoritmo strutturato del metodo di eliminazione di Gauss con sostituzione all'indietro.
- b) Mostrare che il numero totale di operazioni aritmetiche nel metodo considerato è il seguente:

$$\text{moltiplicazioni e divisioni: } \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3},$$

$$\text{addizioni e sottrazioni: } \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}.$$

ESERCIZIO (10): Dimostrare che se $\kappa \geq \aleph_0$ è un cardinale regolare e \triangleleft è un buon ordine su κ , allora esiste $X \subseteq \kappa$ di cardinalità κ su cui \triangleleft e l'usuale ordinamento coincidono, cioè

$$\forall \alpha, \beta \in X \quad (\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \triangleleft \beta)$$

Facoltativo: estendere il risultato a tutti i cardinali $\kappa \geq \aleph_0$

BUSTA n.2 – TEMI

Il candidato scelga uno dei temi seguenti trattandone un aspetto significativo. Svolga inoltre tre esercizi fra quelli proposti.

TEMA (1): Teoria delle distribuzioni

TEMA (2): Equazioni di Lagrange in fisica matematica

TEMA (3): Il ruolo della formula di Bayes in probabilità e statistica

TEMA (4): Teoria algebrica delle forme quadratiche e loro applicazioni alla geometria.

TEMA (5): Forme differenziali in geometria differenziale e/o algebrica.

TEMA (6): Il teorema di compattezza della logica del prim'ordine

BUSTA n.2 – ESERCIZI

ESERCIZIO (1): Si risponda ad almeno una delle due domande motivando adeguatamente:

- Sia Q il gruppo additivo dei numeri razionali. Esistono sottogruppi non *triviali* A e B tali che ci sia decomposizione in somma diretta $Q = A \oplus B$
- Esiste un polinomio algebrico esplicito a coefficienti razionali di cui $\sigma = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sia radice?

ESERCIZIO (2):

- Sia K uno spazio topologico compatto. Si dimostri che se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua a valori reali allora $f(K)$ è limitato e chiuso.
- Si provi: Sia Y un sottoinsieme dello spazio metrico \mathbb{R}^n . Se ogni funzione continua $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, allora Y è compatto.

ESERCIZIO (3): Siano L_1, L_2, L_3 tre rette distinte nel piano proiettivo complesso CP^2 . Siano X l'unione $X := L_1 \cup L_2 \cup L_3$ e sia Y il complementare $Y := CP^2 - X$. Motivando adeguatamente:

- (a_1) Provare che L_i è un chiuso connesso di CP^2 , (a_2) Descrivere il gruppo fondamentale di L_i .
- Se $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$. (b_1) Trovare le componenti connesse di X . (b_2) Trovare le componenti connesse di Y ed *il gruppo fondamentale* di queste.
- Se $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{p\}$ (c_1) Trovare le componenti connesse di X ed *il gruppo fondamentale* di queste. (c_2) Trovare le componenti connesse di Y ed *il gruppo fondamentale* di queste.

ESERCIZIO (4): Sia (X, Y) una variabile aleatoria bidimensionale con densità di probabilità

$$f(x, y) = \frac{k}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

- Determinare la costante k .
- Determinare la f.r. della v.a. (X, Y) .
- Se $D = [0, 1] \times [0, 1]$, calcolare la probabilità $P((x, y) \in D)$

ESERCIZIO (5): Determinare le soluzioni dispari dell'equazione differenziale $y^{(5)} + y' = 0$

ESERCIZIO (6): Sia S lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivabili, tali che $x^m f^{(n)}$ è limitata in \mathbb{R} per ogni coppia di interi $m \geq 0, n \geq 0$. Dimostrare che se $f(x)$ e $g(x)$ appartengono ad S , anche il loro prodotto aritmetico $f(x)g(x)$ appartiene ad S .

ESERCIZIO (7): Un punto materiale è vincolato ad una guida liscia coincidente con il ramo inferiore della curva di equazione $x^2 - y^2 = -1$, posta in un piano verticale (con l'asse y verticale). Studiare il moto e dire in quanto tempo il punto può raggiungere con velocità nulla, a partire da una posizione generica $x \neq 0$ e con l'opportuna velocità iniziale, la posizione di equilibrio instabile.

ESERCIZIO (8): Un sistema è costituito da due punti materiali di uguale massa m che si muovono (senza attrito) su un paraboloide di rotazione con asse verticale; fra i due punti agisce inoltre una forza elastica. Mostrare che il sistema ammette due integrali primi indipendenti.

ESERCIZIO (9):

- a) Supponendo di essere in grado di scrivere la matrice quadrata A di ordine n come prodotto di due matrici quadrate

$$A = L \cdot U$$

dove L è *triangolare inferiore* e U *triangolare superiore*, usare questa scomposizione per risolvere il sistema lineare $Ax = b$.

- b) Mostrare come la scomposizione LU si possa effettivamente ottenere, ossia come trovare L e U , dato A (algoritmo di Crout-Doolittle).

ESERCIZIO (10): Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabili. Dimostrare che esistono $A', B' \subseteq \mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabili tali che $A \cup B = A' \cup B'$, $A' \cap B' = \emptyset$, $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$.

BUSTA n.3 – TEMI

Il candidato scelga uno dei temi seguenti trattandone un aspetto significativo. Svolga inoltre tre esercizi fra quelli proposti.

TEMA (1): Trasformata di Laplace o di Fourier (a scelta del candidato)

TEMA (2): Leggi di conservazione in fisica matematica

TEMA (3): Catene di Markov

TEMA (4): Numeri primi.

TEMA (5): Teoria delle superficie in topologia e/o in geometria.

TEMA (6): Funzioni ed insiemi ricorsivi

BUSTA n.3 – ESERCIZI

ESERCIZIO (1): Siano s e t due elementi di un campo K . Si consideri la matrice quadrata M , $n \times n$,

$$M = \begin{bmatrix} s & t & & \cdots & & & t \\ t & s & t & \cdots & & & t \\ t & t & s & t & \cdots & & t \\ t & t & t & s & t & \cdots & t \\ & & & \cdots & & & \\ t & t & & \cdots & t & s & t \\ t & t & \cdots & \cdots & & t & s \end{bmatrix}.$$

Calcolare il determinante di M , preferibilmente in modo sintetico, considerando gli autovalori di un opportuno endomorfismo.

In alternativa:

Sia K la estensione biquadratica dei razionali Q , $K = Q(i, \sqrt{5})$. Decidere se K sia una estensione di Galois di Q e nel caso trovarne la struttura del gruppo di Galois. Si consideri l'elemento $a := i + \sqrt[7]{5}$; trovare il polinomio minimo di a su Q .

ESERCIZIO (2): Siano Y_1, Y_2 sottoinsiemi limitati di \mathbb{R}^n dotato della topologia euclidea standard e sia $Y := Y_1 \cap Y_2$ la loro intersezione.

- Dopo aver enunciato la definizione di sottoinsieme connesso in uno spazio topologico, si provi che se il complementare di Y in \mathbb{R}^n è sconnesso allora o Y_1 o Y_2 ha complementare in \mathbb{R}^n sconnesso.
- Sia adesso $Z_j, j \in J$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi limitati di \mathbb{R}^n e sia $Z := \bigcap_{j \in J} Z_j$. Si può ancora provare che se il complementare di Z in \mathbb{R}^n è sconnesso allora qualcuno degli Y_j ha complementare sconnesso?

ESERCIZIO (3): Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore di norma 1, scritto come colonna e sia I_n la matrice identità.

- Provare che la matrice $M := I_n - 2vv^t$ è ortogonale
- Dimostrare che la moltiplicazione per M è una riflessione ortogonale rispetto al sottospazio V ortogonale a v , [cioè se un vettore u si scrive $u = cv + z$ con $z \in V$ allora si ha $Mu = \dots$].

- c) Siano X ed Y due vettori in \mathbb{R}^n con la stessa norma. determinare un opportuno versore v come sopra per cui $MX = Y$.
- d) Utilizzare i fatti precedenti per provare che ogni matrice ortogonale $n \times n$ è un prodotto di al più n riflessioni.

ESERCIZIO (4): Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, uniformi nell'intervallo $[0, 1]$. Posto $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ e $Z_n = n(1 - Y_n)$, dimostrare la convergenza in legge

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

dove Z è una v.a. da determinare.

ESERCIZIO (5): Studiare la convergenza nel piano complesso della serie di funzioni $\sum_{n=2}^{\infty} u_n(z)$, dove $u_n(z) = (4 + 3i)^n n^2 z^n - (4 + 3i)^{n-1} (n-1)^2 z^{n-1}$

ESERCIZIO (6): Sia A lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivabili, con derivate di ogni ordine sempre limitate in \mathbb{R}^n . Dimostrare che se $f(x)$ e $g(x)$ appartengono ad A , anche il loro prodotto aritmetico $f(x)g(x)$ appartiene ad A .

ESERCIZIO (7): Un punto materiale di massa m è vincolato ad una guida liscia di equazione $y^2 - x = 0$, posta in un piano verticale che ruota uniformemente intorno all'asse y (supposto verticale) con velocità angolare ω . Descrivere i moti del punto in corrispondenza di diversi valori del parametro ω .

ESERCIZIO (8): Un sistema è costituito da due punti materiali di uguale massa m che si muovono (senza attrito) su una sfera di raggio r , sotto l'azione della forza peso; i due punti sono inoltre vincolati a restare a distanza fissa ℓ . Mostrare che il sistema ammette due integrali primi indipendenti.

ESERCIZIO (9): L'algoritmo di Gauss porta a ricavare una matrice triangolare superiore cui si applica la sostituzione all'indietro. Per effettuare il processo di riduzione si usano i moltiplicatori di riga, che conviene memorizzare in una matrice triangolare inferiore. Supponendo che gli elementi pivotali non siano nulli, l'algoritmo gaussiano scompone di fatto la matrice nonsingolare A nel prodotto di una matrice triangolare inferiore L (con tutti uno sulla diagonale) per una matrice triangolare superiore U (i cui elementi diagonali non sono nulli). Dimostrare questo risultato oppure, in via subordinata, verificarlo considerando una matrice di ordine quattro.

ESERCIZIO (10): Dimostrare che la classe dei campi infiniti non è finitamente assiomaticizzabile al prim'ordine nel linguaggio $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, =\}$