Proposta di corso di dottorato per l'anno accademico 2003/2004

Geometria delle varietà di dimensione alta

ALBERTO ALBANO – ANTONELLA GRASSI

Il corso è un corso avanzato di geometria algebrica ed è rivolto a studenti dei primi due anni di dottorato.

In tutti i campi della matematica, il problema della classificazione di oggetti (per esempio gruppi, campi, varietà, ...) è uno dei problemi centrali, spesso troppo difficile per essere risolto ma che fa da guida alla ricerca e misura i progressi della conoscenza. In Geometria Algebrica, questo problema è il problema della classificazione delle varietà algebriche che, come è facile immaginare, diventa sempre più difficile all'aumentare della dimensione delle varietà.

La classificazione delle curve è stato uno dei grandi successi della matematica della seconda metà dell'Ottocento, e nella prima metà del Novecento la scuola Italiana di Geometria Algebrica (Castelnuovo, Enriques, Severi ed i loro allievi) ha ottenuto la classificazione delle superficie, la cosiddetta "classificazione di Enriques–Kodaira", successivamente estesa al caso analitico da Kodaira negli anni '50, e in caratteristica p da Bombieri e Mumford all'inizio degli anni '70.

Il passaggio dalla dimensione 1 alla dimensione 2 aveva richiesto idee completamente nuove e, allo stesso modo, idee completamente nuove sono state introdotte nell'affrontare il problema della classificazione in dimensione 3. Dopo gli studi pionieristici di Fano negli anni Trenta e Quaranta, nulla di veramente nuovo è successo fino ai lavori di Shigefumi Mori, all'inizio degli anni '80.

Il complesso di idee sviluppato da Mori e altri, fra cui ricordiamo M. Reid, Kawamata e Kollár, ha permesso di risolvere con successo il problema della classificazione delle varietà algebriche in dimensione 3. Questo lavoro è stato premiato con la Medaglia Fields assegnata a Mori nel 1990. (Mori ha anche ricevuto, nell'ottobre 2002 una laurea Honoris Causa in Matematica dall'Università di Torino). Per una rapida e interessante introduzione al cosiddetto "programma di Mori", si può vedere [5].

Le idee e le tecniche introdotte da Mori consentono anche di chiarire ed affrontare problemi che sorgono nello studio delle varietà di dimensione più alta. Un aspetto importante della geometria di una varietà è la descrizione delle sottovarietà che contiene; il corso tratterà in dettaglio il caso delle curve razionali contenute in una varietà X, e le conseguenze sulla geometria globale di X. Una applicazione importante di queste tecniche è la costruzione delle classi di Gromov-Witten e delle applicazioni alle dualità fisiche, argomento che verrà trattato in una serie di seminari tenuti dalla prof. Grassi, come complemento al corso.

Il corso seguirà il testo [1], Capitoli 1–4. Gli altri libri citati in bibliografia possono essere utili come complemento e approfondimento degli argomenti del corso.

Modalità di svolgimento. Le lezioni avranno luogo a Palazzo Campana nell'arco di tutto l'anno, con inizio in dicembre 2003, per consentire la frequenza anche a studenti del primo anno che abbiano già i prerequisiti necessari di Geometria Algebrica. Gli studenti interessati sono invitati a contattarmi nel mese di novembre per concordare l'orario.

Prerequisiti.

- Geometria: concetto di varietà, fibrato tangente, fibrato normale, coomologia delle varietà, sia nel caso reale che nel caso complesso.
- Geometria algebrica: fasci, coomologia dei fasci, definizione di varietà algebrica (definizione di schema), morfismi fra varietà.

Programma.

(1) Teoria dell'intersezione per curve e divisori. Criteri di ampiezza. Il teorema di Riemann–Roch.
(2) Famiglie algebriche di curve e di morfismi. Lo schema di Hilbert. Studio infinitesimale. Un caso semplice: rette sulle varietà di Fermat. Schemi di Fano.
(3) Esistenza di curve razionali. Lemmi di tipo "bend and break". Curve razionali sulle varietà di Fano.
(4) Problemi di razionalità e unirazionalità. Varietà razionalmente connesse. Il teorema di Graber–Harris–Starr (vedi [6]).

Referenze bibliografiche

[1] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Universitext, Springer, (2001)

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52 Springer, (1977)

[3] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer (1988)

[4] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts 12, Cambridge University Press (1988)

[5] J. Kollár, The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program, *Bull. Amer. Math. Soc.* **17** (1987), 211–273

[6] T. Graber, J. Harris, J. Starr, Families of rationally connected varieties, preprint math.AG/0109220 (sul sito `xxx.sissa.it`)