

Università di Torino
Dottorato di ricerca in Matematica

9 novembre 2004

TEMA N. 3

Il candidato scelga uno dei temi seguenti, trattandone un aspetto significativo. Svolga inoltre almeno un esercizio tra quelli proposti, motivando adeguatamente le risposte.

Temi

1. Insiemi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili: proprietà ed applicazioni logiche.
2. Ideali di un anello commutativo.
3. Le varietà di Grassmann.
4. Le geodetiche di una superficie differenziabile.
5. L'insegnamento dell'algebra negli ultimi anni sta evolvendo, grazie ai risultati della ricerca e all'introduzione delle nuove tecnologie nella scuola superiore. Descrivere le scelte didattiche che un insegnante può adottare per affrontare l'algebra in modo "nuovo", rispetto a uno più "tradizionale". Analizzare nei dettagli, con i dovuti riferimenti alla ricerca recente, la mediazione che le nuove tecnologie possono fornire nell'apprendimento dell'algebra.
6. Teoremi di punto fisso e applicazioni.
7. Moto di un punto su di una superficie e generalizzazione al caso di moti spontanei di sistemi lagrangiani.
8. Variabili Gaussiane in statistica.
9. Metodi a più passi per la risoluzione numerica di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie.
10. Meccanica dei continui generalizzati e complessità.

Esercizi

Esercizio 1

Dare esempi di insiemi adeguati minimali di connettivi.

Esercizio 2

Siano R un anello commutativo e S un suo sottoanello. Il conduttore C di S in R è l'insieme degli elementi $x \in R$ tali che $xR \subseteq S$.

- Dimostrare che C è un ideale di R .
- Dimostrare che C è un ideale di S .
- Provare che ogni ideale di S che sia anche un ideale di R , è contenuto in C .
- Determinare il conduttore per gli anelli $R = \mathbb{C}[t]$ e $S = [t^2, t^3]$.
- Determinare il conduttore per gli anelli $R = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ e $S = [t]$.

Esercizio 3

Dopo aver constatato che la quartica piana C di equazione

$$x_0^2 x_2^2 = x_0^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2$$

è razionale, se ne determini una rappresentazione parametrica razionale utilizzando una opportuna trasformazione quadratica.

Esercizio 4

Determinare le linee di curvatura dell'elicoide di equazione cartesiana

$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Esercizio 5

La somma di un numero infinito di termini può dare un risultato finito. Esempificare questa affermazione nel contesto della scuola superiore. Commentare l'evoluzione teorica di questa esemplificazione.

Esercizio 6

Data la funzione $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0, x \in \mathbb{R} \\ 2t & \text{se } t \in (0, 1], x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{se } x > t^2, \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t, x)$$

$$x(0) = 0.$$

ii) Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni definite per ricorrenza:

$$\phi_0(t) \equiv 0$$

$$\phi_{n+1}(t) = \phi_0(t) + \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds,$$

commentando la risposta alla luce del punto 1).

Esercizio 7

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^4 \frac{t^2 x \sqrt{|x|}}{1 + t^2 x^2} dx.$$

Esercizio 8

Un sistema rigido contenuto in un piano è costituito da una circonferenza materiale omogenea di raggio R e massa M e da n diametri materiali omogenei, ciascuno di massa m . Determinare l'energia cinetica del sistema in funzione della velocità del centro della circonferenza, supponendo che questa rotoli senza strisciare su di una guida rettilinea contenuta nel piano. Se la guida è una semiretta di bordo O e il piano del moto è verticale, studiare il problema del distacco qualora il corpo raggiunga il bordo della semiretta e il moto dopo il distacco, sotto l'azione della forza peso.

Esercizio 9

In un canale vengono trasmessi N bit, dove N è una variabile aleatoria di Poisson di parametro μ . Sia p la probabilità di trasmettere un 1 (e $1 - p$ quella di trasmettere uno 0). Sia X la variabile aleatoria numero di 1 trasmessi e sia Y la variabile aleatoria numero di 0 trasmessi.

- Determinare la legge di X .
- Stabilire se le variabili aleatorie X e Y siano indipendenti.

Esercizio 10

Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie i.i.d. con densità

$$f(x; \mu) = \mu^2 (1 - x)^{\mu^2 - 1} I_{\{0 < x < 1\}}$$

con $\mu > 0$.

- a) Determinare uno stimatore di μ .
- b) Determinare le proprietà di tale stimatore.

Esercizio 11

Utilizzando il metodo di Newton, trovare lo schema iterativo per calcolare, con precisione di macchina, la radice cubica $\alpha = a^{\frac{1}{3}}$ di $a > 0$.